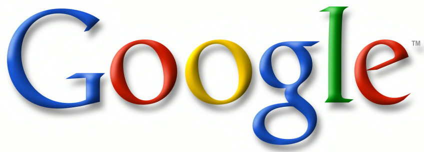
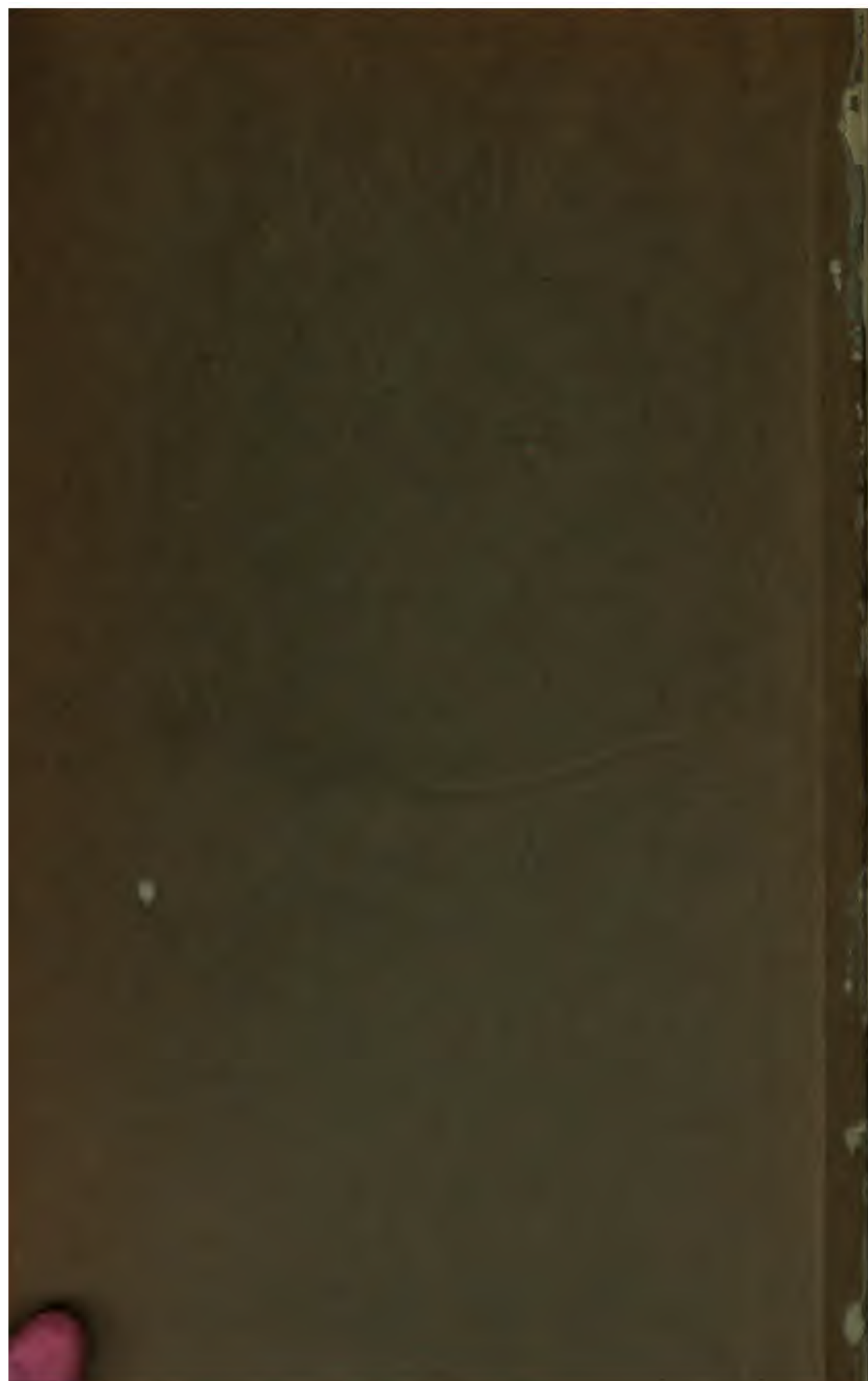








LA

STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS.

a


Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕ

LA

STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS;

PAR

M. MAURICE LÉVY,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE ET A L'ÉCOLE CENTRALE
DES ARTS ET MANUFACTURES.

DEUXIÈME ÉDITION.

Ire PARTIE.

PRINCIPES ET APPLICATIONS DE STATIQUE GRAPHIQUE PURE.

TEXTE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Augustins, 55.

—

1886

PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION.

La nouvelle édition de cet Ouvrage est divisée en deux Parties formant chacune un Volume :

La première, intitulée *Principes et applications de Statique graphique pure*, comprend les matières traitées dans la précédente édition, sauf les modifications et additions suivantes :

1° Dans la première édition, nous avions débuté par un exposé, fait à un point de vue purement géométrique, des propriétés des polygones funiculaires et des figures réciproques.

Cette marche nous paraît encore aujourd'hui la plus satisfaisante au point de vue didactique; mais, comme il s'agit d'arriver le plus rapidement possible aux applications, nous avons pensé que les Ingénieurs nous sauraient gré de les dispenser de cette étude préalable. Nous avons donc entièrement supprimé la partie géométrique de la première édition et nous déduisons la solution des problèmes relatifs aux polygones funiculaires et aux figures réciproques, de leur définition mécanique même.

2° Nous avons ajouté une étude complète et détaillée de l'important problème du passage d'un convoi sur une poutre pleine ou réticulaire posée sur deux appuis simples.

Nous exposons, pour la recherche des positions dangereuses du convoi au point de vue des moments de flexion, une solution très précise due à Weyrauch. Nous donnons

ensuite, non seulement pour les moments de flexion, mais aussi pour les efforts tranchants, une solution nouvelle et complète basée, dans sa première partie, sur un théorème inédit, qui nous a été communiqué par un de nos auditeurs, M. le capitaine du Génie Ventre ([1]).

3° Dans la Note I, nous exposons la nouvelle méthode de calcul des dimensions des pièces employées dans les constructions, d'après les expériences de Wöhler et de Spangenberg, et les principales formules à l'aide desquelles elles ont été résumées par Launhardt, Weyrauch, etc.

4° La Note II est consacrée au planimètre d'Amsler, à son intégrateur et à l'intégromètre de M. Marcel Deprez, instruments que nous nous étions borné à mentionner dans la première édition.

5° La Note III traite des courbes funiculaires, particulièrement de celles d'égale résistance et, dans la Note III *bis*, nous rappelons les principaux procédés de tracé des arcs de parabole qui se présentent si fréquemment dans les applications.

6° Dans la Note IV nous donnons, dans le cas de systèmes plans, la théorie si utile des lignes isostatiques et des lignes de glissement et nous l'appliquons au tracé de ces lignes dans une poutre à deux appuis simples.

7° Au point de vue matériel, au lieu de placer, comme dans la première édition, toutes les figures dans un Atlas, nous n'avons laissé dans l'Atlas que les grandes figures d'ap-

---

([1]) Depuis que cet Ouvrage est imprimé, nous avons remarqué qu'on déduit aussi une solution graphique très commode du théorème suivant, que nous croyons nouveau :

Si une charge verticale quelconque ayant son centre de gravité en un point G *d'une poutre à deux appuis produit en un autre point* G' *un moment de flexion* M, *la même charge, transportée de façon que son centre de gravité arrive en* G' *et* retournée bout à bout, *produit en* G *le même moment de flexion* M.

Ce théorème ramène de suite le problème du § 215 à celui du § 194, c'est-à-dire le problème d'une charge mobile à celui d'une charge fixe.

plication, et nous avons intercalé les autres dans le texte, ce qui est plus commode pour le lecteur.

La deuxième Partie n'existait pas dans la précédente édition; elle est intitulée : *Applications de la Statique graphique aux problèmes de la Résistance des matériaux.*

Elle comprend six Sections et quatre Notes :

La *première Section*, intitulée *Principes généraux*, se compose de deux Chapitres : l'un est consacré au rappel des formules générales relatives à la flexion plane. Nous donnons non seulement les expressions des déplacements élastiques, mais nous indiquons aussi comment on peut les obtenir, par application des principes de Cinématique relatifs à la composition des rotations, ce qui est certainement plus expressif.

Nous donnons aussi aux formules générales une forme que nous croyons nouvelle et qui est plus simple et aussi exacte que la forme habituelle, dans le cas surtout où l'on néglige l'effort tranchant sans négliger la compression de la fibre moyenne.

Dans le second Chapitre, nous avons essayé de résumer ce qu'on peut dire de général *sur les lignes d'influence*, si commodes, on pourrait dire indispensables, dans l'étude des positions dangereuses d'un convoi sur une poutre non déterminable par la Statique ou sur un arc.

Relativement à ces lignes introduites dans la Science par M. le professeur Fränkel, nous donnons un important théorème de Winckler pour le cas où elles sont polygonales, et nous l'étendons au cas où elles sont composées d'arcs de courbes quelconques. Enfin, par l'introduction de ce que nous appelons un *convoi fictif*, nous donnons quelques indications nouvelles qui peuvent être commodes dans les applications.

La *deuxième Section* est consacrée aux poutres droites.

Laissant de côté les poutres déterminables par la Statique qui ont été étudiées dans la première Partie, nous donnons,

d'une façon très détaillée, les solutions graphiques des problèmes relatifs à la poutre encastrée à un bout et simplement appuyée à l'autre, à la poutre encastrée aux deux bouts et aux poutres continues avec ou sans encastrement.

Nous fondons chaque théorie, qu'il s'agisse des poutres à une travée ou à plusieurs, sur un *seul* théorème que nous appelons *fondamental* et qui mérite ce nom, parce qu'il fournit la solution de tous les problèmes qu'on peut se poser dans le domaine qu'il embrasse, solution analytique ou graphique suivant le mode de développement qu'on préfère lui donner.

Pour les poutres continues, le théorème fondamental est celui que nous appelons *des deux moments;* c'est une généralisation de celui que nous avons donné aux *Comptes rendus* du 22 mars 1875.

Il fournit immédiatement les points fixes de Bresse, que nous appelons les *foyers,* ainsi que les moments de flexion en ces points.

Notre solution graphique n'est pas celle si justement célèbre de Mohr; elle est analogue à celle de MM. Fouret-Collignon.

S'il s'agissait de déterminer les moments de flexion dans une poutre continue pour *un* système déterminé de charges, celle de Mohr serait un peu plus expéditive; mais, pour déterminer les moments maxima résultant des diverses combinaisons possibles de surcharges, nous croyons celle que nous proposons préférable.

Mais, comme il nous a paru convenable, dans un Ouvrage aussi étendu, de ne pas passer sous silence le beau travail de Mohr, qui est, en quelque sorte, le point de départ de la Résistance des matériaux graphique, nous l'exposons dans une Note I à la fin de l'Ouvrage.

Une question importante est l'étude des *lignes d'influence,* dans une poutre à une ou plusieurs travées, non déterminable par la Statique, parce que, ces lignes connues, les positions

dangereuses d'un convoi s'ensuivent. Nous en discutons la forme dans tous les cas : et, comme résumé de la discussion, nous observons, ce qui, croyons-nous, n'a pas été fait, que *toujours dans une poutre de section constante, quel que soit le nombre des travées, la ligne d'influence, relative à une section quelconque, est une courbe funiculaire :*

1° *D'une charge unité placée dans cette section ;*

2° *D'une pression d'eau, c'est-à-dire d'une charge répartie sur toute la travée comprenant cette section et variant proportionnellement à la distance de son point d'application à une droite fixe.*

Les lignes *de charge de cette pression* sont des droites passant par un des foyers, lorsque la section considérée coïncide avec l'appui opposé à ce foyer. Ce théorème permet de tracer très rapidement les lignes d'influence, quel que soit le nombre des travées, en utilisant les propriétés si commodes et si usuelles des courbes funiculaires.

La *troisième Section* est consacrée aux arcs : nous y traitons successivement, et dans des Chapitres spéciaux, les sujets suivants :

1° Arcs posés sur deux rotules ;

2° Arc encastré à ses deux extrémités ;

3° Arc encastré à un bout et posé sur rotule à l'autre ;

4° Arcs avec une ou deux charnières (ceux à trois charnières sont déterminables par la Statique et ont été étudiés dans la première Partie) ;

5° Ce que nous appelons des *arcs continus* (c'est-à-dire ceux dont des points en nombre quelconque sont fixes ou assujettis à avoir des déplacements verticaux donnés) et les *arcs reliés à des poutres continues* (système du pont du Douro ou ponts suspendus avec tablier rigide) ;

6° Action du vent sur les fermes en charpente.

Dans sa belle étude du pont du Douro, M. Seyrig a

admis la fixité des points de la poutre supérieure. Cette hypothèse simplifie les calculs, en permettant de traiter séparément l'arc et la poutre; mais il peut être utile d'étudier l'Ouvrage tout entier en ayant égard aux liaisons qui existent réellement entre l'arc et la poutre. Nous donnons la solution de ce problème qui n'est guère plus complexe que celle qui repose sur l'hypothèse de la fixité des points d'attache.

La théorie de chaque système d'arcs, comme celle de chaque système de poutres, repose aussi sur un théorème unique et fondamental qui peut être, à volonté, développé analytiquement ou graphiquement.

Parmi les solutions graphiques relatives aux arcs, nous avons donné la préférence à celle qu'Eddy a exposée dans ses *New constructions in graphical Statics*. Nous en donnons une démonstration rigoureuse, ce qui a été fait aussi par l'ingénieur Guidi, et nous l'appliquons non seulement aux arcs simples, mais aussi aux arcs continus et à ceux reliés à des poutres droites.

Nous avons essayé d'étudier aussi les lignes d'influence dans les arcs et, par suite, les positions dangereuses des convois, et nous sommes arrivé à une solution que nous croyons très satisfaisante.

Quel que soit l'arc, encastré ou non, de section et d'élasticité constantes ou variables, nous employons une ligne que nous appelons la *ligne de poussée* qu'il ne faut pas confondre avec la *Kämpferdrucklinie* de Winckler.

Concevons que, sur la verticale d'un poids mobile P, on porte, à partir de la corde de l'arc, une ordonnée qui, à une échelle arbitraire, représente le rapport *purement numérique* $\frac{q}{P}$ de la poussée q qu'il détermine, à sa propre valeur. C'est la ligne ainsi obtenue que nous appelons la *ligne de poussée*. Or nous montrons que cette ligne coïncide avec l'une des courbes funiculaires, à savoir : 1° si l'arc est de section constante, de charges fictives $y\,ds$, appliquées à chaque

élément ds de la fibre moyenne, y étant l'ordonnée du milieu de cet élément par rapport à la corde: 2° si le moment d'inertie I de la section de l'arc est variable, de charges fictives $\frac{y\,ds}{I}$.

La ligne de poussée se trace donc comme une courbe ou approximativement comme un polygone funiculaire de charges connues.

Nous avons déjà ramené à un tel tracé les lignes d'influence des poutres droites, et nous observons que les portions d'ordonnées comprises entre la ligne de poussée (ligne *tracée une fois pour toutes*, quelle que soit la section relativement à laquelle on cherche la ligne d'influence) et les lignes d'influence de l'arc envisagé comme une simple poutre droite, lorsqu'on les trace à une échelle convenable *et différente d'une section à l'autre*, donnent les ordonnées même des lignes d'influence de l'arc. Ainsi, ces dernières se trouvent, à leur tour, ramenées à des tracés de polygones funiculaires.

La ligne de poussée, en raison de la simplicité de sa définition géométrique et de son tracé, peut aussi être envisagée comme la base d'une solution graphique générale et nouvelle du problème des arcs et n'exigeant pas d'opérations plus complexes que la méthode d'Eddy.

Elle consiste en ceci :

1° Tracer, avant toutes choses, la ligne de poussée qui dépend uniquement de la forme géométrique de l'arc;

2° Cette ligne connue, par le principe de superposition, elle fournit immédiatement la poussée produite par une charge quelconque continue ou discontinue;

3° Adjoignant cette force à celles directement appliquées, il suffit de traiter l'arc comme s'il était placé sur ses appuis à la façon d'une poutre droite encastrée ou non, suivant que l'arc lui-même est encastré ou non.

Dans le dernier Chapitre de cette Section, nous nous occupons de l'important problème de l'action du vent sur les grandes fermes.

Dans les calculs qu'on fait à cet égard, on admet généralement que le moment de flexion que le vent produit au sommet d'un arc est indépendant de la flèche, en sorte qu'il suffit, à ce point de vue, d'envisager l'arc (ou plutôt l'*arche* entière que forment les arcs composant un pont ou un viaduc) comme une poutre encastrée à ses deux extrémités.

Cette règle est très commode; mais il était utile de vérifier dans quelle mesure elle est admissible.

A cet effet, nous commençons par donner les expressions exactes des forces élastiques que produit le vent. On voit alors que l'hypothèse dont nous venons de parler suppose : 1° qu'on regarde comme constant, non le moment d'inertie I de la section transversale de l'arche, mais son produit par le cosinus de l'inclinaison de cette section sur la verticale; 2° qu'on néglige les efforts tranchants et compressions de la fibre moyenne.

On peut, en général, commencer par admettre cette hypothèse à titre de première approximation, sauf vérification ultérieure. Mais cette vérification exige qu'on ait aussi à sa disposition les formules exactes que nous donnons.

Pour la détermination des pièces de contreventement et d'entretoisement, nous n'avons pas hésité à en simplifier considérablement le calcul, à l'aide des hypothèses très défavorables à la stabilité généralement admises dans la pratique.

La *quatrième Section* traite des voûtes en berceau, de la poussée des terres, de celle des fluides (eau ou vent) et des murs de soutènement.

Nous basons la théorie des voûtes et celle de la poussée des terres sur ce que, dans un Mémoire publié autrefois, nous avons appelé le *principe de l'équilibre-limite* et qui peut se formuler ainsi : *Si un Ouvrage est établi de façon à résister aux actions qu'il éprouve lorsqu'il est sur le point d'être renversé, il résistera à celles qu'il éprouve dans tout autre état.*

Ce principe, traduction des idées de Coulomb, fournit

immédiatement, pour chaque forme de voûte, la courbe des pressions qu'il convient d'adopter, non pas la courbe des pressions *vraies,* que nous regardons comme impossible à trouver, mais une courbe des pressions plus défavorable à la stabilité que celle qui se produit réellement. Cette solution, en quelque sorte immédiate, nous paraît parfaitement suffisante dans un problème où tant de conditions (qualité des mortiers, époque du décintrement, degré de perfection du clavage, etc.) échappent et échapperont probablement toujours à une analyse mathématique. Néanmoins, nous exposons en quelques mots, à la fin du Chapitre consacré aux voûtes, les beaux travaux, sur ce sujet, de M. Durand-Claye et de M. le général Peaucellier.

Pour la poussée des terres, nous donnons la méthode purement géométrique de Poncelet.

Nous indiquons comment elle peut être étendue à des murs courbes *noyés* et notamment comment on pourrait déterminer, à l'aide du principe de l'équilibre limite, la répartition des pressions qu'un remblai exerce sur l'extrados d'une voûte, si on ne voulait pas admettre, comme on le fait d'habitude, que chaque voussoir supporte le poids de la terre qui le surmonte directement.

Les deux derniers Chapitres de cette Section sont consacrés : l'un à l'étude des murs soumis soit à leur propre charge, soit en même temps à celle de terres ou d'eau qu'ils doivent supporter ou à celle du vent; l'autre, au calcul de la pression du vent sur une surface de révolution, en particulier sur les surfaces cylindriques, coniques et hémisphériques.

Dans la *cinquième Section,* on traite des *Corps de révolution symétriquement chargés.* Un Chapitre est consacré aux *surfaces de révolution* parfaitement flexibles, un autre aux coupoles métalliques et un troisième aux coupoles en maçonnerie.

Nous donnons les solutions analytique et graphique relatives à la coupole métallique simplement posée et, pour la

coupole en maçonnerie, le tracé graphique de la courbe des pressions résultant du principe de l'équilibre-limite.

Le résultat est le même que celui qu'Eddy tire du principe de Moseley.

La *sixième et dernière Section* traite des *Systèmes réticulaires à lignes ou conditions surabondantes*. Nous montrons comment, en modifiant légèrement les procédés graphiques donnés pour les pièces à section pleine, on obtient les solutions des problèmes correspondants pour des pièces réticulaires.

Ce Volume, comme le premier, se termine par quelques Notes :

La première contient, comme nous l'avons dit, l'exposé de la méthode de Mohr pour la construction des moments de flexion sur les appuis d'une poutre continue.

La seconde est un travail personnel intitulé : *Sur une nouvelle méthode d'étude des arcs d'égale résistance*. Au lieu de procéder, comme on le fait généralement, par règle de fausse position, en supposant d'abord aux pièces que l'on veut calculer une section constante et appliquant ensuite fautivement les résultats obtenus à des pièces de section variable, nous cherchons directement le solide d'égale résistance.

M. l'Inspecteur général des Ponts et Chaussées Des Orgeries a résolu ce problème pour les poutres droites; mais, pour les arcs, rien, à notre connaissance, n'a été fait. Nous arrivons à une solution graphique comportant des opérations plus simples que celles qu'on est amené à faire en partant de l'hypothèse d'une section constante.

La Note III est la reproduction de la Note II de la première édition, c'est-à-dire du Mémoire présenté à l'Académie des Sciences, le 28 avril 1873, sur la *Recherche des tensions dans les systèmes de barres et sur les systèmes qui, à volume égal de matière, présentent la plus grande résistance possible* (1).

---

(1) Dans une Communication faite à l'Académie des Sciences le 24 mars 1884,

Quoiqu'il en résulte quelques redites que le lecteur passera, nous avons reproduit ce travail *in extenso,* parce que nous croyons avoir, le premier, appliqué le principe des vitesses virtuelles à ce genre de questions.

Nous avons fait au Mémoire original diverses additions, signalées soit par des mentions spéciales, soit au paragraphe qui les renferme.

Parmi ces additions, nous citerons celle où nous étendons aux arcs réticulaires la solution du problème de l'égale résistance qui fait l'objet de la précédente Note.

Dans la première édition, quelques fautes de typographie ou de calcul s'étaient glissées dans les tableaux numériques de la fin de ce travail. M. le professeur Alexander, à l'occasion de la traduction qu'il a bien voulu en faire, nous les a signalées; nous lui en adressons ici nos meilleurs remerciements.

Enfin, dans un Appendice à ce Mémoire, nous examinons les caractères exceptionnels que peuvent présenter, soit au point de vue géométrique, soit au point de vue statique ou élastique, les systèmes articulés.

Il y a des systèmes qui, quoique n'ayant pas de lignes surabondantes, ne sont pas librement dilatables. M. Crofton en a donné deux exemples dans une Note des *Proceedings London Math. Society* (t. X), sur laquelle M. Darboux a bien voulu appeler notre attention.

A quels caractères peut-on, d'une manière générale, reconnaître l'existence de pareils systèmes? Quelles sont leurs conditions d'équilibre? Comment les théories de l'élasticité et de la chaleur déterminent-elles leurs tensions? Tels sont les

---

M. le général Menabrea a établi la concordance des formules contenues dans la première partie de ce Mémoire avec celles qu'on déduirait d'un principe que, dans son beau Mémoire de 1864, il a appelé le *principe d'élasticité* et qui a été repris et développé sous le nom de *principe du moindre travail* par M. l'ingénieur Castigliano, d'abord, dans une thèse publiée dans les *Actes de l'Académie de Turin* en 1874 et, plus tard, dans un Ouvrage didactique.

problèmes qui font l'objet de cette Note complémentaire, qui a plutôt un intérêt scientifique que d'application. Il en ressort cependant un précepte pratique : c'est que, dans les formes géométriques à donner aux systèmes articulés, il faut se tenir très éloigné de celles qui présentent les caractères exceptionnels dont il s'agit; autrement, on arrive à faire supporter aux pièces des tensions immenses ([1]).

En terminant cette Préface, nous tenons à remercier M. Gauthier-Villars du soin, nous dirions volontiers du luxe apporté à la confection matérielle de cet Ouvrage, dont plusieurs planches, parmi celles du second Volume surtout, présentaient de sérieuses difficultés.

([1]) Les deux exemples de systèmes non librement dilatables, quoique ne contenant pas de lignes surabondantes, donnés par M. Crofton, sont des figures à six sommets. M. Crofton dit qu'il n'en a pas trouvé à huit. Nous donnons des exemples à un nombre quelconque de sommets, l'un notamment à $2n$ sommets, extension de l'hexagone de Crofton; il est formé 1° d'un polygone à $2n$ côtés dont les côtés opposés ont leurs n points d'intersection en ligne droite, et d'ailleurs quelconque; 2° des n diagonales joignant les sommets opposés.

Si $n > 3$ ou $2n < 6$, le système n'est même pas défini de forme : il peut librement jouer dans ses articulations et, *malgré cela,* ses côtés ne peuvent pas recevoir des dilatations indépendantes.

ADDITION A LA PRÉFACE.

Les applications de la Statique graphique aux problèmes pratiques de la Résistance des matériaux ayant exigé plus de développements que nous l'avions supposé d'abord, nous avons pensé qu'il serait plus commode, pour les ingénieurs, de les diviser en trois Parties, traitant chacune d'un sujet bien déterminé et susceptibles d'être vendues séparément.

La suite de cet Ouvrage sera donc divisée ainsi :

IIe Partie. — *Flexion plane. Lignes d'influence. Poutres droites.*

IIIe Partie. — *Arcs et coupoles métalliques. Ponts suspendus rigides.*

IVe Partie. — *Ouvrages en maçonnerie. Systèmes réticulaires* (1).

---

(1) Nous saisissons, avec plaisir, cette occasion de mentionner les Ouvrages ou Mémoires suivants, parvenus à notre connaissance depuis la rédaction de la Préface qui précède :

1° Un très beau travail de M. le professeur Thomas Alexander sur le problème du passage d'un convoi sur une poutre à deux appuis simples, publié dans les numéros des 10 et 25 janvier 1879 de l'*Engineering* et dans son excellent Ouvrage *Elementary applied Mechanics,* publié en commun avec M. le professeur A. Watson Thomson;

2° Un Mémoire important, sur le même sujet, de M. le capitaine du Génie G. Leman, professeur à l'École Militaire de Bruxelles, paru dans les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* 3e série, t. IX, n° 6, 1885;

3° Une Note de M. d'Ocagne sur la représentation des pressions intérieures dans les systèmes plans, insérée au *Bulletin de la Société Mathématique de France* pour l'année 1884, généralisant le travail que nous avons cité de cet auteur dans la Note IV.

Mai 1886.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE.

PREMIÈRE SECTION.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES RELATIVES AU CALCUL GRAPHIQUE, A LA STATIQUE ET A L'ÉLASTICITÉ DES CORPS.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE XIV.

CHAPITRE XV.

CHAPITRE XVI.

CHAPITRE XVII.

CHAPITRE XVIII.

CHAPITRE XIX.

CHAPITRE XX.

CHAPITRE XXI.

NOTES.

NOTE I.

NOTE II.

NOTE III.

NOTE III *bis*.

NOTE IV.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

ERRATA.

Page 15, 3e ligne en remontant : *supprimez* l'*s* final du mot *Résistance*.

Page 25, 4e ligne du § 26, *au lieu de* Chacune d'elles, *lisez* L'une d'elles.

Dans le numérotage des pages, après la page 48, *au lieu de* 46, *lisez* 49.

Page 152, 20e ligne en remontant, *au lieu de* Mais supposons que les m longueurs, etc., *lisez* Mais supposons la figure telle, que les m longueurs a_1, a_2, a_3, ..., a_m puissent être choisies de manière à satisfaire aux m équations

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_3} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial a_m} = 0,$$

en même temps qu'à celle

$$f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) = 0.$$

Page 251, § 168. Au titre de ce §, *supprimez les mots :* **A UN BOUT.**

Page 368, entre la 13e et la 14e ligne en remontant, *intercalez le titre suivant :*

§ 231.

LIMITES SUPÉRIEURES DU MOMENT MAXIMUM DANS UNE SECTION DONNÉE ET DU MOMENT MAXIMUM MAXIMORUM.

Pages 429, 439, 444, dans les titres des chapitres, *au lieu de* XXII, XXIII, XXIV, *lisez respectivement*, XXIII, XXIV, XXV.

LA
STATIQUE GRAPHIQUE
ET SES
APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS.

PREMIÈRE SECTION.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES RELATIVES AU CALCUL GRAPHIQUE, A LA STATIQUE ORDINAIRE ET A L'ÉLASTICITÉ DES CORPS.

CHAPITRE I.

NOTIONS DE CALCUL GRAPHIQUE.

§ 1.

SENS D'UN POLYGONE. SENS D'UN CONTOUR FERMÉ. — On appelle *sens* d'un contour polygonal fermé un sens convenu dans lequel le contour serait parcouru par un mobile idéal. Le sens d'une portion quelconque du contour est le sens dans lequel elle est parcourue par le mobile; l'origine de cette portion du contour est le point où le mobile l'atteint; son extrémité, le point où le mobile la quitte.

D'après cela, quand on s'est donné le sens d'un seul côté appartenant à un contour polygonal fermé ou non, le sens de chacun des autres côtés se trouve par là même défini.

Par la ligne qui ferme un contour polygonal, nous entendrons toujours la ligne dirigée *dans le sens* du contour, c'est-à-dire que l'origine de cette ligne coïncide avec l'*extrémité* du contour et *vice versa*.

§ 2.

NOTATIONS. — Nous désignerons habituellement les côtés des contours polygonaux par les chiffres successifs 1, 2, 3, 4, ..., et nous conviendrons de disposer ces chiffres de façon que l'on obtienne le sens du contour en les suivant dans leur ordre croissant; l'origine d'un côté quelconque sera donc son intersection avec le côté désigné par le chiffre immédiatement inférieur; son extrémité sera son intersection avec le côté désigné par le chiffre immédiatement supérieur.

Le sommet formé par deux côtés consécutifs, désignés par les chiffres r et $r+1$, sera habituellement désigné par $r.r+1$.

La *fig.* 1 (*Pl. I*) comprend un contour formé par les cinq côtés 1, 2, 3, 4, 5. L'origine du contour est en a, son extrémité en b; la ligne qui ferme le contour est la ligne ba et non la ligne ab.

§ 3.

ADDITION GÉOMÉTRIQUE. — Soient donnés les grandeurs, directions et sens d'un certain nombre de lignes distribuées d'une manière quelconque dans un plan ou dans l'espace. A partir d'un point quelconque, portons ces lignes bout à bout de manière à former un contour polygonal. La droite qui va de l'*origine* de ce contour à son *extrémité* se nomme la *somme géométrique* ou simplement la *somme* des lignes données.

Le contour polygonal obtenu en portant les lignes bout à bout se nomme le *polygone de ces lignes*.

La somme géométrique d'un certain nombre de lignes est, d'après cela, égale en grandeur et direction, mais (§ 1) *opposée* en sens à la ligne qui ferme le polygone de ces lignes.

Nous désignerons habituellement les lignes données par les chiffres *gras*

$$\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \ldots,$$

et les côtés correspondants du polygone de ces lignes par les chiffres ordinaires similaires

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Ainsi la *fig.* 2 contient sept lignes ; le polygone de ces lignes est indiqué par les lignes pleines de la *fig.* 2. La ligne *ab* est la somme géométrique de ces lignes ; la ligne *ba* est celle qui ferme leur polygone.

Remarque. — On voit que le polygone des lignes fournit non seulement la somme géométrique de toutes les lignes données, mais aussi les sommes partielles de deux ou plusieurs de ces lignes, pourvu qu'elles soient consécutives. Ainsi *cd* est la somme géométrique des lignes 2, 3, 4 ; *ce*, celle des lignes 2, 3, 4, 5, et ainsi de suite.

§ 4.

Théorème. — *La somme géométrique d'un nombre quelconque de lignes est indépendante de l'ordre dans lequel on les additionne.*

Il est évident d'abord que l'on ne change pas la somme des lignes données si, dans l'addition, on intervertit l'ordre de deux lignes consécutives. Ainsi intervertissons (*fig.* 2, *Pl. I*) l'ordre de succession des lignes 4 et 5 ; cela reviendra à porter à la suite de 3 une ligne 5_1 égale et parallèle à 5, et au bout de celle-ci une ligne 4_1 égale et parallèle à 4. Le contour $5_1.4_1$ aboutira au point *e* aussi bien que le contour 4.5, en sorte que les lignes subséquentes 6 et 7 ne changeront pas de place, et la ligne qui va de l'origine à l'extrémité du contour $1.2.3.5_1.4_1.6.7$ est la même que celle qui va de l'origine à l'extrémité du contour 1.2.3.4.5.6.7, ce qui signifie, en convenant d'employer, pour les sommes géométriques, le signe de l'addition ordinaire, que les deux sommes géométriques

$$1+2+3+5+4+6+7 \quad \text{et} \quad 1+2+3+4+5+6+7$$

sont les mêmes.

Du moment que l'on peut, sans altérer la somme de lignes données, permuter une ligne avec celle qui la précède ou qui la suit, on pourra, par une nouvelle permutation, la faire avancer ou re-

culer de deux rangs; par une autre permutation, de trois rangs et ainsi de suite, de sorte que l'on pourra, sans changer la somme, amener une ligne quelconque à occuper un rang quelconque.

Remarque I. — On peut encore énoncer ainsi la proposition qui précède :

Si un polygone dont les côtés sont donnés en grandeur, direction et sens, se ferme lorsque ses côtés se succèdent dans un certain ordre, il se fermera également quel que soit l'ordre de leur succession.

Remarque II. — La somme géométrique de deux lignes issues d'un même point est égale en grandeur, direction et sens à la diagonale du parallélogramme qu'elles déterminent, issue de ce point.

§ 5.

THÉORÈME. — *La somme géométrique d'un nombre quelconque de lignes n'est pas altérée si, dans l'addition, on remplace certains groupes de ces lignes par leurs sommes géométriques partielles.*

Cela est évident si les lignes que l'on remplace par leurs sommes partielles sont consécutives. Ainsi l'on a (*fig.* 2, *Pl. I*)

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 1 + cd + 5 + 6 + 7 = 1 + ce + 6 + 7,$$

et ainsi de suite, et, comme on peut (§ 4) amener des lignes quelconques à être consécutives, le théorème se trouve vrai pour des lignes quelconques.

§ 6.

Cas particulier des lignes parallèles. — Lorsque les lignes à additionner sont parallèles, leur polygone se réduit à une droite et leur somme géométrique se confond avec leur somme arithmétique si elles sont toutes dirigées dans le même sens, avec leur somme algébrique si elles sont les unes d'un sens et les autres de sens contraire, pourvu que l'on convienne, suivant l'usage, d'attribuer des signes contraires aux premières et aux dernières. Les *fig.* 4

et 4, *Pl. I,* donnent la somme géométrique de cinq lignes 1, 2, 3, 4, 5, dont le polygone se réduit à une droite ayant son origine en *a* et son extrémité en *b*, de sorte que *ab* est la somme des lignes données. Pour plus de clarté, on a mis une double ligne, ce qui permet de mieux distinguer, dans les lignes qui se superposent, celles qui sont dirigées dans un sens et celles qui sont en sens opposé. Il n'y a aucune ambiguïté sur le sens à attribuer à chaque ligne, si l'on se rappelle (§ 1) que le sens du polygone des lignes (polygone réduit ici à une droite) se trouve en suivant les lignes dans l'ordre croissant des chiffres qui les représentent. Ainsi, partant de l'origine *a*, on voit que la ligne 1 va de droite à gauche; puis vient 2, qui va de gauche à droite; puis 3, qui va de droite à gauche; puis 4, qui va dans le même sens; et enfin 5, qui vient de gauche à droite aboutir à l'extrémité *b* du polygone, en sorte que *ab* est la somme géométrique des lignes données et *ba* la droite qui ferme leur polygone.

§ 7.

Théorème. — *La projection, sur un plan, de la somme géométrique d'un certain nombre de lignes est égale à la somme géométrique de leurs projections sur ce plan.*

La projection, sur une droite, de la somme géométrique d'un certain nombre de lignes est égale à la somme algébrique *de leurs projections sur cette ligne.*

On appelle *projection* sur un plan ou sur une droite d'une ligne donnée en grandeur, direction et sens, une autre ligne dont l'origine est la projection de l'origine de la ligne donnée et l'extrémité, la projection de l'extrémité de la ligne donnée. Il résulte de là que le sens de la ligne projetée découle immédiatement du sens de la ligne que l'on projette, par suite aussi le signe à attribuer à la grandeur de la projection lorsqu'il s'agit de la projection sur un axe, dès qu'on a choisi conventionnellement le sens positif des droites dirigées suivant cet axe.

D'après cela, le théorème énoncé est évident. Si l'on projette le polygone plan ou gauche (*fig.* 2, *Pl. I*) sur un plan ou sur une droite, la ligne *ab*, égale et opposée à celle qui ferme le polygone de l'espace, se projette suivant une ligne égale et opposée à celle

qui ferme le polygone projeté, lequel, dans le cas de la projection sur un axe, est tout entier dirigé suivant l'axe.

COROLLAIRE. — *La somme géométrique des projections d'un polygone fermé sur un plan ou sur une droite est nulle.*

§ 8.

Tout ce qui précède est vrai, que les lignes données soient ou non toutes situées dans un plan; mais ce n'est que quand elles sont dans un plan que leur addition géométrique pourra s'effectuer graphiquement. S'il s'agit de lignes qui ne sont pas situées dans un même plan, on devra se les donner, comme c'est l'usage en Géométrie descriptive, en projection sur deux plans; et, d'après le dernier théorème, il suffira d'additionner les lignes sur chacun des deux plans de projection pour avoir les deux projections de leur somme géométrique et, par suite, le moyen de déterminer graphiquement cette somme elle-même.

§ 9.

SOUSTRACTION GÉOMÉTRIQUE. — *Soustraire géométriquement une ligne b d'une ligne a, c'est additionner cette dernière à la première changée de sens.*

Soient, par exemple, les deux lignes 1 et 2 (*fig.* 3, *Pl. I*), ayant leurs grandeurs représentées par 1 et 2 (*fig.* 3).

Leur différence est $cd = (-2) + 1$, tandis que leur somme serait ab, $abcd$ étant un parallélogramme.

§ 10.

MULTIPLICATION DE LIGNES. — Soit à déterminer le produit de n lignes

$$l_1, \quad l_2, \quad l_3, \quad l_4, \quad \ldots, \quad l_n.$$

Pour le trouver graphiquement, sur une ligne OX (*fig.* 5, *Pl. II*), portons une longueur arbitraire $O1 = d$; puis, sur une perpendiculaire à OX élevée en 1, portons les longueurs $1\,l_1 = l_1$, $1\,l_2 = l_2$,

$1\,l_3 = l_3$, $1\,l_4 = l_4$, et ainsi de suite. Joignons les points l_1, l_2, l_3, l_4, ... au point O, de façon à former les lignes indéfinies OL_1, OL_2, OL_3, OL_4, ...

Cela fait, posons

$$y_1 = l_1.$$

Prenons $O2 = y_1$. Au point 2 élevons une perpendiculaire à OX jusqu'à sa rencontre avec OL_2 en 2'. Soit y_2 la longueur 22'; portons-la sur OX à partir de O, et par son extrémité 3 élevons une perpendiculaire à OX jusqu'à sa rencontre avec OL_3 en 3'.

Soit y_3 la longueur 33'. Opérons sur elle comme sur 22', c'est-à-dire portons-la sur OX à partir de O, et par son extrémité 4 élevons une perpendiculaire à OX jusqu'à sa rencontre avec OL_4 en 4'.

Soit y_4 la longueur 44'. En opérant sur elle de la même manière que sur les lignes y_2 et y_3, nous aurons la longueur 55' que nous appellerons y_5, et, en poursuivant ainsi, on formera la série des n lignes

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4,\quad y_5,\quad \ldots,\quad y_n,$$

dont la première est égale à l_1. Je dis que la dernière est le produit cherché et qu'on a généralement

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = l_1, \\ y_2 = \dfrac{l_1 \times l_2}{d}, \\ y_3 = \dfrac{l_1 \times l_2 \times l_3}{d^2}, \\ y_4 = \dfrac{l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4}{d^3}, \\ \vdots \\ y_n = \dfrac{l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4 \times \ldots \times l_n}{d^{n-1}}. \end{cases}$$

En effet, les triangles semblables $O1\,l_2$ et $O22'$ donnent

$$\frac{22'}{1\,l_2} = \frac{O2}{O1} \quad \text{ou} \quad \frac{y_2}{l_2} = \frac{y_1}{d} = \frac{l_1}{d} \quad \text{ou} \quad y_2 = \frac{l_1 \times l_2}{d}.$$

On verrait de même que

$$y_3 = \frac{y_2 \times l_3}{d} = \frac{l_1 \times l_2 \times l_3}{d^2},$$

$$y_4 = \frac{y_3 \times l_4}{d} = \frac{l_1 \times l_2 \times l_3 \times l_4}{d^3},$$

et ainsi de suite.

Si donc on a pris la longueur $O1 = d$ égale à l'unité de longueur, y_n représentera le produit des n longueurs données.

§ 11.

ÉLÉVATION AUX PUISSANCES D'UNE LIGNE. — Soit à trouver la puissance $n^{ième}$ d'une ligne donnée l. Pour cela, d'un point O (*fig.* 6, *Pl. II*) menons deux lignes indéfinies perpendiculaires entre elles XX' et YY'. Sur l'une d'elles XX', portons $Ox_0 = d$, d étant une longueur arbitraire; sur l'autre, $Ox_1 = l$. En x_1 élevons une perpendiculaire à x_0x_1 jusqu'à sa rencontre avec XX' en x_2; par ce point, une perpendiculaire à x_1x_2 jusqu'à sa rencontre avec YY' en x_3; par ce point, une perpendiculaire à x_2x_3 jusqu'à sa rencontre en x_4 avec XX', et ainsi de suite. On aura, d'après une propriété connue du triangle rectangle,

$$Ox_0 \times Ox_2 = l^2 \quad \text{ou} \quad Ox_2 = \frac{l^2}{d},$$

$$l \times Ox_3 = \overline{Ox_2}^2 = l^4 \quad \text{ou} \quad Ox_3 = \frac{l^3}{d_4}.$$

On aura de même

$$Ox_4 = \frac{l^4}{d^3},$$

et ainsi de suite. Si l'on prend $d = 1$, on a ainsi les puissances de l.

Remarque. — Ici l'on voit que la longueur donnée $l = Ox_1$ est supposée plus petite que l'unité Ox_0; il en résulte que les puissances successives de l, représentées par les longueurs Ox_2, Ox_3, Ox_4, ..., sont de plus en plus petites. Le contraire se produirait si l était supérieur à l'unité. Dans ce cas, la figure pourrait prendre des dimensions trop grandes et peu commodes. Pour éviter cet inconvénient, il faudrait alors construire, par le procédé qui sera indiqué au § 12, la ligne a représentant l'inverse $\frac{1}{l}$ de la ligne donnée, et chercher la $n^{ième}$ puissance de la ligne a, laquelle est plus petite que l'unité; et, comme $a^n = \left(\frac{1}{l}\right)^n = \frac{1}{l^n}$, il suffira ensuite de construire une ligne c égale à l'inverse de celle représentant a^n pour avoir l^n.

§ 12.

DIVISION DE DEUX LIGNES. — Soit (*fig.* 7, *Pl. II*) à trouver le quotient $\frac{a}{b}$ de deux lignes a et b. Sur une ligne OX, on portera $O1 = 1$ et $Ob = b$. Sur la perpendiculaire à OX, élevée en b, on portera $ba = a$ et l'on joindra le point O au point a, de façon à former la ligne indéfinie OL. Si ensuite du point 1 on élève $1y = y$ perpendiculaire à OX jusqu'à la rencontre de la ligne OL, on aura évidemment

$$\frac{y}{1} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad y = \frac{a}{b}.$$

Remarque. — Si l'on prenait $O1 = d$, la relation précédente serait remplacée par celle-ci :

$$\frac{y}{d} = \frac{a}{b},$$

c'est-à-dire que la fraction proposée se trouverait réduite à une autre fraction ayant un dénominateur donné d.

§ 13.

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS. — Toute fraction pouvant, d'après le procédé que nous venons d'indiquer, être représentée par une ligne, tout ce que nous avons dit sur les opérations relatives aux lignes est immédiatement applicable aux fractions.

Addition et soustraction. — On ramène toutes les fractions à avoir un dénominateur donné d (§ 12). La somme ou la différence des lignes représentant les numérateurs sera égale à la somme ou à la différence des fractions données, si le dénominateur commun a été pris égal à l'unité. Parfois il est commode de prendre pour d un nombre déterminé et entier d'unités. Dans ce cas, on devra diviser la ligne représentant la somme ou la différence des numérateurs des fractions réduites en autant de parties égales que d contient d'unités, pour avoir la somme ou la différence des fractions données.

D'autres fois, il peut être plus commode, au point de vue gra-

phique, de prendre d égal à une partie $\frac{1}{i}$ de l'unité, i étant un nombre entier. Dans ce cas, la ligne représentant la somme ou la différence des fractions données sera égale à i fois celle qui représente la somme ou la différence des numérateurs des fractions réduites.

Multiplication et division. — On peut faire la multiplication graphique des fractions aussi facilement que celle des lignes.

Soient $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \cdots$ les fractions données. Sur une ligne OX (*fig.* 5, *Pl. II*) on porte, à partir du point O, des longueurs égales à leurs dénominateurs b_1, b_2, b_3 ; à l'extrémité de chacune de ces longueurs, on élèvera une perpendiculaire à OX égale au numérateur de la fraction correspondante. On joindra les extrémités de ces perpendiculaires au point O, de façon à déterminer les lignes OL_1, OL_2, OL_3, ... On portera ensuite sur OX une longueur $O1 = d$; on élèvera la perpendiculaire $1\,l_1 = y_1$ jusqu'à la rencontre de la ligne OL_1 ; on portera cette longueur y_1 sur OX, à partir de O, de façon à obtenir la ligne O2; on élèvera en 2 une perpendiculaire à OX jusqu'à sa rencontre avec OL_2, ce qui donnera $22' = y_2$; on continuera de la sorte et l'on formera, comme au § 10, des lignes

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots, y^n,$$

et l'on aura

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1\,l_1}{O1} = \frac{y_1}{d},$$
$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{22'}{O2} = \frac{y_2}{y_1},$$
$$\frac{a_3}{b_3} = \frac{33'}{O3} = \frac{y_3}{y_2},$$

et ainsi de suite. En multipliant membre à membre les deux premières équations, ou les trois premières, etc., on trouvera

$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{d},$$
$$\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3} = \frac{y_3}{d},$$

et ainsi de suite. Si l'on a choisi la longueur d égale à l'unité de longueur, les longueurs y_2, y_3, ... représentent les produits successifs des fractions données.

Le quotient de deux fractions étant le produit de la fraction dividende par la fraction diviseur renversée, la division des fractions se ramène immédiatement à leur multiplication.

Élévation aux puissances d'une fraction. — On a très souvent à élever des fractions aux puissances ou à construire des équations de la forme

$$\text{(A)} \qquad \frac{y}{d} = \frac{a^n}{b^n},$$

où a, b, d sont des lignes données et y une ligne à déterminer; pour cela, on devra commencer par construire la fraction $\frac{a^n}{b^n}$. A cet effet, on tracera (*fig.* 6 *bis*, *Pl. II*) deux lignes OX, OY se coupant sous un angle quelconque. Du point O, on décrira un arc de cercle aa' de rayon a et un arc de cercle bb' de rayon b. On mènera les antiparallèles ab' et ba', puis on prendra sur l'une des deux lignes tracées, sur OY par exemple, une longueur arbitraire O1; on mènera les lignes $11'$, $1'2$, $22'$, $2'3$, ... alternativement parallèles à ba' et ab'. On aura

$$\frac{O1'}{O1} = \frac{Oa'}{Ob} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{O2}{O1'} = \frac{Oa}{Ob'} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{O2'}{O2} = \frac{Oa'}{Ob} = \frac{a}{b},$$

et ainsi de suite.

Si l'on multiplie membre à membre, les membres extrêmes des deux premières de ces relations, le terme $O1'$ disparaîtra, et il viendra

$$\frac{O2}{O1} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Si l'on multiplie les trois premières, les facteurs $O1'$ et $O2$ disparaîtront, et il viendra

$$\frac{O2'}{O1} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3},$$

et ainsi de suite.

On aura donc construit ainsi une fraction ayant un dénominateur donné O1 et représentant une puissance quelconque de la fraction $\frac{a}{b}$.

Si O1 est l'unité de longueur, on aura représenté

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

par une ligne.

Si O1 est le dénominateur du premier membre de l'équation ci-dessus (A), le numérateur O2 ou O2', ... sera la ligne y, représentant l'inconnue de cette équation.

§ 14.

EXTRACTION DES RACINES. EMPLOI DES COURBES LOGARITHMIQUES. — L'extraction de la racine carrée d'une ligne l est une opération connue. L'un des moyens usités consiste à porter (*fig.* 8, *Pl. II*) sur une ligne XX', d'une part $Ox_0 = 1$, d'autre part $Ox_1 = l$; à construire une demi-circonférence sur x_0x_1 comme diamètre : la perpendiculaire élevée en O sur x_0x_1, jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence, est la racine carrée cherchée.

Mais, dès qu'il s'agit d'extraire une racine d'ordre plus élevé, on sait que la règle et le compas ne suffisent plus; on peut alors employer graphiquement les logarithmes.

Il faut, pour cela, construire une courbe qui tienne lieu des Tables de logarithmes.

Supposons que, sur une ligne OX (*fig.* 9, *Pl. II*), on porte des longueurs Ox_1, Ox_2, Ox_3, ..., que nous appellerons des *abscisses*, ces longueurs représentant, à une échelle quelconque, des nombres très rapprochés; qu'aux points x_0, x_1, x_2, ... on élève des perpendiculaires que nous appellerons des *ordonnées*, représentant à la même échelle les logarithmes de ces nombres; qu'on joigne les extrémités y_1, y_2, y_3, ... de ces perpendiculaires par une ligne continue. Cette ligne tiendra lieu d'une Table de logarithmes.

Pour faire le produit de n lignes x_1, x_2, x_3, ..., il suffira de les porter sur OX à partir de O, de faire la somme des ordonnées correspondantes y_1, y_2, y_3, ... et de chercher quelle est la longueur d'abscisse OX qui correspond à l'ordonnée

$$u = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots.$$

Cette opération sera infiniment plus rapide que la recherche

correspondante dans une Table de logarithmes, surtout si l'on a eu soin de tracer la courbe CE sur du *papier quadrillé* [1].

Si l'on a à élever x_1 à une puissance $n^{\text{ième}}$, il suffira de porter sur OX une longueur égale à x_1, de prendre l'ordonnée correspondante y_1 et de chercher l'abscisse OX répondant à une ordonnée égale à n fois y_1.

Veut-on, au contraire, extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de x_1, ce sera l'abscisse répondant à une ordonnée égale à $\frac{y_1}{n}$ qu'il faudra chercher.

§ 15.

OPÉRATIONS SUR LES SURFACES — Pour effectuer, sur les surfaces, les opérations qui précèdent, il faut pouvoir aussi les représenter par des lignes. Nous indiquerons sommairement les procédés très élémentaires qui donnent ce résultat.

1° Triangle. — Soit (*fig.* 10, *Pl. II*) ABC un triangle. On peut toujours construire un triangle équivalent et ayant une base donnée BK. Il suffit pour cela, par le point C, de mener une parallèle à KA. Si A′ est le point où cette ligne rencontre AB, il est facile de voir que les deux triangles ABC et BA′K sont équivalents ; car, si de l'un et de l'autre on retranche l'aire commune BCA′, il reste les deux triangles A′CK et A′CA équivalents comme ayant même base A′C et leurs sommets placés sur une parallèle à cette base.

Le triangle BA′K ayant une base BK choisie arbitrairement, si l'on a pris cette base égale à deux unités, la hauteur h de ce triangle représentera son aire, et par suite l'aire du triangle donné ABC.

2° Parallélogramme. — Se déduit immédiatement du triangle.

3° Quadrilatère quelconque. — Soit (*fig.* 11, *Pl. II*) ABCD un

---

[1] On se sert plus habituellement, non de la courbe exponentielle CE, mais de ce qu'on appelle la *spirale logarithmique*. Il nous semble que la spirale doit être d'un usage infiniment moins commode en ce qu'elle oblige à des additions, multiplications et divisions, d'une part, d'angles et, d'autre part, de lignes divergentes, pour lesquelles on ne peut pas mettre à profit le papier quadrillé, lequel les donne en quelque sorte toutes faites.

quadrilatère. Menons la diagonale BD et par le point C une parallèle CC_1 à cette diagonale jusqu'à sa rencontre en C_1 avec le côté AB ou son prolongement.

Le triangle AC_1D est équivalent au quadrilatère donné ; car, si de chacune de ces deux surfaces on retranche l'aire ADB qui leur est commune, il reste les deux triangles CDB et C_1DB, qui sont équivalents comme ayant même base DB et leurs sommets placés sur une parallèle à cette base ; et, comme nous savons représenter un triangle par une ligne, nous saurons résoudre la même question pour un quadrilatère.

4° Polygone quelconque. — Le même procédé permet de ramener un polygone quelconque à un triangle équivalent, et par suite de le représenter par une ligne.

Soit le polygone ABDEFG (*fig.* 12, *Pl. II*) :

1° On éliminera le sommet G en menant FF_1 parallèle à la diagonale EG et substituant le sommet F_1 à F.

2° On éliminera le sommet F_1 en menant EE_1 parallèle à DF_1 et substituant le sommet E_1 à E.

3° On éliminera le sommet E_1 en menant DD_1 parallèle à BE_1 et substituant le sommet D_1 à D.

Le triangle ABD_1 sera équivalent au polygone de six côtés donné ; et, comme on peut ensuite représenter l'aire de ce triangle par une droite, le problème se trouve résolu pour un polygone quelconque.

§ 16.

Si l'on avait à trouver l'aire d'une courbe fermée plus ou moins irrégulière, on substituerait, à la courbe, un polygone inscrit d'un grand nombre de côtés et l'aire de ce polygone pourrait être approximativement prise pour l'aire cherchée.

§ 17.

INSTRUMENTS DE CALCUL. — On trouvera, dans la Note II, la théorie du planimètre polaire d'Amsler qui permet de déterminer mécaniquement les aires planes, la théorie des intégrateurs d'Amsler qui

permettent de trouver les centre de gravité et moments de divers ordres des surfaces planes. Ces instruments sont extrêmement ingénieux ; le premier rend, depuis longtemps, d'immenses services dans les bureaux des ingénieurs; le second, moins connu, a été, dans ces dernières années, porté, par son auteur, au même degré de perfection que le premier et permet de supprimer ou d'abréger bien des calculs soit de Résistances des matériaux soit de terrassements.

La Note II indique aussi la disposition que M. Marcel Deprez a proposé de donner à cet appareil.

CHAPITRE II.

RÉSUMÉ DE QUELQUES NOTIONS RELATIVES A LA STATIQUE ORDINAIRE ET A L'ÉLASTICITÉ DES CORPS.

§ 18.

FORCES EN ÉQUILIBRE; FORCES SUPPRIMABLES. — Nous dirons que des forces agissant sur un *corps quelconque* sont en *équilibre* lorsque, le corps soumis à leur action, étant en repos à un certain instant, demeure en repos tant que dure cette action.

Nous dirons que des forces agissant sur un corps quelconque sont *supprimables* lorsque, le corps soumis à leur action étant en repos, demeure en repos non seulement tant que dure cette action, *mais même quand elle a cessé.*

En d'autres termes, les forces supprimables sont telles qu'on puisse les supprimer ou les adjoindre à d'autres forces agissant sur un corps supposé en repos, sans qu'il quitte le repos.

Des forces supprimables sont évidemment en équilibre; mais l'inverse n'est pas généralement vrai.

Supposons un corps très élastique (comme du caoutchouc) en équilibre, c'est-à-dire en repos sous l'action de certaines forces. Si l'on vient à supprimer ces forces, le corps qui s'était déformé sous leur influence *se mettra en mouvement* pour revenir vers sa forme naturelle (celle qu'il avait avant leur action), forme qu'il atteindra plus ou moins complètement, suivant la grandeur et la durée des actions qui la lui ont fait perdre.

§ 19.

SYSTÈMES INVARIABLES. CAS OU IL Y A IDENTITÉ ENTRE DES FORCES EN ÉQUILIBRE ET DES FORCES SUPPRIMABLES. — Ce qui est vrai pour le caoutchouc est vrai, quoique à un degré moindre, pour tous les

corps solides naturels sans exception. Toutefois la différence entre la forme naturelle et la forme nouvelle que prend un tel corps sous l'action de forces en équilibre est d'autant moins appréciable qu'il est plus dur.

On nomme *systèmes* ou *solides invariables* des systèmes de points matériels tellement reliés entre eux, que leurs distances mutuelles restent rigoureusement invariables, quelque grandes que soient les forces qui tendent à les modifier.

Si un pareil corps est en repos sous l'action de certaines forces, on admet qu'il ne quitte pas le repos quand on vient à supprimer ces forces. Ainsi, quand des forces agissent sur des systèmes invariables, il n'y a pas de distinction à établir entre des forces en équilibre et des forces supprimables.

Un atome d'un corps naturel est regardé comme un systéme invariable de dimensions très petites. Donc, quand des forces agissent toutes en un même point d'un corps naturel, quel qu'il soit, il n'y a pas non plus de différence entre des forces en équilibre et des forces supprimables.

Mais, hormis ces deux cas :

1° Forces agissant toutes en un point d'un corps quelconque;

2° Forces agissant en divers points d'un système invariable, il ne peut pas exister de *forces supprimables*.

Des forces agissant en divers points d'un corps naturel *ne peuvent jamais être supprimées ou établies* sans que le corps prenne un mouvement plus ou moins marqué, même quand il est solide, à plus forte raison lorsqu'il est fluide.

§ 20.

DE L'ÉQUIVALENCE DES FORCES AGISSANT SUR DES CORPS QUELCONQUES. — Nous dirons que deux systèmes de forces agissant sur un *corps quelconque* sont équivalents lorsqu'ils peuvent se remplacer sur le corps supposé en repos, sans qu'il quitte le repos.

Composer des forces agissant sur un corps quelconque, c'est les remplacer par des forces équivalentes et en moindre nombre.

Décomposer de telles forces, c'est les remplacer par des forces équivalentes et en plus grand nombre.

S'il existe une force unique équivalente à des forces données,

elle prend le nom de *résultante* de ces forces. Celles-ci prennent relativement à la résultante le nom de *composantes*.

THÉORÈME. — *Pour que deux systèmes de forces agissant sur un corps quelconque soient équivalents, il faut et il suffit que les forces de l'un d'eux forment, avec les forces de l'autre* changées de sens, *un système* supprimable.

Appelons F les forces de l'un des deux systèmes considérés; F′ celles de l'autre système et — F′ ces dernières changées de sens. Je dis que, pour que les forces F et F′ soient équivalentes, il faut et il suffit que celles F et — F′ forment un système supprimable.

La condition est nécessaire : en effet, supposons les forces F et F′ équivalentes. Nous pouvons appliquer au corps, quel qu'il soit, les forces F′ et leurs opposées — F′ sans qu'il quitte le repos, parce que deux forces telles que F′ et — F′ égales entre elles, de sens opposés et appliquées *en un même point* d'un corps quelconque, forment un système supprimable. D'autre part, en vertu de la définition de l'équivalence, nous pouvons remplacer les forces F′ par leurs équivalentes F. Nous aurons donc ajouté les forces F et — F′ sans troubler le repos du corps.

On peut de même les supprimer si elles existent; car nous pouvons remplacer les forces F par leurs équivalentes F′, puis supprimer les forces F′ et — F′ deux à deux égales, appliquées aux mêmes points et de sens opposés.

La condition est aussi suffisante, c'est-à-dire que, si elle est remplie, on pourra passer des forces F à celles F′, et *vice versa*.

En effet, supposons un corps en repos sous l'influence de forces quelconques parmi lesquelles se trouvent les forces F. Nous pouvons y adjoindre les forces deux à deux égales, opposées et appliquées aux mêmes points F′ et — F′, puis supprimer les forces F et — F′, puisque nous admettons cette fois qu'elles sont supprimables; il ne restera donc que les forces F′ à la place de celles F sans que le corps ait quitté le repos.

On pourrait de même passer des forces F′ à celles F.

§ 21.

DE L'ÉQUIVALENCE DES FORCES AGISSANT TOUTES EN UN MÊME POINT D'UN CORPS QUELCONQUE OU AGISSANT SUR UN SYSTÈME INVARIABLE. — Nous avons vu (§ 19) que, lorsque des forces agissent toutes en un même point d'un corps quelconque ou lorsqu'elles agissent en divers points d'un système invariable, il n'y a pas de distinction à faire entre les forces en équilibre et les forces supprimables, de sorte que le théorème du paragraphe précédent peut alors s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Pour que deux systèmes de forces agissant toutes en un même point d'un corps naturel ou des forces agissant d'une manière quelconque sur un système invariable soient équivalents, il faut et il suffit que l'un d'eux soit équilibré par les forces de l'autre changées de sens.*

Remarque I. — Ainsi, étant données des forces F agissant toutes en un même point d'un corps quelconque ou en divers points d'un système invariable, trouver des forces F′ qui leur soient équivalentes ou trouver des forces — F′ qui les maintiennent en équilibre, c'est un même problème.

Remarque II. — En particulier, pour trouver les conditions pour que des forces F appliquées en un même point d'un corps quelconque ou en divers points d'un système invariable admettent une résultante R, il suffit de chercher les conditions pour qu'il existe une force unique — R capable de les équilibrer.

Remarque III. — Lorsque des forces agissant toutes en un même point d'un corps quelconque ou en divers points d'un système invariable sont en équilibre, toutes ces forces, moins l'une quelconque d'entre elles, admettent une résultante égale et opposée à cette dernière.

Plus généralement, si l'on divise des forces en équilibre sur un système invariable ou en un point d'un corps quelconque en deux groupes, chaque groupe est équivalent aux forces de l'autre changées de sens.

§ 22.

RAPPEL DE QUELQUES PRINCIPES DE STATIQUE. — Nous emprunterons à la Statique les trois principes suivants :

Règle du parallélogramme des forces. — 1° Deux forces appliquées en un même point d'un corps quelconque admettent une résultante égale à la diagonale du parallélogramme qu'elles déterminent, par conséquent égale à leur *somme géométrique* (§ 4, *Rem. II*).

2° Pour que deux forces appliquées en deux points d'un système invariable soient en équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient égales, dirigées l'une et l'autre suivant la droite qui joint leurs points d'application et de sens contraires.

De là résulte que deux forces F et F′ appliquées respectivement en deux points A et B d'un système invariable, dirigées l'une et l'autre suivant la droite AB, égales et de même sens, sont équivalentes (§ 21).

C'est ce qu'on exprime en disant qu'on peut porter le point d'application d'une force agissant sur un système invariable en un point quelconque de sa direction.

Principe de la réaction égale et contraire à l'action. — 3° Si deux corps A et B, soumis à des forces quelconques, sont assujettis à demeurer en contact par un point, chacun d'eux exerce une certaine action sur l'autre et, de son côté, en éprouve une de la part de celui-ci. Ces deux actions sont égales entre elles, dirigées suivant la même ligne et de sens contraires. L'une d'entre elles se nomme l'*action* et alors l'autre prend le nom de *réaction*.

On ne change pas l'état de l'un des corps, par exemple du corps A, en enlevant le corps B, pourvu qu'aux forces qui agissent sur le corps A on en adjoigne une exactement égale à l'action qu'il éprouvait de la part de B.

Si les deux corps sont en contact par plusieurs points, ce que nous venons de dire s'applique à chaque point séparément.

Si les deux corps sont en contact par une surface ou une ligne continue, cela est vrai pour chaque élément de la surface ou de la ligne de contact, et, pour pouvoir enlever le corps B sans changer l'état de A, il faut, en chaque élément de cette surface ou de cette

ligne, appliquer au corps A une force égale à la pression que le corps B exerçait sur lui en cet élément.

§ 23.

FORCES ÉLASTIQUES. — Considérons à présent un corps unique soumis à des forces quelconques et une surface idéale S de forme quelconque, traversant ce corps et le divisant en deux parties A et B. On pourra, si on le juge commode, étudier ces deux parties comme si c'étaient deux corps distincts assujettis à demeurer en contact tout le long de la surface S, enlever, par exemple, la partie B sans que l'état de A se trouve modifié, pourvu qu'en *tous* ses points l'on applique des forces égales aux actions que ces points éprouvaient de la part de B.

Observons à présent que, si l'on coupait effectivement le corps en deux suivant la surface S, toute action cesserait entre les deux parties, malgré leur contact; on en conclut que leurs actions mutuelles ne s'étendent qu'à une distance insensible de cette surface et l'on peut, par suite, admettre que les points d'application de ces actions sont sur la surface S elle-même. Ces actions se nomment des *forces élastiques* et, suivant les cas, des *tensions* ou des *pressions* élastiques.

On peut de même concevoir enlevée la partie A, à la condition d'appliquer, aux divers points de la partie B contigus à la surface S, des forces élastiques égales et contraires aux précédentes.

Traçons autour d'un point M de la surface S, sur la partie A par exemple, une petite courbe fermée dont l'aire soit ΔS. Transportons toutes les forces exercées par B sur A et appliquées aux divers points de cette aire parallèlement à elles-mêmes, au point M et concevons qu'on prenne la résultante t de ces forces. Le rapport $\frac{t}{\Delta S}$ se nomme la force élastique *moyenne* exercée suivant ΔS par la partie B du corps considéré, sur la partie A, ou encore la force élastique rapportée à l'unité de surface. Le rapport $\frac{t}{\Delta S}$ est ainsi défini en grandeur, direction et sens pour chaque petite portion donnée de surface ΔS. La limite vers laquelle il tend lorsque l'aire ΔS décroît indéfiniment en renfermant toujours le point M se

nomme *la force élastique en ce point* M *rapportée à l'unité de surface;* ou encore, suivant les cas, *la tension ou pression rapportée à l'unité de surface* exercée *au point* M *par* B *sur* A.

La tension ou pression exercée en ce point par A sur B serait une force égale et contraire à la précédente. Si la force exercée par l'une des parties sur l'autre, par exemple par B sur A, est dirigée vers l'intérieur de A, c'est une *pression;* dans le cas contraire, c'est une *tension.*

Nous regarderons généralement les tensions comme positives et les pressions comme négatives et nous parlerons alors des forces élastiques comme si c'étaient toujours des tensions, sauf à nous rappeler que ce sont des pressions si elles ont une valeur négative. Il en sera toutefois autrement dans les problèmes où nous saurons d'avance que les forces élastiques sont, en totalité ou en majeure partie, des pressions.

Si τ est la tension positive ou négative au point M, c'est-à-dire le rapport $\frac{t}{dS}$ de la force t exercée sur un élément de surface infiniment petit dS à l'aire de cet élément, on aura

$$\frac{t}{dS} = \tau, \quad t = \tau dS.$$

La tension exercée sur un élément de surface est le produit de cet élément par la tension rapportée à l'unité de surface.

§ 21.

CHARGES DE RUPTURE ET DE SÉCURITÉ PRATIQUE. — Supposons qu'on prenne le millimètre carré pour unité de surface, qu'on suspende un fil de fer de 1^{mmq} par l'une de ses extrémités et qu'à l'autre extrémité on attache, *sans choc*, des poids graduellement croissants jusqu'à ce que le fil de fer se rompe. On aura ainsi la charge de rupture d'un fil de fer, par extension. On peut la trouver pour toutes les matières, ainsi que la charge de rupture par compression, de sorte que chaque matière ne peut supporter qu'une tension ou une pression donnée sans se rompre. En aucun point d'un corps, la tension ou pression ne doit dépasser ces limites et, dans la pratique, on reste bien au-dessous d'elles.

En France on admet généralement des charges variant du $\frac{1}{10}$ au

$\frac{1}{6}$ de la charge de rupture. Mais il résulte des expériences de Wöhler qu'une charge bien inférieure à celle qui déterminerait la rupture *du premier coup* peut la déterminer si elle se reproduit un nombre suffisant de fois. De là résultent, pour la force élastique par unité de surface à ne pas dépasser dans la pratique ou, comme on dit, pour la *charge de sécurité pratique* qu'il convient d'adopter, des règles nouvelles qu'on trouvera développées dans la Note I.

§ 25.

FORCES ISOLÉES, CONTINUES; SURFACE DE CHARGE. — On peut concevoir, quoique cela n'existe pas dans la nature, un corps soumis à des forces de grandeurs finies, appliquées en un nombre fini de points. On les nomme des *forces isolées*. On peut aussi envisager des forces qui se succèdent d'une manière continue le long d'une surface S faisant partie d'un corps. Nous venons d'en trouver un exemple dans les forces élastiques. Si l'on conçoit toujours une faible portion de surface ΔS limitée par une courbe fermée tracée autour d'un point M et que F soit la résultante des forces agissant aux divers points de ΔS supposées transportées en M, le rapport $\frac{F}{\Delta S}$ se nomme la *force moyenne* par unité de surface agissant sur ΔS, et la limite vers laquelle elle tend quand ΔS décroît indéfiniment se nomme la *force rapportée à l'unité de surface agissant au point* M, ou plus simplement la *charge* au point M. Soit p cette charge. La force agissant sur un élément de surface infiniment petit dS pris autour du point M sera alors pdS. On voit par là que p n'est pas une force, mais le *rapport d'une force à une surface*. La charge p peut être normale ou oblique à la surface S au point M, constante ou variable d'un point à l'autre de la surface.

De même, si des forces sont distribuées d'une manière continue, le long d'une ligne s faisant partie d'un corps, la force p rapportée à l'unité *de longueur,* en un point M, ou simplement la *charge* en ce point, est une grandeur telle que, si ds est un élément de longueur infiniment petite pris sur la ligne s et comprenant le point M, la force qu'il subit soit égale au produit pds, de sorte que la charge p en un point d'une ligne n'est pas une force, mais le rapport d'une force à une longueur.

Supposons que la ligne s soit droite et représentée par AB (*fig.* 1), que la charge p soit partout normale à cette droite.

Concevons qu'en chaque point M on mène une perpendiculaire Mm à AB qui, à une échelle convenue, soit égale à la valeur de p en ce point.

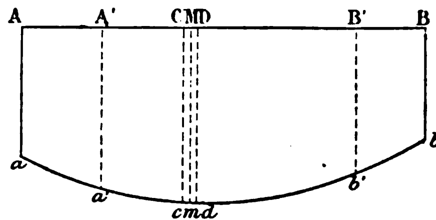
Le lieu des points m se nomme la *ligne de charge*.

Chaque élément CD $= ds$ de la droite AB supporte une force

$$p\,ds = \mathrm{M}m \times \mathrm{CD},$$

représentée, par suite, à l'échelle adoptée, par l'aire CDcd qui

Fig. 1.



correspond à l'élément CD. C'est pourquoi l'aire A'B'$a'b'$ qui correspond à une portion quelconque A'B' de la ligne AB se nomme la *surface de charge* relative à cette portion.

Remarque. — 1° Si la *charge* est *uniforme*, c'est-à-dire si p est constant, la ligne de charge amb se réduit à une parallèle à AB et les surfaces de charge sont des rectangles.

2° Si la charge p est variable, elle peut, en certains points, avoir des valeurs positives, en d'autres des valeurs négatives. On portera alors les ordonnées M$m = p$ dans un sens convenu ou en sens contraire suivant le signe de p. Si AB est horizontal et les charges p verticales, nous conviendrons généralement de regarder les forces descendantes comme positives et les forces ascendantes comme négatives.

CHAPITRE III.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DES FORCES CONCOURANTES.

§ 26.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES FORCES. — En Statique graphique on représente systématiquement les forces à l'aide de deux figures distinctes.

Chacune d'elles contient :

1° Le point d'application de chaque force ;

2° La ligne indéfinie suivant laquelle elle agit et qu'on nomme sa *ligne d'action*, sans égard pour sa grandeur, ni même pour son sens. Cependant ce sens sera, surtout dans les débuts, indiqué par une flèche.

Sur une autre figure, on porte bout à bout des lignes qui, à une échelle convenue, représentent la grandeur, la direction et le sens de chaque force, de manière à former ce que (§ **1**) nous avons appelé le *polygone des lignes d'action,* lequel prend ici le nom de *polygone des forces*.

Quand les forces agissent sur un système invariable, on peut (§ **22**) les appliquer en des points quelconques de leurs lignes d'action, de sorte que, dans ce cas, il est inutile de se donner leurs points d'application ; la première figure ne contient alors que les lignes d'action des forces.

Habituellement nous désignerons les lignes d'action par des chiffres *gras* **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, etc., et les côtés correspondants du polygone des forces par les chiffres similaires 1, 2, 3, 4, 5, ...

Ainsi, si les sept lignes de la *fig.* **2**, *Pl. I,* sont regardées comme les lignes d'action de sept forces, les grandeurs et sens de ces forces seront donnés par les côtés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 du polygone représenté (*fig.* 2).

§ 27.

COMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES EN UN MÊME POINT D'UN CORPS QUELCONQUE. — La règle du parallélogramme des forces indique

(*fig.* 23 et 23, *Pl. VI*) que la résultante OX de deux forces 1 et 2 dont le polygone des forces a pour côtés 1 et 2 passe par ce point et est représentée par la somme géométrique *ab* de ces deux lignes.

De là on déduit que *la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées en un même point d'un corps* passe par ce point et est égale en grandeur, direction et sens à *leur somme géométrique.*

Ainsi (*fig.* 21 et 21, *Pl. VI*), pour avoir la résultante des forces

1, 2, 3, 4, 5,

appliquées en un point O d'un corps quelconque et représentées, sur le polygone des forces, par les lignes

1, 2, 3, 4, 5,

il suffit de composer d'abord les forces représentées par 1 et 2, ce qui donnera une résultante partielle passant par le point O et représentée par la diagonale *ac*; puis, celle-ci avec la force 3, ce qui donne une nouvelle résultante passant toujours par le point O et représentée par la diagonale *ad* ou la somme géométrique des trois premières forces, et ainsi de suite, de sorte que la résultante R de toutes les forces est égale à leur somme géométrique *ab.*

COROLLAIRE. — *La projection sur un axe quelconque de la résultante de plusieurs forces appliquées en un même point d'un corps quelconque est égale à la somme algébrique des projections des composantes* (§ 7).

§ 28.

DÉCOMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES EN UN MÊME POINT D'UN CORPS QUELCONQUE. — Réciproquement, étant donnée (*fig.* 21 et 21, *Pl. VI*) une force dont la ligne d'action est R et la grandeur *ab*, on peut la décomposer en plusieurs autres, par exemple en cinq, appliquées au même point qu'elle; il suffit que le polygone des forces composantes 1, 2, 3, 4, 5 ait même origine et même extrémité que la force donnée *ab.* On peut donc se donner arbitrairement toutes les composantes, sauf une. Si, par exemple, on se donne 1, 2, 3, 4, le dernier côté 5 est déterminé.

Si toutes les forces sont dans un même plan, on peut encore se donner :

1° En grandeur, direction et sens, toutes les composantes moins deux d'entre elles ;

2° Ces dernières en direction.

Ainsi, supposons données, en grandeur, direction et sens, les forces $1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$ et, en direction seulement, les lignes d'action 4 et 5.

Pour avoir les grandeurs 4 et 5 de ces deux forces, il suffira, par le point d, de mener une parallèle à 4 et, par le point b, une parallèle à 5 ; on aura ainsi les grandeurs cherchées 4 et 5 des deux dernières composantes et leurs sens.

Remarque. — On aurait pu aussi, par le point d, mener une parallèle à 5 et par le point b une parallèle à 4 ; on aurait eu des grandeurs $4'$ et $5'$ qui auraient fourni la solution aussi bien que 4 et 5. Nous verrons que, dans les applications, il n'est pas, en général, indifférent d'adopter l'une ou l'autre de ces deux solutions.

Si l'on demande simplement de décomposer une force donnée ($R = ab$), appliquée en un point d'un corps, en deux autres appliquées au même point, situées dans un même plan qu'elle et suivant des directions données 1 et 2 (*fig.* 23 et 23), il suffit de mener par a une parallèle à 1 et par b une parallèle à 2 ou *vice versa*.

§ 29.

ÉQUILIBRE DES FORCES APPLIQUÉES EN UN MÊME POINT D'UN CORPS QUELCONQUE. — Pour que des forces appliquées en un point d'un corps quelconque soient en équilibre, il faut et il suffit évidemment que leur résultante ou somme géométrique soit nulle.

Ainsi, *pour que des forces appliquées en un point d'un corps quelconque soient en équilibre, il faut et il suffit que le polygone de ces forces se ferme* ou, ce qui revient au même, qu'elles soient *égales (ou proportionnelles) aux côtés d'un polygone fermé, parallèles à ces côtés et du sens* que l'on obtient en parcourant le périmètre de ce polygone tout entier dans un sens constant.

Si ces conditions sont remplies, ces forces sont non seulement en équilibre, mais supprimables (§ 1).

En particulier, pour que trois forces soient dans ce cas, il faut et il suffit qu'elles soient égales (ou proportionnelles) aux trois côtés d'un triangle, parallèles à ces côtés et du sens que l'on obtient en parcourant le périmètre du triangle dans un sens constant. Il faut, par suite, avant tout, que leurs lignes d'action soient dans un même plan.

Remarque I. — Si des forces non en équilibre sont appliquées en un point, on peut les équilibrer par une force unique égale et opposée à leur résultante, c'est-à-dire égale (§ 1) à la droite qui *ferme* leur polygone. La force capable d'équilibrer les cinq forces des *fig.* 21, 21, *Pl. VI*, est représentée par la ligne *ba* fermant le polygone des forces, et non par la ligne *ab*.

Remarque II. — Inversement, une force unique appliquée en un point d'un corps peut, d'une infinité de manières, être équilibrée par plusieurs forces appliquées en ce point. Pour obtenir ces forces, il suffit de construire un contour polygonal arbitraire en partant de l'*extrémité* de la force donnée pour aboutir à son *origine*, de façon à former un polygone fermé avec la force donnée et celles qui doivent lui faire équilibre.

On peut se donner arbitrairement ces dernières moins une; alors celle-ci est déterminée.

Si toutes les forces doivent être dans un même plan, on peut se les donner toutes, moins deux, en grandeur, direction et sens, et les deux autres en direction.

Le problème est le même que celui du § 28, avec cette différence que, dans le cas du § 28, le contour polygonal à construire a même origine et même extrémité que la force donnée, tandis qu'ici ce contour a pour origine l'extrémité de la force donnée, et pour extrémité l'origine de cette force.

La remarque faite là sur la double solution du problème s'applique ici. Sur les *fig.* 21 et 21 les forces capables d'équilibrer une force donnée $R = ab$ seraient représentées par les côtés 5, 4, 3, 2, 1 du polygone des forces, ces côtés estimés dans le même sens que la force donnée *ab*, c'est-à-dire dans le sens des chiffres *décroissants*.

§ 30.

COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES APPLIQUÉES A UN SOLIDE INVARIABLE. — Considérons des forces appliquées en divers points d'un solide invariable, mais dont les lignes d'action concourent toutes en un même point de ce corps (ou en un point quelconque de l'espace qu'on supposera invariablement relié au corps). Nous pouvons (§ 22) transporter les points d'application de toutes ces forces au point de concours de leurs lignes d'action et, par suite, appliquer à leur composition, à leur décomposition et à leurs conditions d'équilibre tout ce qui vient d'être dit pour des forces toutes appliquées en un même point d'un corps quelconque.

§ 31.

ÉQUILIBRE D'UNE PRESSION NORMALE ET UNIFORME SUR UN CONTOUR PLAN FERMÉ. — Lemme. — *Considérons un polygone plan fermé dont les côtés et les angles sont supposés invariables; sur le milieu de chacun de ses côtés est appliquée une force normale et proportionnelle à ce côté, ces forces étant dirigées, soit toutes vers le dedans du polygone, soit toutes vers le dehors.*

Quelle que soit la forme du polygone, ces forces se font équilibre.

Cela est évident pour un triangle; car les trois forces, étant dirigées suivant les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du triangle, sont concourantes; d'ailleurs, à une échelle convenable, la force agissant sur chaque côté peut être représentée par la longueur même de ce côté; par suite, le polygone des trois forces n'est autre que le triangle même sur lequel ces forces sont appliquées, après qu'on l'a fait tourner d'un angle de 90° dans son plan.

Donc (§ 29) elles sont en équilibre.

Le théorème étant établi pour un triangle, il s'ensuit qu'il est vrai pour un polygone quelconque.

Soit, en effet, ABCDE (*fig.* 2) un polygone fermé quelconque sur les milieux des côtés duquel agissent des forces dont les lignes

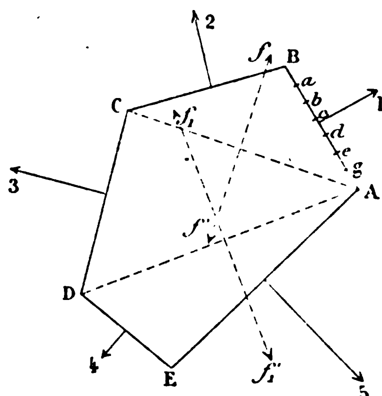
d'action

$$1, 2, 3, 4, 5$$

sont perpendiculaires à ces côtés, dont les grandeurs leur sont proportionnelles et que, pour fixer les idées, nous supposerons toutes dirigées vers la partie du plan extérieure au polygone.

D'un sommet A menons les diagonales AC, AD. Au milieu de la diagonale AC, appliquons deux forces f et f' égales et opposées, proportionnelles à cette diagonale; de même, au milieu de la diagonale AD appliquons deux forces f_1, f'_1, égales et opposées, proportionnelles à AD.

Fig. 2.



Ces forces ainsi ajoutées ne changent pas l'état du corps.

Or, on voit que les trois forces

$$1, 2, f',$$

agissant sur les milieux des côtés du triangle ABC, sont proportionnelles à ces côtés et dirigées toutes trois vers le dehors; donc elles se font équilibre; de même, les trois forces f, 3, f'_1 agissant sur les côtés du triangle ACD; de même enfin celles f_1, 4, 5 agissant sur les trois côtés du triangle ADE.

A présent, soient l la longueur d'un des côtés, du côté AB par exemple, et pl la grandeur de la force 1 appliquée en son milieu. Divisons ce côté en un nombre quelconque n de parties égales dont chacune aura une longueur $\frac{l}{n}$ et, au lieu d'appliquer

la force pl au milieu de AB, appliquons une force $\frac{pl}{n}$ au milieu de chaque partie.

L'équilibre subsistera évidemment; car, si a, b, c, ... sont les points de division, on pourra regarder chaque partie Ba, ab, ... comme un côté d'un polygone (seulement ces côtés successifs feront entre eux l'angle de 180°) et appliquer le lemme précédent au polygone fermé dont les sommets sont

$$A, E, D, C, B, a, b, c, d, e, \ldots,$$

quelque grand que soit n.

Ainsi l'équilibre subsiste, si, pour certains côtés ou pour la totalité, on remplace la force unique pl appliquée en leurs milieux par une pression ou charge normale p (§ 25) uniformément répartie sur leurs longueurs.

Si l'on fait cela pour tous les côtés, le lemme précédent peut encore s'énoncer ainsi :

Un polygone plan fermé et rigide d'un nombre quelconque de côtés est en équilibre sous l'influence d'une pression normale et uniforme répartie sur tout son pourtour, et aussi sous l'influence d'une telle pression p répartie sur une partie seulement de ses côtés et de forces pl proportionnelles aux longueurs l des autres côtés, normales à ces côtés, appliquées en leurs milieux.

Et le théorème, étant établi pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés, est vrai pour une courbe fermée qu'on peut regarder comme la limite vers laquelle tend un polygone d'un nombre de côtés de plus en plus grand qui y serait inscrit et aussi pour un contour mixtiligne formé en partie de courbes, en partie de droites.

Corollaire. — *Une pression normale uniforme de p kilogrammes par unité de longueur exercée sur le pourtour d'une ligne plane, rigide, non fermée, de forme quelconque, admet une résultante unique égale au produit pl de la pression p, par la longueur l de la corde qui sous-tend la ligne et dirigée suivant la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde.*

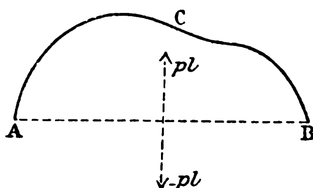
Soient (*fig.* 3, p. 32) ACB la ligne donnée et AB sa corde.

Suivant la perpendiculaire élevée au milieu de AB, appliquons

deux forces pl et $-pl$ égales et de sens opposés. Si, pour fixer les idées, nous admettons que la pression sur ACB s'exerce du dedans vers le dehors, cette pression et celle $-pl$ se font équilibre sur le contour fermé ACBA.

Donc, les pressions agissant suivant ACB forment un système de

Fig. 3.



forces équilibré par la force pl changée de sens. Donc (§ 21) la force pl est équivalente à ces forces ou est leur résultante.

On voit que la résultante pl est dirigée vers le dedans, parce que les pressions suivant ACB sont supposées dirigées vers le dehors. Ce serait l'inverse si ces dernières changeaient de sens.



DEUXIÈME SECTION.

PRINCIPES DE STATIQUE GRAPHIQUE.

CHAPITRE IV.

LE POLYGONE FUNICULAIRE CONSIDÉRÉ COMME MOYEN DE COMPOSITION DES FORCES DANS UN PLAN ET LES PROPRIÉTÉS QUI EN DÉCOULENT.

§ 32.

DÉFINITION DES POLYGONES FUNICULAIRES. — Représentant et désignant les forces suivant les notations définies au § 26, soient (*fig.* 24, *Pl. VII*)

11′, 22′, 33′, 44′, 55′

les lignes d'action d'un système de cinq forces appliquées à un solide invariable et distribuées d'une manière quelconque dans un plan, et soient (*fig.* 24)

1, 2, 3, 4, 5

les côtés du polygone de ces forces, lequel a le point *a* pour origine et le point *b* pour extrémité.

D'un point O pris arbitrairement dans le plan, menons des rayons vecteurs aboutissant aux deux extrémités *a* et *b* de ce polygone et en ses divers sommets.

Tout sommet sera désigné, comme il a été dit au § 2, par les chiffres des deux côtés qui le déterminent; de plus, tout rayon aboutissant à un sommet sera désigné comme le sommet lui-même, de sorte que nous dirons : les sommets 3.4, 4.5, et de même les rayons 3.4, 4.5 aboutissant à ces sommets.

Ceci posé, d'un point quelconque A du plan (*fig.* 24) menons la ligne A1 parallèle au rayon O*a* jusqu'à sa rencontre avec la ligne d'action 1 ; puis, du point 1 et entre les lignes d'action 1 et 2 menons la ligne 1.2 parallèle au rayon 1.2 du polygone des forces; entre les lignes d'action 2 et 3, 3 et 4, 4 et 5, menons de même les lignes 2.3, 3.4, 4.5 respectivement parallèles aux rayons 2.3, 3.4, 4.5 et enfin du point 5 menons la ligne 5B parallèle au rayon extrême O*b*.

Le nouveau contour A1.2.3.4.5B ainsi formé se nomme un *polygone funiculaire* des forces données.

Le point O se nomme le *pôle* de ce polygone; les rayons issus du pôle se nomment des *rayons polaires*.

Ainsi, un polygone funiculaire d'un système de forces est un polygone dont les sommets sont sur les lignes d'action de ces forces et dont les côtés sont parallèles aux rayons polaires.

Un système de forces données admet, d'après cela, une infinité de polygones funiculaires; car chaque point O du plan peut être pris pour pôle et, le pôle une fois choisi, on dispose encore arbitrairement du point de départ A du polygone funiculaire correspondant.

Lorsque les forces données sont toutes parallèles, tous les côtés du polygone des forces sont dirigés suivant une seule droite.

La distance du pôle d'un polygone funiculaire à cette droite se nomme alors la *distance polaire* de ce polygone.

Remarque I. — Pour que la construction soit possible, *quel que soit le point de départ* A, il faut et il suffit que le côté A1 rencontre la ligne d'action 1, que le côté 1.2 rencontre la ligne d'action 2, le côté 2.3 la ligne d'action 3, et ainsi de suite.

Cela aura lieu toutes les fois que le pôle O ne se trouvera sur la direction, supposée prolongée indéfiniment, d'aucun des côtés du polygone des forces.

En général, il conviendra de le choisir de façon qu'il en soit ainsi. Si, toutefois, cela n'est pas, si le point O est pris sur la direction du côté 1 par exemple, la construction cesse d'être possible, quand le point de départ A est quelconque; mais elle peut être effectuée si l'on prend ce point sur la ligne d'action 11'; le côté A1 coïncidera alors avec cette ligne; d'ailleurs le rayon 1.2 coïnci-

dant, dans ce cas, avec celui O*a* et tous deux avec le côté 1, le côté 1.2 du polygone funiculaire coïncide avec le côté A1 et tous deux avec la ligne d'action 11'; le point 2 sera donc l'intersection de cette ligne avec celle 22'; et c'est de ce point que partira le côté 2.3, sans autre anomalie dans la suite du tracé. Le point de départ 1 du côté 1.2 pourrait être pris quelconque.

La *fig.* 22, *Pl. VI* contient sept lignes d'action

11', 22', 33', 44', 55', 66', 77',

répondant au polygone des forces (*fig.* 22) dont les côtés sont

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

On a tracé, sur la figure, en lignes pointillées, le polygone funiculaire répondant au pôle quelconque O et en lignes pleines celui répondant au pôle *a* origine du polygone des forces.

Les rayons ou diagonales issus de *a* sont désignés par (12), (23),... et les côtés du polygone funiculaire correspondant sont désignés par (12), (23)...

Suivant l'observation ci-dessus, le point de départ de ce polygone ne peut pas être quelconque. Le tracé n'est possible qu'à la condition de prendre ce point sur la ligne 11', de sorte que les deux premiers côtés non marqués coïncident avec 11' et le troisième côté compris entre les lignes d'action 22' et 33' et habituellement désigné par 2.3 [ici par (1.2)] a pour point de départ l'intersection des lignes d'action 11' et 22'.

Des remarques analogues seraient à faire sur la condition de possibilité d'un polygone dont le pôle serait sur la direction d'un quelconque des autres côtés du polygone des forces.

Remarque II. — Observons que si, au lieu de considérer toutes les forces, on en considère quelques-unes seulement pourvu qu'elles soient consécutives, par exemple, celles dont les lignes d'action sont 2, 3, 4 et les grandeurs 2, 3, 4, le contour 1.2.3.4.5 est un polygone funiculaire relatif à ces trois forces; les côtés extrêmes de ce polygone sont ceux 1.2 et 4.5, les rayons extrêmes, ceux qui aboutissent aux sommets 1.2 et 4.5 du polygone des forces.

De là résulte cette conséquence importante : *Toute propriété générale appartenant aux deux côtés extrêmes des polygones*

funiculaires, appartient aussi à deux côtés quelconques, puisque deux côtés quelconques peuvent être considérés comme les côtés extrêmes du polygone funiculaire relatif aux forces qu'ils comprennent entre eux.

§ 33.

LEMME FONDAMENTAL. — *Des forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan et appliquées à un système invariable peuvent toujours, sans aucune exception, être réduites à deux forces ayant : 1° pour lignes d'action, les deux côtés extrêmes de l'un quelconque des polygones funiculaires de ces forces; 2° pour grandeurs, les deux rayons polaires extrêmes, ces rayons étant parcourus en allant de l'origine à l'extrémité du polygone des forces.*

Reprenant les cinq forces définies par les *fig.* 24 et 24 de la *Pl. VII*, il s'agit de démontrer que ces forces peuvent être réduites à deux ayant pour lignes d'action les côtés 1 A et 5 B du polygone funiculaire, respectivement égales et de même sens que les rayons *a*O et O*b*.

Pour le démontrer, observons qu'on peut, sans changer l'état du corps sur lequel agissent les forces, faire les opérations suivantes :

1° Transporter les points d'application des forces données aux sommets 1, 2, 3, 4, 5 du polygone funiculaire;

2° Décomposer chacune de ces forces en deux autres suivant les deux côtés du polygone qui y aboutissent.

Pour décomposer la force 1 1′ suivant les deux directions 1 A et 1.2, il suffirait (§ 28) de mener par le point *a* une parallèle à la première de ces directions et par le point 1.2 une parallèle à la seconde; mais la construction est toute faite et les composantes sont le rayon *a*O et le rayon 1.2, ce dernier estimé depuis le pôle O. De même les deux composantes de la force 2 2′ suivant les lignes d'action 2.1 et 2.3 sont respectivement les rayons 2.1 et 2.3, le premier allant du sommet 2.1 au pôle; le second, au contraire, du pôle au sommet 2.3 et ainsi de suite, jusqu'à la force 5 5′ dont les composantes suivant 5.4 et 5B sont respectivement les rayons 5.4 et O*b*, le premier allant du sommet 5.4 au pôle, le second du pôle au sommet *b*.

Remplaçons les cinq forces données par leurs composantes ainsi obtenues, de sorte que nous n'aurons plus que des forces dirigées suivant les divers côtés du polygone funiculaire ; mais les deux forces dirigées suivant chacun des côtés intermédiaires du polygone funiculaire sont égales et opposées. Ainsi, les deux forces dirigées suivant le côté 2.3 sont représentées l'une, celle appliquée au sommet 2, par le rayon 2.3 estimé du pôle vers le sommet, l'autre, celle appliquée au sommet 3, par le même rayon estimé en sens contraire. Donc (§ 22) ces forces peuvent être supprimées. Il en est de même de toutes celles dirigées suivant les côtés intermédiaires du polygone funiculaire. Il ne reste donc que les deux forces ayant pour lignes d'action les côtés extrêmes 1A et 5B et qui sont bien représentées par les rayons aO et Ob, de sorte que leur polygone des forces est le contour aOb.

§ 34.

EXTENSION DU LEMME FONDAMENTAL A DES SYSTÈMES MATÉRIELS QUELCONQUES. — *Des forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan et agissant sur un corps quelconque peuvent toujours être remplacées par : 1° deux forces appliquées en deux points arbitrairement choisis à l'intérieur du corps dans le plan contenant les forces, dirigées suivant les côtés extrêmes de l'un des polygones funiculaires de ces forces, représentées par les rayons polaires correspondants supposés parcourus en cheminant de l'origine à l'extrémité du polygone des forces ; 2° un certain nombre de paires de forces appliquées en divers points du corps, deux à deux égales, dirigées suivant les droites qui joignent leurs points d'application et de sens opposés.*

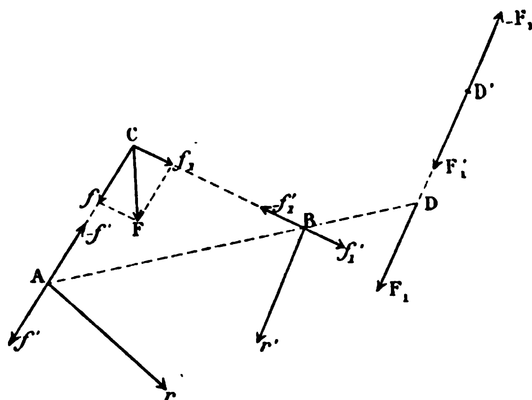
En effet, soient (*fig. a*, p. 38) A et B deux points du corps pris arbitrairement dans le plan contenant toutes les forces et soit C le point d'application de l'une de ces forces F.

1° Si le point C n'est pas sur la ligne AB, nous pouvons, quel que soit le corps, décomposer la force F en deux autres f et f_1 ayant même point d'application C que la force F et dirigées suivant CA et CB, puis au point A appliquer deux forces f' et $-f'$, l'une égale et de même sens que f, l'autre égale et de sens opposé ; nous

pouvons de même appliquer au point B deux forces f'_1 et $-f'_1$, l'une égale et de même sens que f_1, l'autre égale et de sens opposé. Nous aurons ainsi remplacé la force F par un système équivalent (§ 20) formé : 1° de deux forces f' et f'_1 appliquées aux deux points A et B, 2° de deux paires de forces f, $-f'$ et f_1, $-f'_1$ deux à deux égales, dirigées suivant les droites qui joignent leurs points d'application et de sens opposés.

2° Si une force F_1 se trouve appliquée en un point D du corps placé sur la ligne géométrique AB et que sur la ligne d'action de

Fig. *a*.



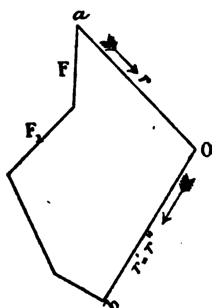
F_1 il se trouve un point D' du corps, on pourra, en ce point, appliquer deux forces égales et opposées F'_1, $-F_1$ ayant F_1 pour valeur commune; en opérant alors sur la force F'_1 comme nous l'avons fait sur la force F, on arrivera toujours à ce résultat d'avoir remplacé la force F_1 par deux forces appliquées en A et B et par des paires de forces deux à deux égales, dirigées suivant les mêmes lignes et de sens opposés; on aura seulement ici une paire de forces de plus que dans le cas précédent, à savoir les forces F_1 et $-F_1$.

3° Si enfin sur la ligne d'action de F_1 il ne se trouvait pas un second point D' du corps, placé à distance finie du premier, ce qui pourrait arriver, par exemple, si la force F_1 agissait tangentiellement à la surface d'un corps, on pourrait toujours décomposer cette force en deux autres appliquées au même point qu'elle et placées dans des directions qui rencontrent des points du corps. On procéderait alors sur chacune des composantes comme dans le cas 2°.

En opérant ainsi sur chacune des forces appliquées au corps, quel qu'il soit (solide ou fluide), on aura remplacé ces forces par un système équivalent formé : 1° par des paires de forces comme celles annoncées dans le théorème qu'il s'agit de démontrer; 2° par deux groupes de forces, les unes appliquées en A et qu'on peut remplacer par leur résultante que nous appellerons r, les autres appliquées en B et qu'on peut de même remplacer par leur résultante r'.

Il reste donc seulement à montrer que ces deux forces r et r' sont dirigées suivant les côtés extrêmes de l'un des polygones

Fig. a'.



funiculaires des forces données et qu'elles sont représentées par les rayons polaires correspondants.

Observons d'abord que, si nous concevons, pour un instant, que tous les points du corps viennent à être *invariablement liés entre eux,* ce qu'on exprime en disant qu'on *solidifie* le corps, alors les paires de forces dont il vient d'être parlé deviennent *supprimables* (§ 21) et les deux forces r et r' forment à elles seules un système équivalent aux forces données.

Soient (*fig.* a', p. 39) a et b l'origine et l'extrémité du polygone de ces forces; menons aO égal, parallèle et de même sens que la force r : si nous construisons le polygone funiculaire des forces données ayant le point O pour pôle et la ligne d'action de la force r pour premier côté, ces forces, supposées appliquées au corps solidifié peuvent, en vertu du lemme du paragraphe précédent, être remplacées par deux forces

$$r \text{ et } r'',$$

dirigées suivant les côtés extrêmes de ce polygone et représentées par les rayons extrêmes aO et Ob, dont le premier est r.

Mais, puisque, dans ces conditions, c'est-à-dire le corps supposé solidifié, les forces données peuvent aussi être remplacées par celles

$$r \text{ et } r',$$

il faut que ces deux dernières soient équivalentes à celles r et r'', ce qui exige que celles r' et r'' soient équivalentes sur un corps solide, c'est-à-dire que leurs lignes d'action coïncident et que leurs grandeurs et sens soient les mêmes, ce qui établit la proposition énoncée.

§ 35.

CONDITIONS GRAPHIQUES D'ÉQUILIBRE DE FORCES SITUÉES DANS UN PLAN. — Théorème. — *Pour que des forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan et appliquées à un système invariable soient en équilibre, il faut et il suffit : 1° que le polygone de ces forces se ferme; 2° qu'un de leurs polygones funiculaires (qu'on pourra choisir arbitrairement) se ferme également et alors tous leurs polygones funiculaires se fermeront.*

En effet, les forces données peuvent être (§ 33) réduites à deux résultantes ayant (*fig.* 24 et 24, *Pl. VII*) les lignes 1A et 5B pour lignes d'action et les rayons aO et Ob pour grandeurs et sens.

Or, pour que deux forces appliquées à un système invariable se fassent équilibre, il faut et il suffit (§ 22) qu'elles aient même ligne d'action, et soient égales et de sens opposés.

Ainsi, il faut d'abord que les deux côtés extrêmes 1A et 5B du polygone funiculaire coïncident, ce qui exige que chacune de ces deux lignes passe à la fois par les points 1 et 5, c'est-à-dire que le polygone funiculaire se ferme.

Par suite, les deux rayons aO et Ob, parallèles à ces lignes, auront aussi même direction géométrique et, comme les deux résultantes représentées respectivement par ces deux rayons doivent être égales et de sens opposés, il faut que les points a et b coïncident, c'est-à-dire que le polygone des forces se ferme également.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes. En effet, si le polygone

funiculaire se ferme, les deux résultantes ont même ligne d'action et si, en outre, le polygone des forces se ferme, elles sont égales et de sens opposés.

Corollaire I. — Si ces conditions sont remplies pour un seul polygone funiculaire, l'équilibre existe et, par suite, si l'on réduit le système à deux forces dirigées suivant les deux côtés extrêmes d'un autre polygone funiculaire, ces deux résultantes sont aussi égales et directement opposées.

Ainsi : *si le polygone d'un système de forces se ferme et qu'un seul de ses polygones funiculaires se ferme, il en est de même de tous les autres.*

Corollaire II. — Si les forces considérées sont toutes appliquées en un même point, il faut et il suffit (§ 29), pour qu'elles soient en équilibre, que le polygone des forces se ferme. Supposons qu'il en soit ainsi. Alors, l'équilibre existant, il résulte du théorème ci-dessus que, si l'on construit un quelconque des polygones funiculaires des forces données, il se fermera.

De là, un théorème de Géométrie très utile et qu'il serait facile d'établir aussi directement.

Soient (*fig.* 13, *Pl. III*) trois forces appliquées en un point D dont les lignes d'action sont 6, 5, 4 et qui sont représentées par le polygone fermé (triangle) ayant les côtés 6, 5, 4, de sorte qu'elles se font équilibre.

Par suite, si nous construisons le polygone funiculaire de ces forces relatif à un pôle quelconque *d*, il se fermera. Partons, par exemple, d'un point B pris sur la ligne d'action 4, construisons entre les lignes d'action 4 et 5 le côté BA ou 1 parallèle au rayon 4.5 ou 1; entre les lignes d'action 5 et 6 le côté AC ou 2 parallèle au rayon 5.6 ou 2, entre celles 6 et 4, la ligne 3 partant de C et parallèle au rayon 6.4 ou 3.

Le polygone funiculaire devant se fermer, ce dernier côté reviendra au point de départ B.

Les deux *fig.* 13 et 13 sont formées chacune par six lignes joignant quatre points d'un plan; chacune comprend quatre triangles; elles sont d'ailleurs telles :

1° Qu'à chaque ligne de l'un répond, dans l'autre, une ligne parallèle; de telles lignes portent, sur les deux figures, le même numéro et sont dites *correspondantes;*

2° Que trois lignes de l'une formant un triangle ont pour *correspondantes,* dans l'autre, trois lignes issues d'un même point.

Le résultat auquel nous venons d'arriver peut donc s'énoncer ainsi : *Si cinq des six lignes joignant quatre points d'un plan (par exemple les lignes* 6, 5, 4, 1, 2) *sont parallèles à cinq des six lignes joignant quatre autres points (celles* 6, 5, 4, 1, 2); *si, de plus, les lignes parallèles se correspondent de façon qu'à chacun des deux triangles formés par les cinq lignes de l'une des figures répondent, dans l'autre, des lignes issues d'un même point, la sixième ligne de l'une des figures sera parallèle à la sixième de l'autre.*

Il serait facile de généraliser la proposition en prenant plusieurs forces appliquées en un même point (*fig.* 15 et 15, *Pl. III*).

§ 36.

CONDITIONS D'EXISTENCE ET RECHERCHE GRAPHIQUE DE LA RÉSULTANTE DE FORCES SITUÉES DANS UN PLAN. — Théorème. — *Pour que des forces situées dans un plan et appliquées à un système invariable admettent une résultante, il faut et il suffit que le polygone de ces forces ne se ferme pas. Alors leur résultante est égale en grandeur, direction et sens à leur somme géométrique* (§ 3) *et sa ligne d'action passe par le point d'intersection des deux côtés extrêmes d'un quelconque de leurs polygones funiculaires.*

La condition indiquée est nécessaire; car, si un système de forces admet une résultante R, une force R′ égale et directement opposée à R maintiendra ces forces en équilibre; donc le polygone des forces données et de la force R′ doit être fermé (§ 35), ce qui exige que le polygone des forces données ne le soit pas (à moins de supposer la force R′ nulle; en ce cas, les forces données se feraient équilibre par elles-mêmes et il n'y aurait pas à en chercher la résultante).

Le polygone des forces données n'étant pas fermé, considérons un polygone funiculaire dont le pôle O soit pris (*fig.* 24 et 24,

Pl. VII) en dehors de la ligne *ba* qui le ferme, en sorte que les rayons extrêmes O*a*, O*b* n'auront pas même direction. Donc, les côtés extrêmes 1A et 5B du polygone funiculaire, lesquels sont parallèles à ces rayons, se rencontrent et, comme ce sont les lignes d'action des deux résultantes auxquelles les forces données sont réductibles (§ 33), ces deux dernières forces elles-mêmes se rencontrent. Soit 6 leur point d'intersection; nous pouvons y transporter leurs points d'application; par suite, leur résultante passera par ce point et sera égale, d'après la règle du parallélogramme des forces, à leur somme géométrique. Mais, comme ces deux forces ont pour polygone le contour *a*O*b*, leur somme géométrique *ab* coïncide avec celle des forces données.

Remarque I. — De là, le procédé graphique suivant pour trouver la résultante des forces appliquées à un système invariable, quelle que soit leur distribution dans un plan : construisez l'un quelconque de leurs polygones funiculaires (celui qu'on trouvera le plus commode au point de vue graphique).

Le point d'intersection des côtés extrêmes de ce polygone donne un point de leur résultante. Celle-ci est d'ailleurs représentée, sur le polygone des forces, par la droite *ab* qui va de l'origine à l'extrémité de ce polygone.

Remarque. — Il convient en général de prendre le pôle du polygone funiculaire que l'on construira en dehors de la ligne *ab*; autrement ses côtés extrêmes seraient parallèles et ne fourniraient pas un point de la résultante, sauf pourtant si le pôle coïncide avec l'une des extrémités *a* ou *b*. Cette exception s'explique ainsi : en général, si le pôle O est pris sur *ab*, on réduit (§ 33) les forces données à deux résultantes égales à *a*O et O*b*, parallèles entre elles, puisqu'elles coïncident avec les côtés extrêmes du polygone funiculaire, lesquels sont, dans ce cas, parallèles. On n'aurait donc pas directement leur résultante; mais, si le point O coïncide avec *a* par exemple, l'une de ces deux forces, celle *a*O, est nulle, par suite, l'autre O*b* = *ab* donne directement la résultante. Ainsi, on doit prendre le pôle O, soit en dehors de la ligne *ab*, soit en l'un des points *a* ou *b*. En le prenant en *a*, par exemple, le polygone funiculaire tracé fournit le même résultat que si l'on faisait la composition des forces données en composant d'abord les deux premières 1 et 2 à l'aide du parallélogramme des forces; puis leur

résultante partielle, qu'on peut appeler (12) avec la force 3; la nouvelle résultante partielle, qu'on peut appeler (123) avec la force 4, et ainsi de suite.

Sur les *fig.* 22 et 22, *Pl. VI,* on a indiqué l'opération concurremment avec celle qui consisterait à chercher la résultante à l'aide d'un polygone funiculaire de pôle quelconque O [*voir* aussi, à ce sujet, le § 41 ci-après].

§ 37.

PROPRIÉTÉ MÉCANIQUE FONDAMENTALE DES POLYGONES FUNICULAIRES. — *Le point de rencontre de deux côtés quelconques d'un polygone funiculaire est un point de la résultante partielle des forces comprises entre ces côtés. Cette résultante est d'ailleurs représentée en grandeur, direction et sens par la somme géométrique de ces mêmes forces.*

En effet, la règle de composition d'un système de forces établie au paragraphe précédent s'applique à une portion quelconque de ces forces, pourvu qu'elles soient consécutives.

Ainsi, si, au lieu de considérer les cinq forces représentées *fig.* 24 et 24 de la *Pl. VII,* nous en prenons, par exemple, trois consécutives, celles dont les lignes d'action sont

2, 3, 4,

et qui sont représentées par les côtés

2, 3, 4

du polygone des forces, les côtés extrêmes du polygone funiculaire relatif à ces forces sont les côtés 1.2 et 4.5; donc, en vertu de la règle établie au paragraphe précédent, si ces côtés se rencontrent et qu'on les prolonge jusqu'à leur point d'intersection, on aura un point de la résultante des trois forces comprises entre ces côtés et cette résultante est la somme géométrique de ces trois forces.

Si l'on veut, à l'aide d'un même polygone funiculaire, trouver toutes les résultantes partielles, il convient de prendre le pôle en dehors des diagonales qui, sur le polygone des forces, représentent ces résultantes, à moins toutefois qu'on le prenne coïncidant avec un sommet. La raison en est la même que celle donnée à la fin du § 36.

§ 38.

COUPLES. — Si l'on appliquait la règle du § 36 qui fournit la résultante d'un système de forces quand elle existe, c'est-à-dire quand le polygone des forces n'est pas fermé, au cas où ce polygone est fermé, on arriverait, comme on le voit aisément, à ce résultat illusoire : un système de forces dont le polygone des forces est fermé admet une résultante nulle dont le point d'application est à l'infini.

Mais, si, au lieu de cette règle qui est naturellement en défaut dans ce cas, puisque (§ 36) c'est le cas où la résultante n'existe pas, on applique le lemme du § 33 qui ne souffre jamais d'exception, on voit que les deux forces auxquelles le système peut se réduire sont alors égales, parallèles et de sens opposés. L'ensemble de deux pareilles forces se nomme un *couple;* la distance entre leurs lignes d'action se nomme le *bras de levier* du couple.

Il est facile de démontrer directement qu'un couple est irréductible, c'est-à-dire n'admet pas une résultante unique.

En effet désignons, comme on le fait d'habitude, par F et — F les deux forces du couple. Si elles admettent une résultante R, celle-ci doit être située dans le plan du couple (plan des deux forces formant le couple); car il n'y a pas de raison pour qu'elle occupe, en dehors de ce plan, une position plutôt que la position symétrique.

Si cette résultante R existait, une force R′ qui lui serait égale et opposée maintiendrait le couple en équilibre (§ 21). Il s'agit donc simplement de démontrer qu'on ne peut pas trouver dans le plan du couple une force R′, telle que les trois forces

$$F, \ -F \ \text{et} \ R'$$

se fassent équilibre.

En effet, la première condition pour qu'elles se fassent équilibre (§ 35), c'est que leur somme géométrique soit nulle ou que le polygone de ces trois forces se ferme. Or, les deux forces F et — F portées bout à bout donnent déjà un polygone fermé; le polygone des trois forces ne peut donc se fermer que si la force R′ est nulle. Mais dire que la force R′ qui équilibre le couple est nulle, c'est dire que les deux forces F et — F se font, par elles-mêmes, équilibre,

ce qui est impossible, puisque (§ 22) deux forces ne peuvent se faire équilibre sur un système invariable que si elles ont même ligne d'action.

§ 39.

CONDITION GRAPHIQUE POUR QUE DES FORCES SITUÉES DANS UN PLAN SE RÉDUISENT A UN COUPLE. — *Pour que des forces appliquées à un solide invariable et distribuées d'une manière quelconque dans un plan se réduisent à un couple, il faut et il suffit que le polygone de ces forces se ferme, l'un des polygones funiculaires ne se fermant pas, et alors aucun polygone funiculaire ne se ferme.*

En effet, si le polygone des forces ne se ferme pas, le système admet une résultante. Si le polygone des forces se ferme et qu'un seul polygone funiculaire se ferme également, le système est en équilibre.

On voit d'ailleurs directement (*fig.* 24 et 24, *Pl. VII*) que, si le polygone des forces se ferme, les deux rayons *a*O et O*b* qui représentent (§ 33) les deux résultantes des forces données coïncident; les lignes d'action 1A et 5B de ces deux résultantes leur étant parallèles sont donc parallèles entre elles, et les deux résultantes ellesmêmes représentées par *a*O et O*b* sont égales et de sens opposés. Ainsi ces deux résultantes forment bien un couple.

Réciproquement, si les deux résultantes forment un couple : 1° de ce que leurs lignes d'action 1A et 5B sont parallèles, il s'ensuit que les rayons extrêmes *a*O et O*b* coïncident en direction; 2° de ce qu'elles sont égales et de sens opposés, il résulte que *a*O est égal et opposé à O*b*, c'est-à-dire que les deux points *a* et *b* coïncident.

§ 40.

RÉSUMÉ. — Des forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan, appliquées à un système invariable étant définies par leurs lignes d'action et leur polygone des forces, il peut se présenter deux cas :

1° Le polygone des forces n'est pas fermé;

2° Il est fermé.

Dans le premier cas, le système admet toujours une résultante que l'on sait trouver (§ 36) par la construction d'un polygone funiculaire.

Dans le second, pour savoir à quoi le système est réductible, il faut aussi construire un polygone funiculaire. Les côtés extrêmes de ce polygone, quel qu'il soit, ne peuvent (le polygone des forces étant fermé) qu'être ou parallèles ou coïncidants.

S'il arrive qu'ils coïncident, les forces données sont en équilibre (§ 35).

S'ils sont parallèles, le système se réduit à un couple dont le polygone funiculaire construit fournit les deux forces et le bras de levier (§ 39 et 33).

Observons que, si l'on construisait un autre polygone, on trouverait un couple avec d'autres éléments. Cela prouve que, s'il n'existe pas une force unique équivalente à un couple, il existe, en revanche, une infinité de couples équivalents entre eux.

Étant donnés deux couples, il est facile de vérifier graphiquement s'ils sont équivalents. Pour qu'ils le soient, il faut et il suffit (§ 21) que les forces de l'un d'eux et celles de l'autre changées de sens se fassent équilibre. Nous savons vérifier si quatre forces se font équilibre. Ici le polygone des quatre forces se ferme et il suffit de vérifier si un de leurs polygones funiculaires se ferme aussi.

D'une manière générale, on vérifie de même si deux systèmes de forces quelconques situées dans un plan et appliquées à un solide invariable sont équivalents, en vérifiant s'il y a équilibre entre les forces de l'un des systèmes et celles de l'autre changées de sens.

§ 41.

EXEMPLES. 1° Forces quelconques. — Les *fig.* 14 et 14, *Pl. III*, contiennent les divers cas qui peuvent se présenter dans la composition des forces :

1° Les quatre forces

1, 2, 3, 4

représentées par

1, 2, 3, 4

admettent comme polygone funiculaire le polygone $A_0 1.2.3.4 B_0$

qui, par l'intersection 5 de ses côtés extrêmes, donne la résultante $5R = ab$.

2° Les cinq forces

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5R',$$

cette dernière égale et opposée à $5R$ et représentée par ba, sont évidemment en équilibre; leur polygone des forces représenté par les côtés

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 = ba$$

est fermé, ainsi que leur polygone funiculaire qui comprend la partie $A_0 1.2.3.4 B_0$ relative aux quatre premières forces; pour le terminer, il faut prolonger $4B_0$ jusqu'en 5, ce qui donne le côté 4.5 parallèle au rayon 4.5 (ou Ob), puis, par le point 5, tracer une parallèle au rayon 5.1 (ou Oa). Ce dernier côté coïncide avec le premier.

3° Les cinq forces

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5_1 x,$$

la dernière représentée par ba, par suite, parallèle à RR'.

Le polygone des forces est fermé; le polygone funiculaire est

$$A 1.2.3.4.5_1 B_1.$$

Ses côtés extrêmes $A_0 1$ et $5_1 B_1$ sont parallèles et les forces se réduisent à un couple dont les deux forces ont pour lignes d'action les côtés extrêmes $1 A_0$, $5_1 B_1$ et sont égales à aO et Oa d'après le lemme du § 33.

Dans les *fig.* 22 et 22 (*Pl. VI*) qui comprennent sept forces ayant pour lignes d'action

$$11',\ 22',\ 33',\ 44',\ 55',\ 66',\ 77',$$

et représentées par les côtés

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$$

du polygone des forces, on a montré comment on pourrait opérer, sans l'usage du polygone funiculaire, par compositions successives.

Les lignes d'action $11'$ et $22'$ se rencontrent en E, leur résultante passe par ce point et est représentée, sur le polygone des forces, par la diagonale (12): sa ligne d'action (12) est donc parallèle à

cette diagonale. Si on la prolonge jusqu'à son intersection avec 33′ en z et qu'on la compose avec cette dernière force, leur résultante est représentée, sur le polygone des forces, par la diagonale (123) et a pour ligne d'action (**123**); de même la résultante des quatre premières forces est représentée par la diagonale (1234) du polygone des forces et sa ligne d'action est (**1.2.3.4**), et ainsi de suite. La résultante R des sept forces est représentée par ab.

On voit que ce procédé, qui aurait l'inconvénient d'être en défaut si les forces données étaient parallèles et même si une résultante partielle ne rencontrait pas la force avec laquelle on veut la composer ou la rencontrait en dehors des limites de l'épure, n'est en réalité qu'un cas particulier de la méthode du polygone funiculaire.

Le polygone formé par les lignes successives

(**12**), (**123**), (**1234**), ...

n'est en effet, comme on le voit, autre que le polygone funiculaire relatif au pôle a.

Nous avons, sur la même épure et à titre de vérification, tracé le polygone funiculaire dont le pôle est O. C'est le polygone A**1.2.3.4.5.6.7**B.

On voit que l'intersection de ses côtés extrêmes A**1** et **7**B donne bien un point **8** de la résultante. Et ses divers côtés, par leurs intersections, donnent non seulement les résultantes partielles (**12**), (**123**), ..., mais aussi celles de forces consécutives telles que **2**, **3**, **4**. De plus elles donnent la faculté de choisir le pôle de façon que les rayons vecteurs et, par suite, les côtés du polygone funiculaire qui leur sont parallèles ne se coupent jamais sous des angles trop aigus; elle est applicable, que les forces soient parallèles ou non; enfin elle constitue une méthode, puisqu'elle fournit les conditions d'équilibre, celles nécessaires à l'existence d'une résultante ou d'un couple résultant.

2° Forces parallèles. — Quand les forces sont parallèles, les côtés du polygone des forces sont sur une même ligne droite. La *fig.* 31 (*Pl. VIII*) contient les lignes d'action de quatre forces parallèles

1, **2**, **3**, **4**;

le polygone de ces forces (*fig.* 31) a son origine en a et son extrémité en b.

Les côtés

$$A1, \ 1.2, \ 2.3, \ 3.4, \ 4B$$

du polygone funiculaire ayant son pôle en O sont respectivement parallèles aux rayons aboutissant aux points

$$a, \ 1.2, \ 2.3, \ 3.4, \ b.$$

L'intersection 5 des côtés extrêmes 1A et 4B donne un point de la résultante $5R = ab$.

Soit $5R'$ une force égale et opposée à R, de sorte que $5R'$ est représentée, sur le polygone des forces, par $ba = 5$. Elle fera équilibre aux quatre forces données, puisqu'elle est égale et opposée à leur résultante et l'on vérifie, en effet, que le polygone des cinq forces 1, 2, 3, 4, 5, ainsi que leur polygone funiculaire est fermé.

§ 42.

PROBLÈMES USUELS RELATIFS A LA COMPOSITION DES FORCES. — PROBLÈME I. — *Étant données plusieurs forces parallèles, trouver deux forces de même direction qu'elles, passant par des points donnés et leur faisant équilibre.*

Soient (*fig.* 93, *Pl. XXI*)

$$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6$$

les lignes d'action des forces données, et (*fig.* 93)

$$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6$$

les côtés de leur polygone.

Soient 7 et 8 les lignes d'action des forces inconnues et 7 et 8 leurs grandeurs cherchées. Supposons le problème résolu; portons $b\omega = 7$ et $\omega a = 8$ à la suite des forces connues, sur le polygone des forces; il devra se fermer; on reviendra donc en a et le point ω ou 7.8 est seul inconnu.

Construisons le polygone funiculaire relatif au pôle O. A cet effet, partant d'un point $8'$ de la ligne d'action 8, nous pourrons construire le contour $8'.1'.2'.3'.4'.5'.6'.7'$ dont les côtés sont respectivement parallèles aux rayons vecteurs issus de O et allant aux

sommets connus 8.1 ou a; 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, 5.6, 6.7 ou b. Et, comme le polygone doit se fermer, il suffit de joindre les points 7′ et 8′, puis de mener de O une parallèle à cette ligne; on aura le point 7.8 ou ω.

Ainsi, la règle est celle-ci : numérotez les forces données 1, 2, 3, 4, 5, 6; donnez les deux numéros suivants 7, 8 aux forces inconnues; puis, construisez un polygone funiculaire de pôle quelconque O des forces données; arrêtez les deux côtés extrêmes de ce polygone en leurs points d'intersection 7′ et 8′ avec les lignes d'action données; menez la corde 7′.8′ de ce polygone et, par le pôle, menez un rayon parallèle à cette corde. Il divisera la ligne ab qui ferme le polygone des forces en deux segments qui donnent les forces cherchées.

Rien ne serait changé à cette marche si les forces données n'étaient pas toutes de même sens ou si les lignes 7 et 8 ne comprenaient pas, entre elles, toutes les forces.

Problème II. — *Réduire un système de forces parallèles à deux forces de mêmes directions qu'elles, ayant des lignes d'action données.*

Si R et R′ sont les deux résultantes cherchées, les forces — R et — R′ égales et opposées à ces dernières maintiendront (§ 22) les forces données en équilibre.

La marche à suivre est donc la même que ci-dessus. Seulement les deux forces cherchées, au lieu d'être $7 = b\omega$ (*fig.* 23) et $8 = \omega a$, seront ces forces changées de sens.

Problème III. — *Étant données des forces quelconques, trouver deux forces les équilibrant et agissant suivant des lignes d'action données, parallèles à leur résultante.*

On procédera exactement comme dans le problème I. Les côtés 1, 2, 3, 4, 5, 6 du polygone des forces, au lieu d'être en ligne droite, formeront un contour polygonal : on mènera la droite ba qui ferme ce contour. On construira le polygone funiculaire 8′.1′.2′.3′.4′.5′.6′.7′ des forces connues en arrêtant les côtés extrêmes en leurs points d'intersection 7′ et 8′ avec les lignes d'action données; on joindra les extrémités 7′ et 8′ de ce polygone; et le rayon Oω parallèle à cette ligne donnera, par son intersection

avec la droite ba qui ferme le polygone des forces, les deux forces cherchées 7 et 8.

Problème IV. — *Étant données des forces quelconques, les ramener à deux forces agissant suivant des lignes d'action données parallèles à leur résultante.*

Même problème que le précédent, sauf que les forces obtenues seront changées de sens.

Problème V. — *Trouver la résultante de deux forces parallèles.*

On peut évidemment appliquer la méthode générale du polygone funiculaire. Elle est indiquée sur les *fig.* 26 et 26, *Pl. VII*, où les forces données ont, pour lignes d'action, 1 et 2 et, pour grandeurs, $1 = a\omega$ et $2 = \omega b$. La résultante passe par l'intersection 3 des côtés extrêmes A1 et 2B du polygone funiculaire relatif au pôle O. On ferait de même si les forces 1 et 2 étaient de sens contraires. Mais il est plus simple d'employer la marche suivante.

Soient (*fig.* 28, *Pl. VII*) 1 et 2 les lignes d'action des forces données, 1 et 2 leurs grandeurs. Sur la ligne d'action de chaque force portons la grandeur de *l'autre* force, de sorte que, sur la ligne indéfinie 1, à partir d'un point quelconque, on porte $a_2 b_2 = 2$ et, sur celle 2 aussi, à partir d'un point quelconque, on porte $a_1 b_1 = 1$. On joint l'origine de chacune de ces deux lignes à l'extrémité de l'autre, ce qui donne les deux droites $a_1 b_2$ et $a_2 b_1$. Leur point d'intersection C appartient à la résultante.

En effet, par le point b_2, menons $b_2 b'_2$ parallèle à $a_1 b_1$, de sorte que $b_1 b'_2 = 2' = 2$. On peut donc considérer $a_1 b_1 b'_2$ comme le polygone des deux forces données. Construisons un polygone funiculaire de ces forces en prenant le point b_2 pour pôle, en sorte que les trois rayons sont $b_2 a_1$, $b_2 b_1$, $b_2 b'_2$. Prenons le point a_1 pour point de départ de ce polygone funiculaire. Alors, son premier côté parallèle au rayon $a_1 b_2$ sera ce rayon lui-même ; son deuxième côté parallèle au rayon $b_2 b_1$ sera également ce rayon même ; le troisième et dernier côté s'obtient en menant par b_1 une parallèle au rayon $b_2 b'_2$; c'est la ligne $b_1 a_2$. Ainsi, le polygone funiculaire cherché est celui $a_1 b_2 b_1 a_2$. L'intersection de ses deux côtés extrêmes $a_1 b_2$ et $b_1 a_2$ donne un point de la résultante. Il est donc

ainsi établi que le point C appartient à la résultante. La ligne d'action 3 de cette résultante est d'ailleurs parallèle aux forces données. Elle est égale à la somme géométrique de ces forces, c'est-à-dire à leur somme arithmétique, si elles sont de même sens comme dans la *fig.* 28, et à leur différence arithmétique si elles sont de sens contraires comme dans la *fig.* 25.

On voit que, dans le premier cas, la ligne d'action de la résultante est entre les lignes d'action des composantes; dans le second, elle est en dehors de la zone du plan bordée par ces lignes et placée du côté de la plus grande des deux forces données, celle dont la ligne d'action est 2' et la grandeur 2 et a même sens que cette force.

Dans les deux cas, les triangles $a_1 b_1 C$ et $a_2 b_2 C$ étant semblables, leurs bases sont entre elles comme leurs hauteurs, de sorte que, si p_1 ou p_2 sont les distances de la résultante ou du point C aux deux composantes 1 et 2, on a

$$1 : 2 :: p_2 : p_1,$$

c'est-à-dire que *la ligne d'action de la résultante est telle que ses distances aux lignes d'action des deux composantes sont en raison inverse de ces dernières.*

Si l'on désigne par F_1 et F_2 les deux composantes 1 et 2, on a donc

$$F_1 \times p_1 = F_2 \times p_2.$$

Remarque. — Un couple peut être considéré comme une force infiniment petite dont le point d'application est infiniment éloigné, *mais de telle sorte que le produit de cette force par la distance de son point d'application à l'une quelconque des deux forces du couple reste fini et égal au produit de la force du couple par son bras de levier.* En effet, de l'équation ci-dessus on tire

$$\frac{F_2}{p_1} = \frac{F_1}{p_2} = \frac{F_2 - F_1}{p_1 - p_2},$$

d'où

$$(F_2 - F_1)p_1 = F_2(p_1 - p_2).$$

Supposons que, F_2 restant fixe, F_1 grandisse de façon à devenir égale à F_2 et qu'ainsi, à la limite, les deux forces forment un couple. Le second membre reste fixe, puisque c'est le produit de la force F_2 du couple par son bras de levier $p_2 - p_1$. Donc, le

premier membre reste aussi fixe. Mais, comme le facteur $F_2 - F_1$ décroît indéfiniment, celui p_1 croît indéfiniment.

Le produit de la force d'un couple par son bras de levier se nomme le *moment du couple.*

PROBLÈME VI. — *Décomposer une force donnée en deux autres de même direction qu'elle et ayant des lignes d'action données.*

Ce problème est évidemment un cas particulier du problème II. Mais il peut se résoudre plus simplement, comme l'inverse du précédent. Soit 3 la ligne d'action de la force à décomposer (*fig.* 28, *Pl. VII*) en deux autres dont les lignes d'action sont 1 et 2 et soit $a_1 b'_2$ la grandeur de la force donnée 3 que nous portons sur l'une des lignes d'action données, par exemple celle 2. Nous joignons les extrémités a_1 et b'_2 de cette ligne à un point quelconque b_2 de la ligne d'action donnée 1, et, par le point C où l'un de ces deux rayons, celui $a_1 b_2$, coupe la ligne d'action 3, nous menons une parallèle à l'autre; le point b_1 où elle coupe 2 détermine les deux composantes $a_1 b_1 = 1$ et $b_1 b'_2 = 2'$ dirigées respectivement suivant les lignes d'action 1 et 2; car, en composant ces deux forces, on obtient, en vertu du problème précédent, une résultante qui a bien 3 pour ligne d'action et $a_1 b_2 = 3$ pour grandeur.

Dans le cas où la ligne d'action 3 est entre les lignes d'action données 1 et 2 (*fig.* 28), on trouve deux composantes 1 et 2 toutes deux de même sens que la force donnée; dans le cas contraire, (*fig.* 25), les deux composantes obtenues sont de sens contraires.

PROBLÈME VII. — *Décomposer une force donnée en deux autres de même direction qu'elle et dont l'une soit donnée en grandeur, direction et sens.*

Soit toujours (*fig.* 28) 3 la ligne d'action de la force à décomposer et 3 sa grandeur.

Soit 2 la ligne d'action de la composante donnée et 2 sa grandeur. Sur cette ligne 2 portons bout à bout $a_1 b'_2 = 3$ et $b'_2 b_1 = 2'$ et égale à la force donnée 2 *changée de sens,* de sorte que si, comme sur la *fig.* 28, les deux forces données 3 et 2 sont de même sens, le point b_1 est compris entre a_1 et b'_2; c'est l'inverse (*fig.* 25) si les forces 3 et 2 sont de sens contraires. On joint les points a_1

et b_1 à un point quelconque C de la ligne d'action 3 de la force à décomposer.

Par le point b'_2 on mène une parallèle au rayon b_1C jusqu'à sa rencontre avec celui a_1C en b_2 ; on aura un point de la ligne d'action 1 de la composante inconnue, laquelle est d'ailleurs, en grandeur et sens, représentée par $a_1 b_1 = 1$.

Problème VIII. — *Équilibrer une force donnée par deux autres de même direction qu'elle et ayant des lignes d'action données.*

Il suffit (§ 21) de résoudre le problème VI et de changer le sens des forces obtenues dans ce problème.

Problème IX. — *Équilibrer une force donnée par deux autres de même direction qu'elle et dont l'une soit donnée.*

Il suffit de résoudre le problème VII après avoir changé le sens de la force donnée et de changer ensuite le sens de la force obtenue.

§ 43.

Propriétés géométriques des polygones funiculaires — Théorème I. — *De quelque façon qu'on déplace le pôle du polygone funiculaire d'un système de forces données, le lieu des points de rencontre de deux quelconques de leurs côtés est une droite parallèle à la somme géométrique des forces comprises entre ces côtés.*

Ce théorème est une conséquence évidente de ce que (§ 37) le point de rencontre de deux côtés d'un polygone funiculaire appartient à la ligne d'action de la résultante des forces comprises entre ces côtés.

Théorème II. — *Si deux systèmes de forces* (F) *et* (F') *sont équivalents et que l'on construise deux polygones funiculaires, l'un* P *relatif aux forces* (F), *l'autre* P' *relatif aux forces* (F'), *ces deux polygones ayant même pôle et même point de départ, leurs côtés extrêmes coïncideront.*

Il est sous-entendu, dans cet énoncé, qu'en portant les forces

(F) et les forces (F′) bout à bout pour construire les polygones de ces deux systèmes de forces, on part du même point, en sorte que ces deux polygones ont, par hypothèse, même origine. Soit a cette origine commune ; désignons par b et b' les extrémités des polygones des deux systèmes de forces.

Soient O le pôle et A le point de départ commun aux deux polygones funiculaires P et P′. Le premier côté du polygone P coïncidera nécessairement avec le premier côté du polygone P′, puisque, par hypothèse, ces deux côtés passent l'un et l'autre par le point A et sont l'un et l'autre parallèles au rayon Oa issu du pôle commun et allant à l'origine commune des deux polygones des forces. Cette coïncidence existerait en vertu des hypothèses faites, même si les deux systèmes de forces (F) et (F′) n'étaient pas équivalents.

Il s'agit donc simplement de montrer que, dans le cas où ces systèmes sont équivalents, les derniers côtés des deux polygones coïncident aussi.

Or les forces (F) sont (§ 33) réductibles à deux forces f et f' dirigées suivant les côtés extrêmes du polygone P et représentées par les rayons extrêmes aO et Ob issus du pôle de ce polygone ; de même les forces (F′) sont réductibles à deux forces f et f'' dirigées suivant les côtés extrêmes du polygone P′ et représentées par les rayons Oa et Ob', de sorte que la force f dirigée suivant le premier côté est la même dans les deux systèmes. Or les deux deux systèmes de forces (F) et (F′) étant équivalents, il en est de même des deux systèmes formés l'un par les deux résultantes

$$f, f',$$

l'autre par les deux résultantes

$$f, f''.$$

Les forces f' et f'' sont donc équivalentes, c'est-à-dire égales, de même sens et ayant même ligne d'action, ce qui établit bien la proposition énoncée et montre d'ailleurs que les extrémités b et b' des deux polygones des forces coïncident aussi, ce qui résulte, en effet, des conditions d'équivalence précédemment établies.

Corollaire. — *Le lieu des pôles des polygones funiculaires d'un système de forces, assujettis à ce que leurs côtés extrêmes*

passent chacun par un point fixe, ne change pas si l'on remplace ces forces par des forces équivalentes quelconques.

En effet, soit O un point du lieu des pôles des polygones funiculaires d'un système de forces (F), ces polygones étant assujettis à se terminer en deux points fixes A et B. Si (F′) est un système de forces équivalent à celui (F), le point O appartient aussi au lieu des pôles des polygones funiculaires des forces (F′), assujettis à se terminer en A et B. En effet, si l'on construit un polygone funiculaire de ces dernières forces, ayant le point O pour pôle et le point A pour point de départ, son dernier côté passera par le point B; car ce dernier côté coïncide avec celui du polygone relatif au système (F) de même pôle O et ayant le point A comme point de départ, et ce dernier, par hypothèse, passe par le point B.

Ainsi, tout point O du lieu relatif aux forces (F) appartient au lieu relatif aux forces (F′).

On verrait de même que tout point du lieu relatif aux forces (F′) appartient à celui relatif aux forces (F). Les deux lieux sont donc identiques.

Théorème III. — *Le lieu des pôles des polygones funiculaires, dont deux côtés sont assujettis à passer chacun par un point fixe, est une droite parallèle à celle qui joint les deux points fixes.*

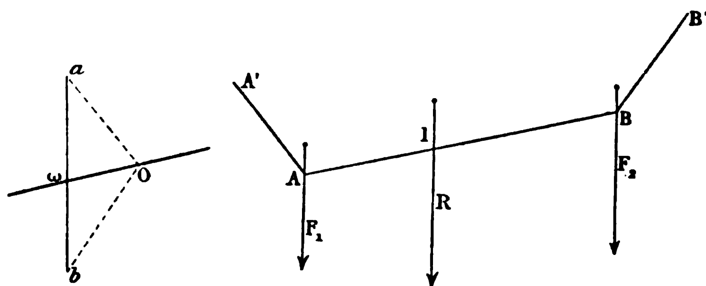
Supposons d'abord que ce soient les côtés extrêmes du polygone funiculaire d'un système de forces qui doivent passer par deux points A et B (*fig.* 4, p. 58), et supposons, en premier lieu, que ces forces admettent une résultante R. Cette résultante est représentée, sur le polygone des forces, par la ligne ab, et sa ligne d'action R peut être obtenue par la construction d'un polygone funiculaire quelconque. Décomposons la force R en deux autres F_1 et F_2, de même direction qu'elle et passant par les points donnés A et B.

Soient respectivement $a\omega$ et ωb les grandeurs de ces deux forces; on sait (§ 42, Prob. V) que le point ω divise la ligne ab en raison inverse des distances connues des points A et B à la ligne d'action de la résultante et est compris entre les points a et b ou sur le prolongement de la ligne ab, suivant que la ligne R elle-même coupe la droite AB entre les points A et B ou en dehors de AB, de sorte que le point ω est facile à déterminer.

Les deux forces F_1 et F_2 forment un système équivalent à celui proposé ; il suffit donc, en vertu du corollaire du théorème précédent, de chercher le lieu des pôles O des polygones funiculaires de ces deux forces, dont les côtés extrêmes passent par les points A et B. Or il est aisé de voir que ce lieu est la parallèle à AB menée par le point ω. Soit, en effet, O un point pris sur cette parallèle. Construisons le polygone funiculaire relatif aux deux forces F_1 et F_2 ayant le point O pour pôle, en faisant passer le premier côté par le point A. Ce premier côté sera donc une droite A′A parallèle au rayon aO, le second côté sera une parallèle au rayon Oω, c'est-à-dire la droite AB, et le dernier côté sera une droite BB′ parallèle à Ob.

Les côtés extrêmes A′A et B′B passent bien par les points A

Fig. 4.



et B, et comme, en vertu du théorème II, ces deux côtés coïncident avec les côtés extrêmes de celui des polygones funiculaires des forces données qui aurait le point O pour pôle et partirait du point A, la proposition est établie. D'ailleurs, si Oω n'était pas parallèle à AB, le dernier côté ne pourrait pas passer par le point B lorsque le premier passe par le point A; la droite menée du point ω parallèlement à AB jouit donc de la propriété demandée à l'exclusion de tous les autres points du plan.

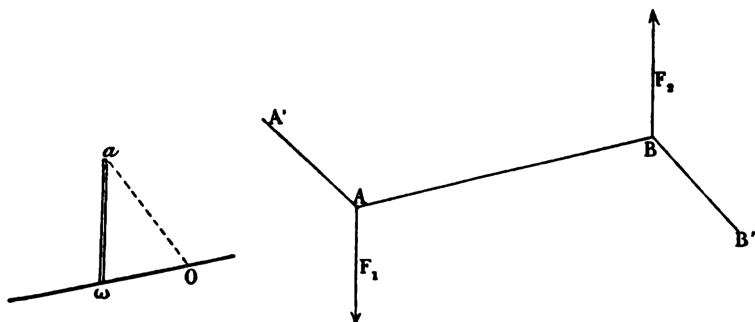
Supposons à présent (*fig.* 4 *bis*) que les forces données se réduisent à un couple; ce couple se trouvera par la construction d'un polygone funiculaire quelconque des forces données. Décomposons chacune des deux forces de ce couple en deux autres de même direction qu'elle et passant aux points A et B. Nous aurons donc, au point A, deux forces dont les lignes d'action coïncident et qu'on ajoutera entre elles; de même au point B, ce qui fournira à

la place du couple d'abord trouvé un nouveau couple dont les deux forces F_1 et F_2 passent par les points A et B.

Du point a, origine du polygone des forces données (lequel est ici fermé), menons $a\omega$ égal à F_1 et ωa égal à F_2.

Les deux forces F_1 et F_2 représentées par $a\omega$ et ωa forment un système équivalent aux forces données : il suffit donc (Th. II, Corollaire) de trouver le lieu des pôles O des polygones funiculaires relatifs à ces deux forces et dont les côtés extrêmes passent par les points donnés A et B. Or, on voit, comme dans le cas précédent, que ce lieu est une parallèle à AB menée par le point ω. Les côtés extrêmes A'A et BB' sont ici parallèles, pour les forces données comme sur celles du couple résultant par lequel on les a remplacées.

Fig. 4 *bis*.



Si les côtés qui doivent passer par deux points fixes n'étaient pas les côtés extrêmes d'un polygone funiculaire, on regarderait ces côtés comme les côtés extrêmes des polygones funiculaires relatifs aux forces comprises entre eux et l'on procéderait sur la résultante partielle (ou le couple résultant) de ces forces, comme on vient de le faire sur la résultante ou le couple résultant de toutes les forces données.

Remarque. — Quand les forces données admettent une résultante R (*fig.* 4, p. 58), suivant que cette résultante coupe ou non la ligne AB entre les points A et B, le point ω se trouve ou non entre les points a et b, et toujours les segments $a\omega$ et ωb sont en raison inverse de ceux AI et IB que la résultante détermine sur AB.

THÉORÈME IV. — *Les côtés correspondants de deux polygones funiculaires quelconques d'un système de forces se coupent en des points placés tous sur une même droite parallèle à celle qui joint les pôles de ces deux polygones.*

Considérons (*fig.* 14, *Pl. III*) quatre forces, dont les lignes d'action sont les lignes munies de flèches

1, 2, 3, 4,

et dont les grandeurs sont représentées (*fig.* 14) par les côtés

1, 2, 3, 4

du polygone des forces.

Soit $A_0 1.2.3.4 B_0$ un polygone funiculaire de ces forces relatif au pôle quelconque O.

Concevons qu'on trace le polygone funiculaire de ces mêmes forces relativement à un autre pôle quelconque O'.

Désignons par 1', 2', 3', 4' les sommets de ce second polygone (non tracé) placés sur les lignes droites 1, 2, 3, 4. Le premier côté de ce second polygone coupe le côté correspondant du polygone relatif au pôle O en un certain point. Désignons par A_0 ce point.

De même le dernier côté du second polygone coupe le côté analogue du premier polygone en un point. Désignons par B_0 ce point, de sorte que le second polygone sera désigné par $A_0 1'.2'.3'.4' B_0$.

Il s'agit de démontrer :

1° Que deux autres côtés correspondants quelconques des deux polygones, par exemple 4.3 et 4'.3', se coupent en un point C placé aussi sur la droite $A_0 B_0$;

2° Que cette droite qui contient ainsi les points d'intersection de tous les côtés correspondants est parallèle à celle OO' qui joint les deux pôles.

Ce dernier point est évident, en vertu du théorème précédent.

Pour établir le premier, considérons les polygones funiculaires

$A_0 1'.2'.3' C$,
$A_0 1.2.3 C$,

de pôles O et O', relatifs aux trois forces 1, 2, 3.

En vertu du théorème précédent, le lieu des pôles O pour lesquels les côtés extrêmes de ces polygones passent par les points

A_0 et C est une droite parallèle à A_0C. Donc OO′ est parallèle à A_0C, et, comme OO′ est aussi parallèle à A_0B, le point C est sur cette dernière ligne.

Des deux théorèmes précédents résultent immédiatement les deux suivants :

THÉORÈME V. — *Lorsque deux côtés d'un polygone funiculaire pivotent autour de deux points fixes, tous les autres côtés pivotent autour de points fixes, tous situés sur la droite qui joint les premiers et le lieu des pôles est une parallèle à cette même droite.*

THÉORÈME VI. — *Lorsque le pôle d'un polygone funiculaire décrit une droite et qu'un seul côté de ce polygone pivote autour d'un point fixe, tous les autres côtés pivotent autour de points fixes placés sur une parallèle menée, par le premier point fixe, à la droite que décrit le pôle.*

Exemple. — Sur les *fig.* ~~17~~ 16 et ~~17~~ 16, *Pl. IV*, sont tracés les polygones funiculaires des sept forces dont les lignes d'action sont

11′, 22′, 33′, 44′, 55′, 66′, 77′,

et les grandeurs

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

relativement aux pôles O et O′.

Le polygone relatif au pôle O est tracé en lignes pleines, l'autre en traits discontinus.

Les pivots des sept côtés sont

I, J, K, L, M, N, T,

situés sur la droite ZZ_1 parallèle à celle zz_1 qui joint les deux pôles.

La figure permet aussi de vérifier que le polygone funiculaire relatif au pôle O donne, comme cela doit être, la même résultante si l'on intervertit l'ordre des forces que l'on compose ; si, au lieu de suivre l'ordre 1, 2, 3, 4, 5, ... du polygone des forces, on adopte celui 1, 2, 3, 5, 4, ...

§ 43 *bis*.

PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES AUX POLYGONES FUNICULAIRES DES FORCES PARALLÈLES. — Considérons (*fig.* 93, *Pl. XXI*) un système de forces

parallèles dont les lignes d'action sont

1, 2, 3, 4, 5, 6,

le polygone des forces *ab* (*fig.* 93) ayant pour côtés

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Pour simplifier le langage nous supposerons ces forces verticales.

Construisons un polygone funiculaire quelconque de pôle O, et coupons ses côtés extrêmes par deux verticales arbitraires, mais fixes, 77′ et 88′ qui rencontrent ces côtés en 7′ et 8′. Menons la corde 7′.8′ et par le pôle, le rayon $O\omega$ parallèle à cette corde. Nous savons (Prob. I, § 42) que $b\omega = 7$ et $\omega a = 8$ sont les grandeurs de deux forces qui, appliquées suivant les verticales 77′ et 88′, feraient équilibre aux forces données.

Ces deux forces 7 et 8 sont évidemment indépendantes du polygone funiculaire qui a servi à les obtenir.

De là, résultent des propriétés très importantes, particulières aux polygones funiculaires de forces parallèles.

Théorème VII. — *Si l'on construit un polygone funiculaire quelconque d'un système de forces parallèles (verticales pour fixer les idées), qu'on prolonge ses deux côtés jusqu'à leurs rencontres en* 7′ *et* 8′ *avec deux verticales fixes,* mais choisies arbitrairement, *et qu'on mène la corde* 7′.8′ *qui joint ces deux points, le produit du segment* ab *qu'une verticale quelconque détermine entre le polygone et la corde, par la distance polaire d, est le même pour tous les polygones funiculaires des forces considérées.*

Considérons en effet une verticale quelconque déterminant, entre le polygone et sa corde, une ordonnée ab.

Supposons que ce soit le côté 2′.1′ du polygone funiculaire qui se trouve coupé par cette verticale.

Prolongeons le côté 2′.1′ jusqu'à son intersection en I avec la corde. D'après la propriété fondamentale des polygones funiculaires (§ 33), le point I où ce côté coupe la corde 7′.8′ appartient à la résultante R des forces situées entre les verticales 8 et ab. Ici ce sont les deux forces ayant pour lignes d'action 88′ et 11′ et pour grandeurs $\omega a = 8$ et $aC = 1$.

La grandeur et la position de cette résultante sont indépendantes du polygone funiculaire choisi pour les déterminer. Un autre polygone donnerait un autre point I de la verticale R, mais la distance de ce nouveau point à la verticale ab serait toujours égale à I*i*. Quant à la grandeur de R représentée sur le polygone des forces par la différence $8 - 1 = \omega C$, elle ne dépend pas non plus du polygone funiculaire employé.

Or, les deux triangles, Iba et OCω sont semblables, puisque le côté Oω est parallèle à la corde 7'.8', comme l'indique la solution du problème I, § 42, le côté 1'.2' est parallèle au rayon 1.2 ou OC, et les deux autres côtés sont verticaux. Par suite, les bases ab et Cω de ces deux triangles sont entre elles comme leurs hauteurs, d'où, en appelant la distance polaire d,

$$\frac{ab}{C\omega} = \frac{Ii}{d}$$

ou

$$ab \times d = C\omega \times Ii$$

ou

$$z \times d = C\omega \times Ii,$$

en désignant, comme nous le ferons habituellement, par z les ordonnées verticales telles que ab déterminées entre le périmètre d'un polygone funiculaire et une de ses cordes.

Le second membre étant indépendant du polygone funiculaire considéré, il doit en être de même du premier.

On peut encore énoncer la proposition sous la forme suivante :

Théorème VII *bis*. — *Qu'on construise deux polygones funiculaires quelconques, d'un même système de forces verticales, de distances polaires* d_0 *et* d, *qu'on trace deux verticales fixes qui coupent les deux côtés extrêmes du premier de ces polygones respectivement en* A_0 *et* B_0 (*fig.* 18 et 19, *Pl. V*), *les deux côtés extrêmes du second respectivement en* A *et* B; *qu'on mène les cordes* A_0B_0 *et* AB; *les ordonnées* z_0 *et* z *déterminées par une troisième verticale quelconque entre chaque polygone et sa corde sont en raison inverse des distances polaires :*

$$(a) \qquad z \times d = z_0 \times d_0.$$

Corollaire I. — *Ayant tracé un premier polygone funiculaire d'un système de forces parallèles, de distance polaire*

quelconque d_0, *coupons-le par une droite entièrement arbitraire* A_0B_0 (*fig.* 18, *Pl. V*); *puis, à partir d'une autre droite elle-même arbitraire* AB, *menons* (*fig.* 19) *des ordonnées verticales* z *proportionnelles aux ordonnées correspondantes* z_0 *du premier polygone comptées depuis* A_0B_0 *et étant à celles-ci dans un rapport arbitrairement choisi* $d_0 : d$; *nous aurons un nouveau polygone funiculaire des forces données, de distance polaire d.*

En effet, soient A_0 et B_0 les points d'intersection des côtés extrêmes du polygone funiculaire avec la droite A_0B_0 et soient A et B les points d'intersection du second polygone tracé avec la ligne AB. Par la construction même, les points A_0 et A sont sur une même verticale, ainsi que les points B_0 et B. Or, si l'on voulait construire un polygone funiculaire passant par les points A et B et de distance polaire d, il suffirait, d'après l'équation (a) ci-dessus, de prendre les ordonnées z de façon qu'elles soient à celles correspondantes z_0 dans le rapport $d_0 : d$.

Corollaire II. — *Si, en particulier, on prend les ordonnées* z *égales à celles* z_0, *le nouveau polygone funiculaire aura même distance polaire que l'ancien.*

§ 44.

NOMBRE DE CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR TRACER UN POLYGONE FUNICULAIRE. — Pour définir un polygone funiculaire d'un système de forces, il suffit de connaître : 1° son pôle; 2° le point de départ, c'est-à-dire un point par lequel doit passer le premier côté du polygone.

Pour définir un point dans un plan, il faut connaître deux lignes sur lesquelles il doit se trouver ou, ce qui revient au même, ses deux coordonnées; cela fait deux conditions.

Assujettir un point à se trouver sur une droite donnée ou inversement assujettir une droite à passer par un point donné, c'est lui imposer une seule condition.

Ainsi, donner le pôle d'un polygone funiculaire, c'est donner deux conditions, tandis qu'assujettir son premier côté (ou généralement un de ses côtés) à passer par un point, c'est donner une seule condition. De là résulte qu'un polygone funiculaire relatif à un système de forces est entièrement défini par trois conditions.

Si on se les donne, le pôle et le point de départ sont définis (il peut y avoir plusieurs solutions, mais non une infinité). Si l'on ne s'en donne que deux, le pôle peut décrire une ligne droite ou courbe, dans le plan, et à chaque point de cette ligne répond un ou un nombre fini de polygones. Si l'on n'impose qu'une seule condition, tous les points du plan ou tout au moins des points couvrant une aire et ne formant plus une simple ligne peuvent être pris pour pôles, et à chacun d'eux répond, en général, un ou un nombre fini de polygones.

Si l'on ne donne aucune condition, non seulement tous les points du plan peuvent être pris pour pôles, mais à chacun d'eux répond une infinité de polygones, puisque le point de départ peut être pris arbitrairement.

§ 45.

PROBLÈMES RELATIFS AU TRACÉ DES POLYGONES FUNICULAIRES. — PROBLÈME I. — *Trouver le lieu des pôles des polygones funiculaires d'un système de forces, dont les deux côtés extrêmes sont assujettis à passer par des points donnés.*

Supposons (*fig.* 14, *Pl. III*) que les quatre lignes munies de flèches 1, 2, 3, 4 soient les lignes d'action de quatre forces représentées sur le polygone des forces (*fig.* 14) par les côtés 1, 2, 3, 4.

On demande de trouver le lieu des pôles des polygones funiculaires de ces forces dont les côtés extrêmes passent par deux points donnés A et B.

Nous savons par le théorème III du § 43 que le lieu cherché est une droite, et ce théorème combiné avec le problème III du § 42 nous indique la marche suivante :

Déterminer la résultante R des forces données, ce qui exige le tracé d'un polygone funiculaire quelconque (non assujetti aux conditions du problème actuel).

Soit 5.1.2.3.4.5 ce polygone dont le pôle est O.

Soit 5R la ligne d'action de la résultante représentée sur le polygone des forces par la ligne *ab* et formée par l'intersection des côtés extrêmes du polygone tracé.

Par les points donnés A et B, menons Aα et Bβ parallèles à R

jusqu'à leur rencontre en α, β avec ces deux côtés. Par le pôle O menons une parallèle à la droite $\alpha\beta$ qui ferme le polygone; le point ω où cette parallèle coupe ab détermine les deux forces $a\omega = F_1$ et $\omega b = F_2$ qui, appliquées en A et B, seraient équivalentes à celles données.

Donc le lieu est la parallèle à AB menée par le point ω.

Si les forces se réduisaient à un couple, la marche analogue serait facile à trouver; mais nous verrons plus tard un moyen immédiat de remplacer un couple par un autre dont les forces passent par deux points donnés A et B et, cette opération faite, la démonstration du théorème III du § 43 indique immédiatement la position de la droite qui forme le lieu cherché.

Problème II. — *Trouver le lieu des pôles des polygones funiculaires d'un système de forces dont deux côtés quelconques passent par deux points donnés.*

Supposons que les lignes d'action des forces données portent les numéros

$$1, 2, 3, \ldots, i-1, i, \ldots, j-1, j, \ldots, n$$

et les côtés correspondants du polygone des forces, ceux

$$1, 2, 3, \ldots, i-1, i, \ldots, j-1, j, \ldots, n.$$

Le polygone funiculaire d'un système de n forces a $n+1$ côtés; supposons qu'on demande que ce soit le $i^{\text{ième}}$ et le $j^{\text{ième}}$ qui passent chacun par un point donné. Ce sont les côtés extrêmes de la partie du polygone funiculaire qui est relative aux forces dont les lignes d'action sont

$$i, \ i+1, \ \ldots, \ j-1.$$

Il suffit donc de laisser de côté toutes les autres forces et de procéder, sur ces dernières, comme dans le problème précédent.

Ainsi, si, dans l'exemple précédent, on demande que le premier côté passe par un point A et l'avant-dernier 3.4 par un point C, on laissera de côté la force 4. On déterminera, à l'aide d'un polygone funiculaire quelconque, la résultante des trois premières forces représentées sur le polygone des forces par ac et dont la ligne d'action passe par l'intersection des côtés 4.3 et 5.1; on pro-

cédera, sur cette résultante partielle, comme nous l'avons fait dans le problème précédent.

Ici, le point C ayant été pris sur la droite AB du problème précédent, on devra, comme vérification, trouver le même lieu, en vertu du théorème IV, du § 43.

Problème III. — *Déterminer le polygone funiculaire d'un système de forces dont les côtés extrêmes sont assujettis à passer par deux points donnés* A, B *et le* $i^{ème}$ *côté par un point* C.

1° Cherchez la droite lieu des pôles des polygones dont les côtés extrêmes sont assujettis à passer par les points A et B (Problème I).

2° Cherchez de même la droite lieu des pôles des polygones dont le premier côté est assujetti à passer par le point A et le $i^{ième}$ par le point C (Problème II).

Le point d'intersection de ces deux droites donnera le pôle du polygone cherché. Comme vérification, on pourrait chercher le lieu des pôles des polygones dont le dernier côté est assujetti à passer par le point B et le $i^{ième}$ par le point C. On devrait trouver la même solution.

Au pôle trouvé répond un polygone unique, puisque le point de départ est donné.

Problème III *bis*. — *Même problème que le précédent pour des forces parallèles.*

Quand il s'agit de forces parallèles, la solution générale qui précède peut être notablement simplifiée.

Soit (*fig.* 19, *Pl. V*) un système de forces parallèles dont les lignes d'action sont

1, 2, 3, 4, 5

représentées sur le polygone des forces (*fig.* 18) par les longueurs

1, 2, 3, 4, 5.

On demande de tracer le polygone funiculaire de ces forces dont les côtés extrêmes passent par deux points A et B et dont le côté compris entre les forces 1 et 2 passe par le point C.

A cet effet, traçons un polygone funiculaire quelconque des forces

données, celui dont le pôle arbitrairement choisi est O_0. Soit (*fig.* 18)

$$A_0 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 B_0$$

ce polygone.

Désignons par A_0 et B_0 les points où les verticales des points donnés A et B coupent ses côtés extrêmes.

Menons la verticale du point C qui coupe la droite donnée AB en c et détermine dans le polygone funiculaire de pôle O_0 une ordonnée $c_0 C_0$.

Amplifions les ordonnées des sommets de ce polygone dans le rapport $Cc : C_0 c_0$.

On forme ainsi un polygone $A_0 1'_0 2'_0 3'_0 4'_0 5'_0 B_0$; on voit que, pour faire cette opération, il suffit de prolonger le côté $2_0 1_0$ du premier polygone jusqu'à sa rencontre en s avec la corde BA et de joindre $s C'_0$, le point C'_0 étant tel que $c_0 C'_0 = cC$. On obtient ainsi les sommets $1'_0$ et $2'_0$; en procédant de même sur $2_0 3_0$, si le point de rencontre n'est pas trop éloigné, on aura le sommet $3'_0$ et ainsi de suite.

Le nouveau polygone obtenu est encore un polygone funiculaire des forces données (§ 43 *bis*, corollaire II).

Portons, à partir de AB, sur les lignes d'action des forces données, des ordonnées égales à celles correspondantes de ce dernier polygone; nous formerons un polygone A1.2.3.4.5B qui passe évidemment par les trois points A, B, C.

D'ailleurs c'est encore un polygone funiculaire des forces données (§ 43 *bis*, corollaire I): donc c'est le polygone cherché.

PROBLÈME IV. — *Déterminer le polygone funiculaire d'un système de forces parallèles dont les côtés extrêmes sont assujettis à passer par deux points donnés et dont la distance polaire d soit donnée.*

Traçons un polygone funiculaire de distance polaire d et d'ailleurs arbitraire. Soit (mêmes figures que dans le problème précédent) $A_0 1'_0 2'_0 3'_0 4'_0 5'_0 B_0$ ce polygone.

Soient A_0 et B_0 les points où les verticales des points A et B coupent ses côtés extrêmes. Menons la corde $A_0 B_0$ et à partir de AB portons, sur les lignes d'action des forces données, des ordon-

nées égales à celles du polygone tracé, comptées depuis $A_0 B_0$. On formera un polygone A1.2.3.4.5B qui passe par les points A et B. C'est d'ailleurs un polygone funiculaire des forces données, ayant même distance polaire que celui d'où il est déduit (§ 43 *bis*, corollaire I). C'est donc le polygone cherché.

Si l'on porte les mêmes ordonnées au-dessus de la ligne AB, on aura une seconde solution A1′2′3′4′5′B.

Le problème comporte en effet deux solutions. Si l'on cherche les pôles O et O′ relatifs à chacun des deux polygones obtenus, ils se trouveront naturellement sur une parallèle à la ligne AB en vertu du théorème V du § 43 et à égale distance *d* du polygone des forces.

§ 45 *bis*.

DES COURBES FUNICULAIRES (¹). — Toutes les propositions établies relativement aux polygones funiculaires d'un nombre fini de forces subsistent, quelque nombreuses et voisines que soient ces forces. Elles sont donc encore vraies lorsque les forces se succèdent d'une manière continue. Les polygones funiculaires deviennent alors des *courbes funiculaires* et les polygones des forces deviennent des *courbes* des forces, sauf dans le cas de forces parallèles où les forces continuent toujours à occuper une portion de ligne droite quand elles sont portées bout à bout.

Les côtés des polygones funiculaires et des forces deviennent respectivement les tangentes aux courbes funiculaires et des forces. Et, comme les côtés d'un polygone funiculaire sont parallèles aux rayons polaires correspondants, que d'autre part les côtés du polygone des forces sont parallèles aux lignes d'action des forces, il s'ensuit que, dans le cas de forces continues, les tangentes à une courbe funiculaire sont parallèles aux rayons polaires correspondants, les tangentes à la courbe des forces sont parallèles aux lignes d'action des forces; enfin les éléments infiniment petits pris sur la courbe des forces, lesquels tiennent lieu des côtés du polygone des forces, représentent les grandeurs des forces agissant aux points correspondants de la courbe funiculaire.

(¹) *Voir* aussi Notes III et III *bis*.

Ainsi, soit (*fig.* 20, *Pl. V*) AB une courbe quelconque qui soit regardée comme la courbe funiculaire, relative au pôle O (*fig.* 20), d'un système de forces dont la courbe des forces est ab. Si l'on mène un rayon polaire quelconque Op, puis qu'on mène une tangente à la courbe funiculaire parallèle à ce rayon, le point de contact P sera le point de la courbe funiculaire correspondant au point p; de même, si l'on mène un rayon Oq, on obtient un point correspondant Q. En vertu de la propriété mécanique fondamentale (§ 37) des polygones funiculaires, applicable aux courbes funiculaires, le point S où se coupent les tangentes en P et Q est un point de la résultante de toutes les forces en nombre illimité agissant entre P et Q et cette résultante elle-même est représentée par la corde pq. La résultante de toutes les forces passe par le point de rencontre des tangentes extrêmes AT et BT′ parallèles aux rayons polaires extrêmes Oa et Ob et elle est représentée en grandeur, direction et sens par la droite ab qui va de l'origine à l'extrémité de la courbe des forces.

Si Op et Op' sont deux rayons infiniment voisins auxquels correspondent les points P et P′, la résultante des forces agissant sur l'élément PP′ passe par le point s où se coupent les tangentes en ses extrémités, est parallèle à l'élément correspondant pp' et est représentée en grandeur, direction et sens par ce dernier.

Toutes ces considérations subsistent si les forces sont parallèles, c'est-à-dire si la courbe ab est remplacée par une portion de droite $a_1 b_1$.

Supposons qu'on circonscrive à la courbe funiculaire un polygone quelconque ATST′B dont les côtés ont pour points de contact les extrémités A et B et les points intermédiaires en nombre quelconque P, Q, ... La résultante 1 des forces agissant entre A et P passe par le point T et est représentée sur la courbe des forces par la corde $ap = 1$; la résultante 2 de celles qui agissent entre P et Q passe par le sommet S du polygone circonscrit et est égale à $pq = 2$; de même, la résultante 3 de celles qui agissent entre les points de contact Q et B passe par le sommet T′ et est égale à $qb = 3$.

Ainsi, *tout polygone circonscrit à une courbe funiculaire est un polygone funiculaire d'un nombre fini de forces, à savoir : les résultantes partielles des forces qui agissent entre*

les points de contact successifs de la courbe et du polygone.

Supposons inversement que, étant données des forces se succédant d'une manière continue, on marque les lignes d'action d'un certain nombre d'entre elles, à savoir : la ligne d'action AA_1 parallèle à la tangente en a à la courbe de ces forces, les lignes d'action PP_1, QQ_1, ..., BB_1 respectivement parallèles aux tangentes en p, q, ..., b et que, par un moyen quelconque, on sache trouver les résultantes partielles **1**, **2**, **3**, ... des forces en nombre illimité agissant respectivement entre AA_1 et PP_1, entre PP_1 et QQ_1, ...; ces forces sont représentées par les cordes 1, 2, 3, ... constituant les côtés de leur polygone des forces. Si l'on construit le polygone funiculaire de ces forces ayant le point O pour pôle et le point A pour point de départ, on retrouvera le polygone ATST'B, c'est-à-dire un polygone circonscrit à la courbe funiculaire de pôle O, les points de contact étant sur les lignes AA_1, PP_1, QQ_1, ... Ainsi :

THÉORÈME. — *Étant données des forces se succédant d'une manière continue, si l'on peut les séparer en groupes, chaque groupe étant limité par les lignes d'action de deux des forces données et, de plus, tel qu'on sache trouver la résultante des forces qui le composent, à savoir : le groupe des forces dont les lignes d'action sont comprises entre celles* AA_1 *et* PP_1 *ayant* **1**, 1 *pour résultante; le groupe des forces dont les lignes d'action sont comprises entre celles* PP_1 *et* QQ_1 *ayant* **2**, 2 *pour résultante et ainsi de suite, tout polygone funiculaire de pôle quelconque* O *de ces résultantes est circonscrit à la courbe funiculaire de même pôle et ayant même point de départ des forces données. De plus, les points de contact sont sur les lignes de séparation des groupes* AA_1, PP_1, ...

Remarque I. — Si les forces données sont toutes verticales, les lignes de séparation AA_1, PP_1, ... des groupes doivent aussi être verticales; les points de contact de la courbe et du polygone circonscrit seront sur ces verticales, tandis que les sommets du polygone circonscrit seront sur les verticales **1**, **2**, **3**, ... représentant les lignes d'action des résultantes partielles.

Remarque II. — Ainsi que nous l'avons dit en commençant, toutes les propriétés des polygones funiculaires appartiennent

aussi aux courbes funiculaires. Il suffit, dans les énoncés, de remplacer les mots *côtés des polygones funiculaires et des forces* par les mots *tangentes aux courbes funiculaires et aux courbes des forces*.

Parmi ces théorèmes nous citerons celui-ci, qui est un cas particulier du précédent et qui résulte aussi du théorème II (§ 43) :

Théorème. — *On ne change pas les tangentes extrêmes d'une courbe funiculaire d'un système de forces, en remplaçant ces forces par d'autres équivalentes, quelles qu'elles soient.*

En d'autres termes, étant données des forces continues, si l'on construit une courbe funiculaire de ces forces avec un pôle et un point de départ donnés, puis qu'on construise avec ce même pôle et ce même point de départ la courbe ou le polygone funiculaire d'un système de forces, en nombre illimité ou non, équivalentes aux forces données, les tangentes extrêmes de cette seconde courbe ou les côtés extrêmes du polygone coïncideront avec les tangentes extrêmes de la première courbe.

On voit en quoi cette proposition diffère de la précédente. Si l'on remplace (*fig.* 20 et 20, *Pl. V*) les forces continues données par le système équivalent formé par les forces 1, 2, 3, non seulement on ne change pas les tangentes extrêmes de la courbe funiculaire, mais on ne change pas non plus les tangentes aux points P, Q, ..., placés sur les lignes de séparation des groupes. Mais cela tient à ce que les groupes sont séparés par des lignes d'action des forces données elles-mêmes. Si l'on prenait d'autres systèmes de forces équivalentes aux forces données, cette seconde propriété ne subsisterait pas; mais celle relative aux tangentes extrêmes subsisterait toujours. Le polygone funiculaire obtenu ne serait plus circonscrit à la courbe funiculaire; mais ses côtés extrêmes coïncideraient toujours avec les tangentes extrêmes de cette courbe.

CHAPITRE V.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DES CORPS NATURELS LIBRES OU NON. RECHERCHE GRAPHIQUE DES RÉACTIONS DES APPUIS.

§ 46.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE COMMUNES A TOUS LES CORPS. — Si un corps, quel qu'il soit, solide ou non, est en équilibre ou en repos sous l'action de certaines forces, il restera *a fortiori* en repos si l'on vient à en relier les divers points entre eux de façon que leurs distances mutuelles deviennent rigoureusement invariables; d'où résulte que les conditions nécessaires et suffisantes à l'équilibre de forces agissant sur des systèmes invariables restent *nécessaires* lorsque ces mêmes forces viennent à agir sur un corps quelconque.

Ainsi, *pour qu'un corps,* quel qu'il soit, *soit en équilibre sous l'action de forces toutes situées dans un plan, il est* nécessaire *que le polygone de ces forces soit fermé, ainsi qu'un de leurs polygones funiculaires choisi arbitrairement.*

On peut encore énoncer cette proposition autrement : *pour que des forces agissant sur un corps quelconque soient en équilibre, il est* nécessaire *qu'elles soient deux à deux égales, dirigées suivant les mêmes lignes, et de sens opposés, ou équivalentes* (§ 20) *à de telles forces.*

Nous établirons ici cette proposition pour le cas qui nous occupera plus spécialement, de forces toutes situées dans un plan. La démonstration, dans le cas le plus général, s'en déduirait aisément.

Nous savons (§ 34) que des forces situées dans un plan et agissant sur un corps quelconque peuvent toujours être remplacées : 1° par des forces deux à deux égales, dirigées suivant les mêmes droites, et de sens opposés; 2° par deux forces dirigées suivant les côtés extrêmes d'un de leurs polygones funiculaires.

Pour que le polygone des forces et le polygone funiculaire se ferment, il faut que ces dernières soient elles-mêmes égales, dirigées suivant la même ligne et de sens opposés.

§ 17.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DES SOLIDES ÉLASTIQUES LIBRES. — La forme naturelle d'un solide élastique est celle qu'il affecte lorsqu'aucune force, pas même celle de la pesanteur, n'agit sur lui et lorsque, de plus, tous ses points se trouvent à une même température convenue.

Si des forces, quelles qu'elles soient, viennent à être appliquées à un tel corps supposé en repos, les points d'application de ces forces et, par suite, tous les points du corps se déplacent, et le corps se déforme; mais il peut se faire qu'après avoir subi une déformation plus ou moins grande il revienne au repos et y persiste tant que durera l'action des forces. On dit alors (§ 18) que celles-ci sont en équilibre.

Pour que des forces puissent être en équilibre sur un corps quelconque, solide ou non, il est *nécessaire,* ainsi que nous venons de l'établir, qu'elles soient deux à deux égales, dirigées suivant les mêmes lignes et de sens contraires.

Mais je dis que, quand il s'agit d'un corps solide, quel que soit son degré d'élasticité, cette condition est non seulement nécessaire, mais suffisante, pourvu : 1° *que les forces agissantes ne soient pas assez grandes pour briser le corps;* 2° *qu'elles ne soient pas appliquées brusquement.*

L'expérience prouve, en effet, que si, en deux points A et B d'un corps solide naturel, on applique deux forces égales, dirigées suivant la ligne AB et de sens contraires, le corps se déforme, la ligne AB se déplace et change de grandeur; mais si, pendant son déplacement, les forces restent *constamment* dirigées suivant cette ligne mobile, si de plus elles ne sont pas appliquées *brusquement,* mais qu'elles soient très lentement croissantes à partir de zéro jusqu'à la valeur qu'on veut leur assigner, alors, à chacune de leurs valeurs et, en particulier, à leurs valeurs définitives, répondra une forme d'équilibre.

Il en est de même si, au lieu d'une paire de telles forces, on en

applique un nombre quelconque, pourvu qu'elles satisfassent à la condition que nous venons d'indiquer.

Ainsi, supposant (sauf à revenir plus loin sur cette question capitale) que les forces sont dans les limites voulues pour ne pas rompre le corps et qu'elles ne sont pas appliquées brusquement (¹), la condition d'être deux à deux égales, dirigées suivant les mêmes lignes et de sens opposés, est ici non seulement nécessaire, mais aussi suffisante.

D'ailleurs, si les forces sont dans un même plan, nous savons qu'il faut et qu'il suffit, pour qu'elle soit remplie, que le polygone des forces et un de leurs polygones funiculaires se ferment.

Mais il ne faut pas perdre de vue que ce n'est pas sur le corps pris dans son état naturel, mais sur le corps supposé arrivé à son état définitif de repos qu'elle doit être vérifiée; par conséquent, pour pouvoir faire cette vérification en toute rigueur, il faudrait commencer par résoudre ce problème, un des plus ardus de la Physique mathématique :

Quels sont les déplacements que des forces données font éprouver aux divers points d'un corps élastique donné?

Lorsque les déplacements sont considérables, comme il arrive dans les corps formés de caoutchouc et, plus pratiquement, dans les ressorts, il faut, en effet, les déterminer et le problème de Statique se trouve indissolublement lié à celui que soulève la théorie mathématique de l'élasticité ou, à un point de vue moins rigoureux, mais plus pratique, celle de la Résistance des matériaux. Mais, pour les corps employés dans les constructions, la forme définitive différant très peu de la forme naturelle seule connue d'avance, on se contente de faire la vérification sur cette dernière forme et alors elle ne souffre aucune difficulté et se fait *toujours* par les seules règles développées au Chapitre précédent.

§ 48.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DES SOLIDES ÉLASTIQUES NON LIBRES. RÉACTIONS

(¹) Si elles sont appliquées brusquement, elles font naître des mouvements vibratoires qui, théoriquement, peuvent se prolonger indéfiniment, mais qui pratiquement sont rapidement éteints par les résistances extérieures.

DES APPUIS. — Lorsque des obstacles matériels empêchent un corps de se mouvoir avec une égale facilité dans toutes les directions, on dit qu'il n'est pas libre.

La présence d'un obstacle matériel équivaut toujours à une ou plusieurs forces appliquées au corps.

Ainsi, si un corps repose sur un plan par un point, il exerce sur le plan une certaine pression et subit de son côté (§ 22) une *contrepression* égale et de sens opposé qu'on nomme la *réaction* de l'appui.

Les obstacles matériels, quels qu'ils soient, n'agissant sur un corps que par les contrepressions ou réactions qu'ils exercent sur lui, on peut toujours les concevoir supprimés, à la condition d'appliquer au corps des forces exactement égales à celles que ces obstacles feraient naître. Ainsi, un corps non libre peut toujours être traité comme s'il était libre, pourvu qu'aux forces qui lui sont appliquées on en adjoigne d'autres égales aux réactions des appuis.

Les premières, qui sont les *données* du problème, se nomment les forces *directement appliquées*.

Les dernières, au contraire, ne sont pas connues *apriori;* ce sont des inconnues *auxiliaires* qu'on introduit dans les problèmes. Mais leur détermination offre un grand intérêt, surtout dans l'art de l'ingénieur, puisque, au sens près, elles représentent les pressions exercées par le corps sur ses appuis et il est nécessaire de connaître ces pressions, afin de donner aux appuis la solidité nécessaire pour y résister et au corps lui-même les dimensions nécessaires pour qu'il puisse supporter les contrepressions qu'il éprouve de la part des appuis.

Il résulte de là que le problème de la statique de corps non libres comporte deux questions très distinctes :

1° La recherche des conditions d'équilibre, c'est-à-dire les relations qui doivent exister entre les forces *directement appliquées*, qui sont les données du problème pour que l'équilibre du corps soit assuré ;

2° Ces conditions étant supposées remplies, la détermination des réactions des appuis.

§ 49.

FORCES EXTÉRIEURES, INTÉRIEURES; RÉSISTANCE D'UN CORPS. — Les actions qu'un corps éprouve de la part d'autres corps se nomment des forces *extérieures;* celles que les diverses parties du corps exercent les unes sur les autres se nomment les forces *intérieures.*

Les forces directement appliquées à un corps, ainsi que les réactions des corps avec lesquels il est en contact forment l'ensemble des forces extérieures. Les forces extérieures font naître en chaque point pris à l'intérieur du corps des *forces élastiques* (§ 23), pressions ou tensions qui forment l'ensemble des forces intérieures.

Ces forces, il est également nécessaire de les déterminer.

Quand elles sont connues, comme on sait expérimentalement la pression ou la tension *maxima* par unité de surface à laquelle chaque matière peut pratiquement résister (*voir* à ce sujet Note I), on saura si le corps donné pourra ou non résister aux forces qu'il aura à supporter. C'est donc là un troisième problème qui se pose à la suite de ceux énoncés au paragraphe précédent ou concurremment avec eux.

§ 50.

DISTINCTION GÉNÉRALE ENTRE LES PROBLÈMES QUI DÉPENDENT UNIQUEMENT DE LA STATIQUE ET CEUX QUI DÉPENDENT, EN PARTIE, DE L'ÉLASTICITÉ. — Sur les trois problèmes qui viennent d'être posés, à savoir :

1° Recherche des conditions d'équilibre,
2° Détermination des réactions des appuis,
3° Détermination des forces intérieures,

le premier peut toujours (grâce à l'approximation admise au § 47) être résolu par les seules règles de la Statique; le troisième ne le peut jamais [1]; le deuxième, quelquefois.

En effet, quels que soient les obstacles matériels qui s'opposent au mouvement d'un corps, celui-ci ayant été rendu libre par l'adjonction des réactions des appuis, pour qu'il y ait équilibre, il faut

[1] Sauf dans le cas idéal de simples lignes ou surfaces matérielles, supposées parfaitement flexibles.

et il suffit (§ 47) que le polygone de toutes les forces (y compris les réactions des appuis) qui le sollicitent se ferme, ainsi qu'un de leurs polygones funiculaires. Ces conditions faciles à vérifier résolvent ainsi toujours le problème 1°.

La nécessité de satisfaire à ces conditions, dans lesquelles interviennent à la fois les forces données (directement appliquées) et les réactions inconnues, permet toujours de déterminer tout ou partie de ces dernières. Lorsqu'elle les détermine entièrement, le problème 2° ne dépend que de la Statique.

Mais on conçoit qu'en général cela ne doive pas arriver.

Supposons, par exemple, une règle en métal de faibles dimensions transversales posée sur un plan horizontal, ses deux extrémités venant toucher, mais *sans les presser*, deux plans verticaux parfaitement fixes.

Admettons qu'on chauffe la règle ; elle tendra à se dilater, et, comme les parois verticales s'y opposeront, la règle exercera sur elles des pressions très rapidement croissantes et en éprouvera des réactions égales et opposées.

La Statique fournit immédiatement la condition d'équilibre de la règle ; elle nous enseigne, en effet, que, les réactions produites par les deux parois étant les seules forces agissantes, elles doivent être égales, dirigées l'une et l'autre suivant l'axe de la règle et de sens opposés ; mais, quelle que soit leur grandeur commune, l'équilibre se trouvera ainsi assuré, et par conséquent la Statique ne pourra rien nous apprendre sur cette grandeur. C'est qu'en effet elle dépend essentiellement du degré de dilatabilité de la règle par la chaleur et de sa nature élastique, de sorte que, dans cet exemple pourtant bien simple, la théorie de la chaleur combinée avec celle de l'élasticité est nécessaire pour déterminer l'intensité commune des deux forces inconnues.

Mais il n'en sera pas toujours ainsi ; il est des cas où la Statique des systèmes invariables suffit pour fournir les réactions ; ces cas, on peut les spécifier en quelque sorte *a priori* par la considération suivante : les conditions d'équilibre des systèmes invariables, suffisantes aussi, comme nous l'avons établi, pour les solides naturels, n'exigent que des opérations purement graphiques, relatives au polygone des forces et à leurs polygones funiculaires.

Si ce sont les méthodes analytiques qu'on préfère employer, ce seront, comme nous le verrons, des opérations tout à fait équiva-

lentes sur les projections et les *moments* des forces qu'on aura à faire. Dans l'un et l'autre cas, ces opérations *ont ce caractère remarquable d'être absolument indépendantes de la forme des corps;* donc, ne pourront être fournies par la Statique pure que les réactions d'appuis tels, qu'ils n'influent en rien sur cette forme, c'est-à-dire *d'appuis n'empêchant pas la libre déformation des corps, qu'elle résulte soit de l'élasticité, soit de la dilatation par la chaleur ou de toute autre cause physique.* Dès que les appuis sont assez nombreux pour entraver cette libre déformation, la détermination des réactions qu'ils font naître doit être forcément du ressort de l'élasticité et de celle de la chaleur (si la température intervient).

Ce principe se vérifiera *en toutes circonstances,* sans aucune exception, dans les problèmes les plus simples, comme les plus complexes; c'est pourquoi il était bon de l'énoncer dès à présent sous sa forme la plus générale; il peut servir de guide et de moyen de prévision dans toutes les questions et permet de marquer à l'avance le degré de difficulté de chacune d'elles.

Au point de vue purement pratique, il permet de faire immédiatement ressortir un des nombreux avantages que présentent les constructions tellement disposées que la Statique seule permette de déterminer les forces inconnues qui s'y développent : en effet, les corps qui y entrent pouvant librement se dilater ou se contracter sans éprouver de contrainte de la part de leurs appuis, réciproquement ils ne tendront pas à renverser ces appuis, quelque grandes et quelque inégales que soient les variations de température qu'ils subiront dans leur ensemble ou dans certaines de leurs parties. Nous leur reconnaîtrons, par la suite, bien d'autres avantages.

§ 51.

DÉFINITION DES CORPS CONSIDÉRÉS DANS CE CHAPITRE ET LES SUIVANTS. — Nous ne considérerons dans ce qui va suivre que des corps soumis à des forces toutes situées dans un même plan et symétriques par rapport à ce plan, de sorte que la figure déterminée par leur intersection avec le plan n'ait aucune tendance à en sortir.

Lorsque nous parlerons d'un point du corps, il sera sous-entendu qu'il s'agira d'un point de cette figure plane, la seule, comme nous

le verrons et comme il est aisé de le concevoir, qu'il soit nécessaire d'envisager, tant qu'on ne s'occupe pas des déformations élastiques ou calorifiques du corps.

§ 52.

CONDITION GRAPHIQUE D'ÉQUILIBRE D'UN CORPS ASSUJETTI A TOURNER AUTOUR D'UN POINT FIXE. — THÉORÈME. — *Pour qu'un corps solide assujetti à tourner autour d'un point fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante des forces qui le sollicitent passe par le point fixe.*

Cette résultante représente alors, en grandeur, direction et sens, la pression que le corps exerce sur son appui.

Un point fixe est un point tel que, si l'on vient à y appliquer une force R, quelle qu'elle soit, le point oppose une résistance ou réaction R′ exactement égale et contraire à R, en sorte qu'il reste au repos exactement dans les mêmes conditions que si, libre, il était soumis aux deux forces égales et opposées R et R′. Et ceci est censé avoir lieu, quels que soient les grandeur, direction et sens de la force R.

Donc, pour rendre libre un corps qui a un point fixe, il suffit d'adjoindre aux forces qui lui sont directement appliquées une force R′ représentant la réaction, quelle qu'elle soit, du point.

Relativement à cette réaction, on n'en sait, *a priori,* qu'une seule chose, c'est qu'elle passe par le point fixe.

Le corps devant être en équilibre sous l'action : 1° des forces directement appliquées; 2° de la réaction du point fixe, cette dernière force doit (§ 21) être égale et opposée à la résultante R des premières. Donc il est nécessaire que cette résultante R passe elle-même par le point fixe.

Cette condition est d'ailleurs suffisante; car, si elle est remplie, le point fixe opposera à la résultante R une réaction R′ égale et contraire, ainsi qu'il résulte de la définition même de la fixité d'un point.

Il ressort aussi de là que la résultante R des forces directement appliquées représente la pression exercée sur le point fixe, puisqu'elle est égale et contraire à la réaction R′ que ce point exerce sur le corps.

Vérification graphique. — La condition qui précède est facile à vérifier graphiquement lorsque toutes les forces données sont dans un même plan. Il suffit de tracer un polygone funiculaire de ces forces relatif à un pôle quelconque, en en faisant passer le premier côté par le point fixe, le dernier côté devra y passer également, puisque l'intersection de ces deux côtés doit donner un point de la résultante (¹). Ainsi :

Pour qu'un système invariable mobile autour d'un point fixe et soumis à des forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan soit en équilibre, il faut et il suffit que, si le premier côté d'un polygone funiculaire quelconque de ces forces passe par le point fixe, le dernier côté y passe également.

Si cette condition est remplie, la pression sur le point fixe est égale à la résultante des forces données, c'est-à-dire à leur somme géométrique que le polygone des forces fournit immédiatement.

Remarque. — Pour que les raisonnements qui précèdent soient applicables, il n'est pas nécessaire que le point fixe offre, comme nous l'avons supposé, une résistance illimitée : il suffit qu'il puisse résister à la pression R qu'il a à subir.

§ 53.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS S'APPUYANT PAR UN POINT SUR UNE LIGNE FIXE. — THÉORÈME. — *Pour qu'un corps reposant, par un point, sur une ligne fixe, sans frottement, soit en équilibre, il faut et il*

(¹) Si ce point d'intersection ne coïncidait pas avec le point fixe, le premier côté du polygone funiculaire comprendrait deux points de la résultante, à savoir : le point d'intersection et le point fixe. Il serait donc la résultante elle-même; cela est évidemment impossible si le pôle est pris en dehors de la droite *ab* qui va de l'origine à l'extrémité du polygone des forces. S'il est pris sur cette droite, les deux côtés extrêmes sont coïncidants ou parallèles : dans le premier cas, la proposition est satisfaite; le second ne peut pas se produire; car la résultante de deux forces parallèles ne rencontre aucune d'elles. Or elle doit rencontrer le premier côté parce qu'elle doit passer par le point fixe et que ce premier côté passe lui-même par ce point.

suffit que la résultante des forces qui lui sont directement appliquées : 1° passe par ce point, 2° soit normale à la ligne, 3° tende à appuyer le corps sur cette ligne et non à l'en détacher.

Si ces conditions sont remplies, la résultante des forces données représente la pression exercée sur l'appui fixe.

Une courbe matérielle fixe supposée *parfaitement lisse* (nous la supposons telle, ce qu'on exprime en disant qu'on fait *abstraction du frottement*) est une ligne tellement constituée qu'elle ne fasse pas obstacle à ce qu'un corps glisse sur elle, mais seulement à ce qu'il la traverse.

Supposons (*fig.* 27, *Pl. VII*) un corps appuyé sur la ligne fixe xy par un point A. Si la résultante R des forces sollicitant le corps satisfait aux trois conditions énoncées dans le théorème ci-dessus, la courbe fera naître une réaction R' exactement égale et contraire à R, et le corps restera en repos. Ces conditions sont donc suffisantes.

Elles sont aussi nécessaires. Pour le montrer, observons d'abord que si, à la force R, on en ajoutait une autre dirigée suivant la tangente à la courbe, celle-ci, étant supposée parfaitement lisse, ne s'opposerait pas au mouvement que cette nouvelle force tendrait à faire naître. C'est ce qu'on exprime en disant que la réaction R', qu'une ligne fixe (abstraction faite du frottement) produit sur un corps qui s'y appuie, ne peut être que normale à cette courbe.

Ceci étant, le corps considéré comme libre est en équilibre sous l'influence des forces qui lui sont directement appliquées et de la réaction R' de la courbe. Il faut, pour cela (§ 21), que les premières admettent une résultante R égale et opposée à R' et, comme cette dernière ne peut être que normale à la courbe, il en est de même de la première. Cette force R doit d'ailleurs tendre à appuyer le corps sur la courbe et non à l'en détacher. Ces conditions sont donc aussi nécessaires.

Si elles sont remplies, la force R mesure la pression exercée sur la courbe.

Vérification graphique. — On vérifie immédiatement, sur le polygone des forces, si la résultante des forces données est parallèle à la normale à la courbe au point de contact A, et si elle a un sens tel qu'elle tende à appuyer le corps sur la courbe.

Il faut ensuite que cette résultante passe par le point A, ce qui exige, comme au paragraphe précédent, que si le premier côté d'un polygone funiculaire quelconque des forces données passe en ce point, le dernier y passe également.

§ 54.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS REPOSANT PAR DEUX DE SES POINTS SUR DES LIGNES FIXES; PRESSION SUR CES LIGNES. — Soit (*fig.* 30, *Pl. VIII*) un corps reposant par deux de ses points A et B sur deux lignes fixes; il pourra être considéré comme libre, pourvu qu'aux forces qui le sollicitent on adjoigne les réactions des appuis, c'est-à-dire (§ 53) deux forces inconnues dirigées suivant les normales AN et BN′ aux courbes.

1° Si les deux normales se rencontrent, les deux réactions, quelles qu'elles soient, dirigées suivant ces lignes, admettent une résultante R′ passant par leur point d'intersection O. De plus, ces réactions étant nécessairement dirigées dans les sens AN et BN′, leur résultante tombe dans l'angle opposé par le sommet à celui AOB.

Le corps devant être en équilibre sous l'action de cette résultante et des forces directement appliquées, il *faut* que ces dernières admettent elles-mêmes une résultante R égale et opposée à R′, c'est-à-dire passant par le point O et tombant dans l'angle AOB.

Cette condition est d'ailleurs suffisante; car, si l'on décompose la force R, supposée passant en O et comprise dans l'angle AOB, en deux autres suivant AN et BN′, les courbes fixes résisteront à ces deux forces qui représenteront les pressions exercées sur elles, de sorte que ces pressions et, par suite, les réactions des appuis sont bien déterminées.

2° Si les lignes AN et BN′ sont parallèles, les deux réactions N et N′, étant parallèles et de même sens, admettent une résultante R′, de même direction et de même sens qu'elles et tombant *entre* les points de contact A et B. Donc les forces directement appliquées doivent admettre une résultante R parallèle aux deux lignes AN et BN′, tombant (§ 42) entre ces deux lignes et tendant à appuyer le corps sur ces lignes.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes : car, dès qu'elles sont

remplies, en quelque point que tombe la résultante R entre les points A et B, on peut trouver deux forces toutes deux parallèles à R, passant par les deux points A et B et la maintenant en équilibre. Ce seront les réactions des appuis qui se trouvent ainsi déterminées.

Vérification graphique. — Au point de vue graphique, dans le cas 2°, on voit, sur le polygone des forces, si la résultante a la direction et le sens voulus ; en la construisant à l'aide d'un polygone funiculaire, on verra si elle tombe ou non entre les points A et B. Si elle y tombe, la détermination des réactions est ramenée au problème VIII résolu au § 42.

Dans le cas 1°, on voit d'abord, sur le polygone des forces, si la résultante *transportée* parallèlement à elle-même tombe dans l'angle AOB. Mais il faut qu'elle passe effectivement au point O : c'est ce qu'on vérifiera comme il est dit au § 52.

Remarque. — La condition principale que doit remplir la résultante est de passer par le point O. Cette condition est la même que si le corps, au lieu d'être assujetti à s'appuyer sur les deux courbes fixes en A et B, était assujetti à tourner autour du point O; dans une rotation infiniment petite autour de O il glisserait en effet sur les deux courbes, les points A et B décrivant des arcs de cercle A*a* et B*b* tangents à ces courbes. On s'explique bien par là pourquoi la condition pour qu'il soit en équilibre, c'est-à-dire pour qu'il ne puisse pas glisser, même infiniment peu, sur les courbes, se trouve être la même que celle nécessaire pour qu'il ne puisse pas tourner infiniment peu autour du point O.

§ 53.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS AYANT UN POINT FIXE ET S'APPUYANT PAR UN AUTRE POINT SUR UNE LIGNE FIXE. CAS D'INDÉTERMINATION DES RÉACTIONS DES APPUIS. — Lorsqu'un corps est assujetti à tourner (*fig.* 35, *Pl. IX*) autour d'un point fixe C, c'est-à-dire autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan de la figure et projeté en C et que, de plus, il doive s'appuyer sur une courbe fixe *xy*, ces conditions suffisent, *en général,* pour déterminer entièrement sa position, c'est-à-dire pour assurer son immobilité, quelles que soient les forces qui le

sollicitent, pourvu qu'elles tendent à l'appuyer sur la courbe et non à l'en éloigner.

Nous devons donc nous attendre (§ 50) à n'avoir en général pas d'autre condition d'équilibre entre les forces directement appliquées que celle que nous venons d'indiquer.

D'ailleurs, les sujétions auxquelles le corps est soumis, tout en déterminant sa position, ne l'assujettissent pas à une forme déterminée ou n'entravent pas sa libre déformation. Nous devons, par suite, nous attendre à ce que la Statique suffise encore ici, comme dans les exemples précédents, à la détermination des réactions des appuis.

Il y a toutefois un cas d'exception. Supposons que le corps soit assujetti à tourner autour du point fixe C et à s'appuyer non plus sur une courbe xy choisie arbitrairement, mais sur un arc de cercle matériel $x'y'$ décrit du point fixe C comme centre. Appelons A′ le point de contact considéré comme appartenant à la courbe fixe et a ce même point considéré comme appartenant au corps C.

Cette fois, les conditions imposées, quoique en même nombre que dans le cas général, ne déterminent plus la position du corps; celui-ci pourra librement tourner autour du point C, comme si la condition de s'appuyer sur la courbe $x'y'$ n'existait pas. Cela tient à ce que le point a, par cela même que le point C est fixe, décrit de lui-même l'arc de cercle $x'y'$: la condition qu'on lui impose de le décrire est donc une condition *géométriquement superflue ou surabondante*.

Ainsi, la fixité du corps n'est pas assurée et tout se passe comme s'il n'y avait d'autre condition que la fixité d'un seul point C; nous devons donc nous attendre cette fois à trouver les mêmes conditions d'équilibre entre les forces, que dans le cas où le corps n'avait que cette condition à remplir. Mais, si la sujétion pour le point a de décrire l'arc de cercle $x'y'$ constitue une condition géométriquement superflue, la présence matérielle de cette courbe, par cela même qu'elle est inutile, empêchera la libre dilatation du corps suivant la direction CA′. Donc nous devons nous attendre, d'après la règle du § 50, à ce que la Statique ne suffise plus à déterminer les réactions des appuis, la réaction en A′ dépendant essentiellement du coefficient de dilatation du corps, soit par la chaleur, soit par le fait de l'élasticité. Ainsi, en résumé, d'après le principe

général énoncé au § 50, on peut prévoir qu'on doit arriver aux résultats suivants : 1° dans le cas général, pas de condition d'équilibre entre les forces (sauf celle évidente qu'elles tendent à appuyer le corps sur la courbe fixe et non à l'en éloigner); de plus, possibilité de déterminer les réactions des appuis à l'aide de la Statique seule; 2° dans le cas exceptionnel où la normale au point d'appui passe par le point fixe, condition, pour la résultante des forces, de passer par ce point, comme si la courbe fixe n'existait pas, et, en outre, impossibilité de déterminer, par la Statique, les réactions des appuis.

Ces prévisions se vérifient de tous points.

Considérons d'abord le cas général où le point de contact avec la courbe xy est un point quelconque A et supposons, en premier lieu, que les forces qui sollicitent le corps admettent une résultante R.

Soit I son point d'intersection avec la normale AN à la courbe d'appui. On peut toujours décomposer cette force en deux : l'une dirigée suivant IC, l'autre suivant IA; la première donnera la pression sur le point fixe C, la seconde celle sur la courbe; cette dernière, pour l'équilibre, devra être dirigée de I vers A, ce qui exige que R soit dans l'angle CIA.

Si les forces agissantes se réduisaient à un couple, on procéderait de même pour chacune des deux forces du couple et l'on aurait encore les réactions des appuis.

Il n'en est plus de même si le point d'appui, au lieu d'être en A, est en A', de telle façon que la normale A'N' à la courbe d'appui $x'y'$ passe par le point fixe. Alors, I' étant le point d'intersection de cette normale avec la force R, il est, en général, impossible de décomposer cette force suivant I'C et I'A', ces deux lignes coïncidant; cela n'est possible que si la force R passe par le point C. Cette condition doit donc être remplie et, si elle l'est, on pourra décomposer cette force en deux autres, l'une suivant CA', l'autre suivant une autre ligne CZ de *direction arbitraire*, passant au point C. L'équilibre sera assuré, quelle que soit la direction choisie. La composante suivant CA' sera la pression exercée sur $x'y'$ en A' et la composante suivant CZ, la pression exercée sur le point fixe. On voit donc que l'une des deux forces peut être choisie arbitrairement, et alors l'autre s'ensuit. On peut supposer que,

sur $x'y'$, il ne s'exerce aucune pression et que la pression tout entière soit supportée par le point fixe, ou qu'une partie quelconque de la pression soit supportée par la courbe $x'y'$.

La Statique devait laisser indéterminée la réaction de la courbe, parce qu'elle l'est effectivement.

Supposons, en effet, qu'actuellement elle soit nulle; si la température du corps vient à s'accroître, la ligne Ca n'étant pas libre de s'allonger exerce une pression sur la courbe; si la température s'abaisse à nouveau, cette pression diminue et peut s'annuler.

Ainsi, supposons qu'avant d'amener la ligne Ca en place, lorsque le corps avait sa forme naturelle, cette ligne ait eu une longueur légèrement supérieure à celle qu'elle a sur la figure, c'est-à-dire dans sa position définitive. Il aura alors fallu, pour amener le corps en position, le *forcer*, exercer un effort assez grand pour le comprimer, afin de réduire la longueur première de Ca à celle CA'. Suivant la différence entre la longueur naturelle de Ca et sa longueur finale CA', l'effort de mise en place aura été plus ou moins grand et la réaction de $x'y'$ sera elle-même plus ou moins grande. On voit donc que cette réaction dépend de données absolument étrangères à la Statique et que les théories de la chaleur et de l'élasticité peuvent seules mettre en œuvre. Tant qu'on ne fixe pas ces données, tant qu'on ne précise pas et la température du corps et les conditions dans lesquelles a été effectuée *sa pose*, les réactions sont *réellement* indéterminées.

Le fait que la Statique ne peut pas toujours déterminer les réactions des appuis n'est donc pas un paradoxe, comme on le pensait encore dans le premier quart de ce siècle. S'il y a paradoxe, il réside plutôt dans le fait contraire, dans le fait que la Statique puisse *parfois* fournir les réactions, c'est-à-dire qu'on puisse parfois les trouver sans connaître ni la forme du corps qui les subit, ni sa nature, ni sa température.

Mais les observations du § 50 expliquent cette circonstance et montrent en même temps qu'elle ne peut avoir qu'un caractère exceptionnel.

VÉRIFICATION GRAPHIQUE. — Revenons maintenant au cas général où il n'y a pas indétermination, et voyons comment, étant données les forces directement appliquées, quel qu'en soit le nombre, nous pourrons en déduire les réactions des appuis.

Soient (*fig.* 32, *Pl. VIII*) 1, 2, 3, 4 les lignes d'action des forces appliquées à un corps, ces forces étant représentées par les côtés 1, 2, 3, 4 du polygone des forces (*fig.* 32).

Adjoignons à ces forces la réaction de la surface xy suivant AN. Nous désignerons par 5 sa grandeur inconnue et par 5 sa ligne d'action AN. Grâce à l'adjonction de cette force, la surface peut être supprimée et le corps considéré comme uniquement assujetti à tourner autour du point fixe C. Or nous savons (§ 52) que, pour qu'un tel corps soit en équilibre, il faut et il suffit que, si l'on construit un polygone funiculaire des forces qui le sollicitent (y compris ici celle 5, 5) dont le premier côté passe par le point C, le dernier devra y passer également. Prenons un pôle O; nous pouvons, du polygone funiculaire cherché, en partant du point C, construire les côtés C.1, 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, respectivement parallèles aux rayons aboutissant aux points connus a, 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, ou b. Le dernier côté du polygone funiculaire devant passer par le point C se trouve donc déterminé; c'est la ligne 5C. Le rayon polaire correspondant Oz fournit par son intersection z avec une ligne bn parallèle à la ligne d'action 5, c'est-à-dire à la normale à la surface, la ligne $bz = 5$, qui représente la réaction de la surface. Si, à présent, on veut trouver la réaction du point fixe que nous désignons par 6, 6, comme cette force doit équilibrer cinq forces connues, ce sera la droite za qui ferme le polygone de ces forces.

§ 56.

ÉQUILIBRE D'UN CORPS REPOSANT PAR TROIS POINTS SUR DES LIGNES FIXES; CAS D'EXCEPTION. — Considérons à présent un corps reposant par trois de ses points sur des lignes fixes; soient AN, BN′, CN″ les normales à ces lignes (*fig.* 30, *Pl. VIII*).

Nous pouvons supprimer la ligne C à la condition d'appliquer au corps, outre les forces qui agissent directement sur lui, une réaction dirigée suivant la normale CN″.

Le corps ne sera plus assujetti alors qu'à s'appuyer sur les deux lignes A et B; mais cela revient à dire (§ 54, *Rem.*) qu'il est assujetti à tourner autour du point d'intersection O des normales à ces lignes, comme si ce point était fixe; donc, en rétablissant la surface C, on se trouve, dans le cas du paragraphe précédent, d'un

corps assujetti à tourner autour d'un point fixe O et à s'appuyer sur une ligne fixe C.

Par la construction du paragraphe précédent on obtiendra la pression sur la ligne C et la réaction sur le point O; celle-ci devra être décomposée suivant OA et OB; les composantes ainsi obtenues fourniront les pressions sur les lignes A et B. Ces forces doivent tendre à presser le corps sur ses appuis.

Si les normales aux trois courbes aux points d'appui du corps concourent en un même point, on se trouvera, et pour des raisons analogues, dans le cas d'exception discuté au paragraphe précédent. Ainsi, l'équilibre est assuré, quelles que soient les forces agissantes (à la condition qu'elles feront porter le corps sur ses appuis), et les réactions des appuis sont déterminées, sauf quand les normales aux courbes aux trois points d'appuis sont concourantes; alors les forces agissantes doivent admettre une résultante passant au point de concours et les réactions des appuis ne peuvent être déterminées par la Statique.

Dans le problème actuel il peut arriver que deux des normales soient parallèles; alors le cas d'exception se présentera, si la troisième normale est parallèle aux deux premières. Les forces doivent, dans ce cas, satisfaire à la condition d'admettre une résultante parallèle à cette même direction et tombant (§ 54) entre les appuis extrêmes. La répartition des réactions sur les trois supports est indéterminée. On peut prendre l'une des réactions arbitraires (pourvu qu'elle soit moindre que la résultante des forces données) et déterminer les deux autres de façon à faire équilibre à cette résultante et à la réaction choisie.

Ce cas est, par exemple, celui d'une poutre droite reposant sur trois appuis de niveau. La poutre ne peut, par suite de ces sujétions, prendre qu'un seul mouvement, à savoir : un glissement suivant l'horizontale des appuis; mais deux appuis suffisent à lui imposer cette obligation; donc le troisième est *géométriquement superflu* et *matériellement* il entrave la libre déformation de la pièce, puisqu'il oblige trois de ses points à rester toujours en ligne droite. Il est donc bien conforme à la règle du § 50 que la Statique laisse, dans ce cas, les réactions des appuis indéterminées.

§ 57.

DÉCOMPOSITION GRAPHIQUE D'UN SYSTÈME DE FORCES SUIVANT TROIS LIGNES QUELCONQUES SITUÉES DANS LE PLAN DE CES FORCES; CAS D'EXCEPTION. — Les problèmes de recherche des réactions qui font l'objet des deux paragraphes précédents équivalent à celui-ci, qu'il est utile de traiter directement à cause des nombreuses applications dont il est susceptible : *Trouver trois forces ayant des lignes d'action données et faisant équilibre à un système de forces données ou, ce qui revient au même, au sens près des forces,* (§ 21), *décomposer la résultante d'un système de forces données en trois forces suivant des lignes d'action données.*

1° Supposons d'abord (*fig.* 33, *Pl. IX*) qu'on demande de décomposer une force unique F en trois autres suivant des lignes d'action données XX', YY', ZZ'.

On prolongera la ligne d'action de F jusqu'à sa rencontre en I avec l'une de celles qui sont données, celle ZZ' par exemple; on prolongera les deux autres lignes données XX', YY' jusqu'à leur rencontre en *m*. On décomposera la force F en deux autres dirigées suivant IZ' et I*m* ; puis cette dernière en deux autres suivant XX' et YY'.

Cela revient, si *f* est (*fig.* 33) la grandeur de F, à mener par l'une des extrémités de *f* une ligne 3, parallèle à ZZ' et par l'autre une ligne *x* parallèle à I*m*, puis, par les extrémités de *x*, à mener des parallèles 1 et 2 à XX' et YY'.

Si les trois lignes XX', YY' ZZ' étaient concourantes, le problème ne serait évidemment possible que si la force F passait en leur point de concours, et alors il serait possible d'une infinité de manières ; l'une des composantes pourrait être prise au hasard ; les deux autres seraient alors déterminées.

De même, si les trois lignes données étaient parallèles, le problème ne serait possible que si la force F avait même direction qu'elles, et alors il serait de même indéterminé.

Dans tous les autres cas, il est possible et déterminé.

2° Si, au lieu d'une force, on s'en donne un nombre quelconque dont la résultante doive être décomposée suivant trois lignes données,

on peut chercher cette résultante à l'aide du polygone funiculaire et lui appliquer la méthode précédente.

Ainsi soient (*fig.* 29, *Pl. VIII*)

$$1, 2, 3, 4$$

les lignes d'action de quatre forces représentées sur le polygone des forces (*fig.* 29) par les côtés

$$1, 2, 3, 4.$$

On demande de décomposer la résultante suivant les trois lignes d'action

$$XX', YY', ZZ',$$

que nous désignerons par les chiffres

$$5, 6, 7.$$

Traçons le polygone funiculaire des quatre forces données relatif à un pôle O, en partant d'un point 7 pris sur l'une de ces trois lignes, et formons le contour 7.1.2.3.4.5 en prolongeant le dernier côté jusqu'à son intersection 5 avec la ligne désignée par ce chiffre.

La résultante F des quatre forces données passe par le point de concours S des deux côtés extrêmes de ce polygone, est parallèle à ab et représentée par cette dernière ligne ; son intersection avec ZZ' est en I.

Soit m le point de rencontre des deux autres lignes XX', YY'.

Nous aurons, d'après la règle ci-dessus, à décomposer F suivant ZZ' et Im et cette dernière composante suivant XX' et YY', ce qui revient par le point b à mener une parallèle à Im ; par le point a une parallèle 7 à ZZ', ce qui détermine le point y ; puis, par les extrémités de by, des parallèles 5 et 6 aux lignes 5 et 6 qui se coupent en x. Les trois lignes ay, yx, xb sont les composantes cherchées suivant ZZ', YY', XX'.

Mais on peut employer un autre procédé plus commode et, en général, plus exact au point de vue graphique.

Proposons-nous de trouver les trois forces dirigées suivant 5, 6, 7 et faisant équilibre aux forces données. Ces forces seront égales et opposées à celles que l'on cherche.

Supposons le problème résolu et soient 5, 6, 7 les grandeur des forces cherchées.

Partant d'un point 7 de la ligne ZZ', concevons qu'on trace le polygone funiculaire relatif au pôle O de toutes les forces tant connues qu'inconnues.

Soit 7.1.2.3.4.5.6.7 ce polygone, qui est fermé ainsi que le polygone des forces, puisque le système est, par hypothèse, en équilibre.

Sur le polygone des forces on connaît le contour formé par les lignes 1, 2, 3, 4, ainsi que la position des lignes indéfinies 5 et 7, dont la première passe par l'extrémité *b* du polygone des forces données et est parallèle à 5 ou XX', et dont la seconde passe par l'origine *a* du même polygone et est parallèle à 7 ou ZZ'. Ce qu'il faut déterminer, c'est la position du côté 6 ou *xy* qui est parallèle à 6. Cette ligne déterminera les grandeurs 5, 6, 7 des trois forces inconnues.

Du polygone funiculaire on connaît la portion 7.1.2.3.4.5 dont les côtés sont parallèles aux rayons 7.1, 1.2, 2.3, 3.4, 4.5.

Prolongeons, sur le polygone des forces, les lignes 5 et 7 jusqu'à leur rencontre en *u* et joignons O*u*.

Sur le polygone funiculaire prolongeons deux des lignes données, par exemple celles XX' et YY', jusqu'à leur rencontre en *m*; par ce point menons *mn* parallèle à ZZ', et prolongeons 6.7 jusqu'à sa rencontre avec *mn* en *n*; enfin joignons 5*n*.

Considérons les six lignes qui joignent les quatre points

5, 6, *m*, *n*

du polygone funiculaire et les six lignes qui joignent les quatre points

O, *x*, *y*, *u*

du polygone des forces; par construction, les cinq lignes

5*m*, *mn*, *m*6, 5.6, 6*n*

sont respectivement parallèles à celles

xu, *yu*, *xy*, O*x*, O*y*,

et l'on voit qu'aux deux triangles que forment les premières correspondent, dans les secondes, des lignes concourantes. Donc, en

vertu du corollaire II du § 35, les lignes $5n$ et Ou sont parallèles.

De là, la construction suivante :

Donnez aux lignes d'action des forces données les numéros consécutifs

1, 2, 3, 4,

et aux côtés qui les représentent sur le polygone des forces les numéros correspondants

1, 2, 3, 4.

Donnez les trois numéros suivants :

5, 6, 7

aux lignes d'action des trois forces inconnues.

Partant d'un point quelconque 7 de la dernière de ces lignes, construisez le polygone funiculaire relatif à un pôle quelconque O des forces données. Soit 7.1.2.3.4.5 ce polygone. Prolongez les lignes données 5 et 6 jusqu'à leur rencontre en m, et menez mn parallèle à 7.

D'un autre côté, par l'origine du polygone des forces, menez une parallèle à 7 ; par son extrémité une parallèle à 5, et conduisez le rayon issu du pôle et aboutissant au point d'intersection u de ces deux lignes.

De l'extrémité 5 du polygone funiculaire menez une parallèle à ce rayon ; cette parallèle coupera mn en un point n. Joignez $n7$, que vous prolongerez jusqu'à sa rencontre avec YY′ en 6, et joignez 6.5 ; puis, sur le polygone des forces, menez Ox parallèle à 5.6 et Oy parallèle à 6.7 ; joignez xy. Les trois forces cherchées auront pour grandeurs et pour sens bx, xy et ya.

Remarque. — Si les trois lignes données XX′, YY′, ZZ′ concourent au même point m, la ligne ZZ′ coïncide avec mn, le point 7 avec n. Le problème est alors généralement impossible ; car la ligne $5n$, coïncidant dans ce cas avec 5.7 qui ferme le polygone funiculaire, ne sera pas, en général, parallèle à On. Si elle l'est, les deux points 7 et n qui déterminent la ligne 6.7 coïncidant, cette ligne est indéterminée. Ainsi, dans ce cas, le problème est ou impossible ou indéterminé. C'est ce qu'il était aisé de prévoir ; car, si

la résultante des forces données ne passe pas par le point de concours des trois lignes XX′, YY′, ZZ′, on ne saurait l'équilibrer par trois forces dirigées suivant ces lignes, et, si elle y passe, on le peut d'une infinité de manières.

Les *fig.* 34 et 34 (*Pl. IX*) résolvent le même problème dans le cas où les forces données 1, 2, 3, 4 sont parallèles entre elles, en sorte que leur polygone des forces, dont l'origine est *a* et l'extrémité *b*, se réduit à une ligne droite. Les lignes données sont XX′, YY′, ZZ′ ou 5, 6, 7. La solution est la même qu'au paragraphe précédent, et les notations aussi, en sorte qu'on s'expliquera la figure en reprenant l'énoncé de la règle qui vient d'être établie.

§ 58.

CORPS AYANT DEUX POINTS FIXES, OU REPOSANT SUR QUATRE COURBES PAR QUATRE POINTS. INDÉTERMINATION DES RÉACTIONS DES APPUIS. — Lorsqu'un corps, comme ceux que nous considérons (§ 51), a (*fig.* 39, *Pl. IX*) deux points fixes O et O′ situés dans le plan contenant toutes les forces, sa position est non seulement déterminée, mais il ne peut pas se dilater librement, puisque la distance OO′ de deux de ses points est assujettie à rester invariable, quels que soient les forces ou les effets calorifiques qui tendraient à les modifier.

Donc, l'équilibre doit avoir lieu, quelles que soient les forces agissantes; de plus (§ 50) les réactions ne doivent pas pouvoir être déterminées par la Statique. C'est ce qu'en effet on vérifie immédiatement. Soit R la résultante des forces directement appliquées. Nous pouvons prendre, sur sa ligne d'action, un point quelconque I et décomposer la force R en deux suivant les lignes IO et IO′. Ces deux forces représentent les pressions exercées sur les deux points fixes O et O′; le point I étant arbitraire, on voit que ces pressions sont indéterminées.

La même chose aurait lieu si le corps, au lieu d'avoir deux points fixes O et O′, était assujetti à s'appuyer sur quatre courbes A, B, C, D. Il devrait alors y avoir équilibre entre les réactions de ces courbes et la force R. Soient AO, BO les normales aux courbes A et B en leurs points d'appui.

Assujettir le corps à s'appuyer en A et B sur ces deux courbes

équivaut (§ 54) à l'assujettir à tourner autour du point d'intersection O des normales AO et BO.

De même l'assujettir à s'appuyer sur les lignes C et D équivaut à l'assujettir à tourner autour du point O', intersection des normales CO' et DO' à ces lignes. Donc le problème est le même que si le corps avait deux points fixes O et O'.

En prenant un point I sur la résultante R des forces directement appliquées au corps et décomposant cette force en deux suivant IO et IO', puis décomposant celle suivant IO en deux autres suivant OA et OB, puis celle suivant IO' en deux autres suivant O'C et O'D, on aura les pressions sur les quatre courbes; et, comme le point I est pris au hasard, ces pressions sont indéterminées (¹).

§ 59.

POUSSÉE D'UN ARC SIMPLEMENT APPUYÉ. — Il est important de bien préciser le mode d'indétermination dont il est parlé au paragraphe précédent.

Supposons (*fig.* 4, p. 96) un corps quelconque, par exemple un arc de pont dont les deux extrémités A et B sont fixes.

Soit R la résultante des forces, quelles qu'elles soient, qui lui sont directement appliquées (d'ordinaire, les charges sont verticales et la corde AB est horizontale).

Prenons un point I sur cette force, menons IA et IB et désignons par r et r', non pas les composantes de R suivant IA et IB, mais des forces égales et opposées à ces composantes, c'est-à-dire égales aux réactions des appuis A et B. Soit, sur un polygone des forces (*fig.* 4) $ab = R$; menons par a et b des parallèles à AI

(¹) Il est bon toutefois d'observer que l'indétermination est ici un peu moins grande que si les points O et O' étaient effectivement fixes. Car alors le point I peut occuper une position quelconque sur la ligne indéfinie suivant laquelle agit la force R, tandis qu'ici il ne peut occuper qu'une portion de cette ligne telle, que la ligne IO tombe dans l'angle AOB et celle IO' dans l'angle CO'D. Autrement, parmi les composantes définitives de R suivant les quatre normales OA, OB, O'C, O'D, il y en a qui ne tendraient pas à faire porter le corps sur ses appuis, et les réactions correspondantes, c'est-à-dire égales et opposées, ne pourraient plus exister, la réaction de chaque surface A ne pouvant être dirigée que dans le sens AO.

et BI, nous formons le triangle aOb, et, puisque les trois forces R, r, r' doivent s'équilibrer, c'est-à-dire que le triangle de ces forces doit être fermé, on aura $bO = r'$ et $Oa = r$ en grandeur et sens.

Menons, par le point O, la ligne $O\omega$ parallèle à la droite AB. Nous pouvons décomposer la force $bO = r'$ en deux, représentées en grandeur et sens par $b\omega$ et ωO, l'une parallèle à la résultante R que nous appelons r'_0 (c'est la composante verticale de la réaction, si la résultante R des forces agissantes est verticale), l'autre f' suivant la corde AB.

De même $Oa = r$ se décompose en $O\omega$ ou f égale et opposée à f' suivant la corde BA, l'autre ωa parallèle à R et que nous appelons r_0.

Fig. 4.

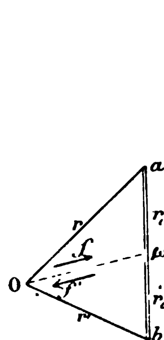
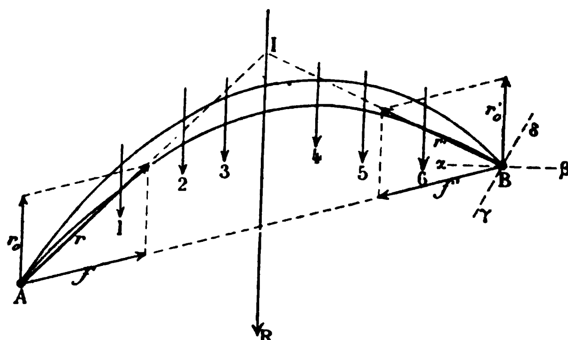


Fig. 4.



On voit donc que l'arc supposé libre est en équilibre sous l'action : 1° des trois forces parallèles

(1) $$r_0,\ R,\ r'_0;$$

2° des deux forces

(2) $$f,\ f',$$

ces dernières égales, dirigées suivant la même ligne AB et de sens opposés.

L'arc étant en équilibre, les forces qui le sollicitent satisfont (§ 46) aux conditions d'équilibre relatives aux systèmes invariables; mais les deux dernières y satisfont par elles-mêmes; il faut donc qu'il en soit de même des trois premières. Ainsi,

lorsqu'un corps a deux points fixes et qu'on décompose chacune des réactions en deux : l'une parallèle à la résultante des forces directement appliquées, l'autre suivant la droite qui joint les deux points fixes, les composantes parallèles à la résultante des forces directement appliquées sont *déterminées;* les composantes suivant la droite qui joint les deux points fixes sont égales et de sens opposés; mais leur valeur commune ne peut pas être déterminée par la Statique.

Dans les arcs de ponts, les premières sont généralement verticales et se nomment les *réactions verticales;* les secondes sont généralement horizontales et leur valeur commune se nomme la *poussée* de l'arc, parce qu'en effet l'arc exerçant, sur ses appuis (culées), des pressions égales et opposées aux réactions r et r', les composantes verticales de ces pressions sont égales et opposées à r_0 et r'_0 et, par suite, connues; elles tendent à appuyer les culées sur leurs fondations; tandis que leurs composantes horizontales égales et opposées à f et f' tendent à les renverser en les faisant tourner autour de leurs bases.

Si, comme dans la figure, l'arc est *supporté,* c'est-à-dire présente sa concavité vers le bas, ce renversement tendra à se faire vers le dehors. Si, au contraire, l'arc présente sa concavité vers le haut (ponts *suspendus*), ce renversement tend à se faire vers le *dedans* ou vers l'axe du pont.

§ 60.

SUR L'INDÉTERMINATION APPARENTE DE LA POUSSÉE D'UN ARC. — Dans ce qui précède, nous avons appliqué uniquement les conditions d'équilibre communes à tous les corps (ce qui est permis rigoureusement); mais nous les avons appliquées en supposant l'arc indéformable, c'est-à-dire en opérant sur sa forme naturelle (§ 47) et non sur sa forme finale. Dans ces conditions, je dis que la valeur de la poussée est réellement indéterminée; elle est réellement *ce que l'on veut,* sa valeur dépendant essentiellement de la *pose* de l'arc.

En effet, supposons le point A fixe et le point B reposant librement sur une ligne horizontale $\alpha\beta$; l'arc étant supposé rigoureusement invariable, la fixité du point B se trouvera ainsi parfaitement assurée; on satisfera donc à la condition voulue d'avoir les deux

points A et B fixes; et, comme la ligne $\alpha\beta$ ne peut faire naître qu'une réaction verticale, on aurait, si l'on faisait *la pose de l'arc de cette façon*, $f' = 0$, par suite $f = 0$. Il n'y aurait donc aucune poussée.

Supposons à présent que, le point A étant toujours fixe, on fasse reposer l'extrémité B non plus sur une ligne horizontale, mais sur une ligne inclinée $\gamma B \delta$. La fixité des deux extrémités A et B de l'arc sera ainsi assurée aussi bien que dans le mode précédent; mais cette fois la réaction r' de la ligne $\gamma\delta$ normale à cette ligne, étant inclinée, aura une composante f' et, par suite, il naîtra en A une réaction égale et opposée f (puisqu'on a $f = f'$). On a donc ainsi une *poussée* et, en choisissant convenablement l'inclinaison de la ligne d'appui $\gamma B \delta$, on peut faire en sorte que cette poussée ait la valeur que l'on veut.

C'est donc avec raison, si l'on admet la rigoureuse invariabilité du corps, que la Statique fournit, pour la poussée, une valeur indéterminée.

Supposons à présent le corps déformable.

Admettons que l'extrémité A soit fixe et que l'extrémité B puisse librement glisser sur la ligne horizontale $\alpha\beta$. Sous l'influence des charges verticales qu'il porte, l'arc va se déformer, son sommet va s'abaisser, le point B va s'éloigner plus ou moins de A et l'équilibre ne s'établira que quand ce point sera venu quelque part en β.

Pour le ramener en B, c'est-à-dire à la place qu'il doit occuper d'après les conditions du problème, concevons qu'on y applique en β une force graduellement croissante, dirigée de β vers B. A mesure que cette force grandira, le point β se rapprochera de B et, pour une valeur suffisante et *parfaitement déterminée* de cette force, il viendra coïncider avec ce dernier.

Or, la présence de la culée ou la fixité de l'obstacle contre lequel s'appuie en réalité l'arc a précisément pour effet de faire naître cette force *déterminée* qui maintient l'extrémité de l'arc en B, et ce sera là la vraie valeur de la poussée.

Voilà pourquoi cette force est déterminée pour les corps naturels, et c'est d'après les considérations qui précèdent que nous la déterminerons plus loin en faisant intervenir le mode de structure de l'arc et l'élasticité de la matière qui le compose.

§ 61.

RECHERCHE GRAPHIQUE DE LA PARTIE DÉTERMINÉE DES RÉACTIONS DES DEUX POINTS FIXES. — Les composantes (*fig.* 4, p. 96) r_0 et r'_0 des réactions r et r' devant faire équilibre à la résultante R des forces agissantes, leur recherche revient au problème I ou au problème III du § **42** suivant que les charges que supporte l'arc sont des forces parallèles ou non.

CHAPITRE VI.

RECHERCHE DES FORCES ÉLASTIQUES. LE POLYGONE DES PRESSIONS ET LE POLYGONE DE VARIGNON.

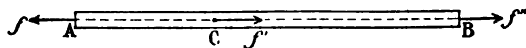
§ 62.

SUR LE DÉPLACEMENT DES POINTS D'APPLICATION DES FORCES SUR LEUR DIRECTION. — Tant qu'on ne s'occupe, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que des conditions d'équilibre entre les forces extérieures (§ 49) agissant sur un corps solide élastique, on peut, grâce à l'approximation admise au § 47, procéder comme si ce corps était invariable, par conséquent, faire sur les forces toutes les opérations permises en pareil cas, notamment celle qui consiste à déplacer leurs points d'application sur leurs propres directions.

Il en est autrement lorsqu'on veut étudier les forces élastiques que des forces données font naître à l'intérieur d'un corps. Le déplacement du point d'application d'une force quelconque sur sa direction modifierait complètement les pressions ou tensions existant à l'intérieur du corps.

Ainsi, supposons une tige AB (*fig.* 5) en équilibre sous l'action

Fig. 5.



de deux forces f et f' égales, dirigées suivant la droite AC qui joint leurs points d'application et de sens contraires.

Cette partie AC de la tige sera plus ou moins tendue par ces forces, tandis que leur action sur la partie CB sera nulle ou insensible. Il en serait tout autrement si l'on transportait la force f' sur sa ligne d'action en f''. Alors toute la ligne AB serait tendue.

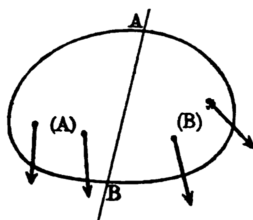
Il résulte évidemment de là qu'on ne peut pas, dans les recherches dont il s'agit, composer entre elles des forces ap-

pliquées *en deux points différents* d'un corps, puisqu'une telle composition ne peut se faire sans déplacer les points d'application des forces.

§ 63.

SUR L'EMPLOI DE LA STATIQUE PURE DANS L'ÉTUDE DES FORCES INTÉRIEURES. — Concevons que, dans un corps en équilibre (*fig.* 6), sous l'action de forces quelconques, on fasse une section (généralement plane) qui divise ce corps en deux parties (A) et (B). On peut (§ 23) enlever l'une des parties, par exemple celle (B), sans troubler l'équilibre de (A), pourvu qu'aux forces appliquées à celle-ci on adjoigne des forces convenables réparties sur toute l'étendue de la surface de séparation ; ces forces se nomment les *forces élastiques* (tensions ou pressions) exercées par la partie (B) sur la partie (A).

Fig. 6.



Suivant quelles lois ces forces, qui se succèdent d'une manière continue, sont-elles réparties sur la surface de séparation ; en d'autres termes, quelle est, en chaque point de cette surface, la valeur de la pression ou tension par unité de surface ? On conçoit que la réponse à cette question doive dépendre non seulement des forces extérieures agissantes, mais aussi de la forme et de la nature du corps et que, pour cette raison, la Statique seule soit impuissante à la résoudre. Elle est essentiellement du ressort de la théorie de l'élasticité.

Mais la Statique nous enseigne que, si la partie (A) du corps est en équilibre, elle le sera, à plus forte raison, si l'on vient à la rendre invariable.

Il est donc nécessaire que les forces qui la sollicitent [y compris

les forces élastiques qu'elle subit de la part de la partie (B)] satisfassent aux conditions d'équilibre relatives aux systèmes invariables, résultat que l'on peut énoncer ainsi : si l'on compose entre elles les forces extérieures qui agissent sur une portion quelconque (A) d'un corps *comme si ces forces agissaient sur un système invariable,* on obtiendra (dans l'hypothèse où nous nous plaçons toujours, de forces toutes dans un plan) une résultante ou un couple résultant. Cette résultante ou ce couple sont des forces *purement fictives* qui ne pourront à aucun degré remplacer celles d'où elles proviennent.

Si, de même, on compose les forces élastiques que la partie (A) du corps éprouve de la part de celle (B), on obtient, dans l'hypothèse où tout est symétrique par rapport au plan contenant toutes les forces extérieures, une force ou un couple ([1]). Cette force ou ce couple est également fictif et ne saurait tenir lieu des forces élastiques elles-mêmes.

Mais la Statique apprend : 1° que si les forces extérieures, composées comme il vient d'être dit, fournissent une résultante, les forces élastiques en fournissent nécessairement aussi une *égale et opposée* à la précédente ; que de même, si les forces extérieures se composent en un couple, il en est nécessairement de même des forces élastiques et que, de plus, ce second couple est égal et opposé au premier.

Dans ce qui précède, nous avons considéré les forces élastiques exercées par (B) sur (A) ; celles exercées par (A) sur (B) leur sont égales et opposées.

Donc, on peut encore dire que, *si dans un corps en équilibre on fait une section quelconque qui le divise en deux parties* (A) *et* (B), *la résultante des forces extérieures ayant leurs points d'application dans l'une de ces parties est égale en grandeur, direction et sens à la résultante des forces élastiques que cette partie exerce sur l'autre.*

([1]) Les forces élastiques ne sont pas toutes dans le plan de symétrie ; mais à chaque force élastique située d'un côté de ce plan répond une force symétrique, et ces deux forces, composées comme si elles agissaient sur un solide invariable, donnent une résultante partielle située dans le plan de symétrie. Il ne reste donc qu'à composer ces résultantes partielles qui sont dans le même plan que les forces extérieures.

Dans le cas particulier où les forces extérieures ayant leurs points d'application dans l'une des parties se réduisent à un couple, les forces élastiques que cette partie exerce sur l'autre se réduisent au même couple.

§ 64.

CENTRE DE PRESSION ; EFFORT TRANCHANT ; PRESSION NORMALE. — Ce théorème est vrai, que la section faite dans le corps soit plane ou courbe, pourvu qu'elle soit symétrique par rapport au plan contenant les forces extérieures.

Supposons-la plane et soit (*fig.* 7, p. 104) X'X sa trace sur le plan de symétrie.

La résultante R de toutes les forces extérieures agissant sur la partie (A) du corps située d'un côté de la section se nomme la *force élastique totale* exercée par cette partie sur celle (B). Pour trouver cette force fictive, on a opéré sur les forces extérieures comme si elles agissaient sur des systèmes invariables, c'est-à-dire qu'on a déplacé leurs points d'application sur leurs propres directions. De même, le point d'application de la force fictive R elle-même peut être pris en tout point de sa direction, pourvu que ce point soit supposé invariablement lié à la partie (A) du corps regardée comme invariable. Appliquons-la au point C où elle coupe la ligne X'X, ce point étant ainsi regardé comme appartenant à la portion de gauche (A) du corps. Sa composante T suivant X'X se nomme la *force élastique tangentielle* ou *effort tranchant*. Sa composante N, suivant la normale à la section, se nomme la *pression* ou *tension normale* exercée par (A) sur (B). Ici ce serait une pression. En effet, R étant la résultante des forces extérieures qui agissent sur la partie (A) du corps, la résultante R' de celles qui agissent sur la partie (B) est nécessairement égale et opposée à R, puisque le corps tout entier est en équilibre, sous l'action des deux forces R et R'. Cette force R' peut être considérée comme appliquée au même point géométrique C que la force R, mais ce point étant cette fois regardé comme appartenant à la partie (B).

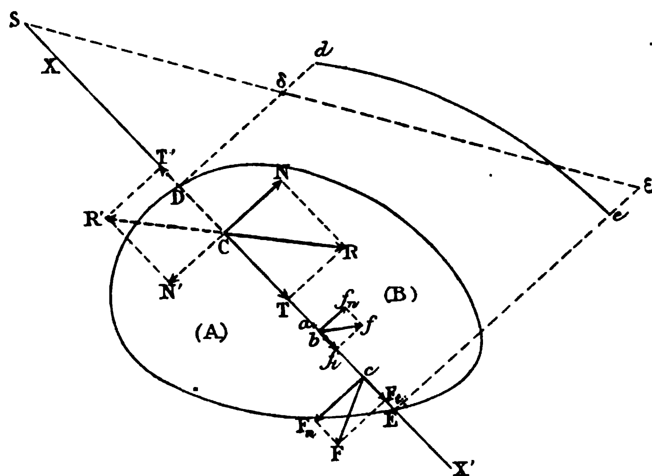
Les composantes normale et tangentielle de R' seraient des forces N' et T' respectivement égales et opposées à N et T.

Les deux forces égales et opposées T et T', agissant, la première sur la partie (A), la seconde sur la partie (B) du corps, tendent à

faire glisser ces deux parties le long de la section, ou à les séparer par *cisaillement*. De là le nom d'*effort tranchant* donné à ces forces.

Les deux forces égales et opposées N et N', agissant, la première sur (A), la seconde sur (B), tendent : 1° dans le cas de la figure, à presser les deux parties du corps l'une contre l'autre ou à faire naître des *pressions ;* 2° dans le cas où elles seraient dirigées en sens opposés, c'est-à-dire où celle qui agit sur *l'une* des deux parties du corps serait dirigée vers *cette partie même*, elles tendraient à *séparer* les deux parties (A) et (B), et alors N serait une *tension*.

Fig. 7.



Le point C où la résultante R coupe la ligne X'X se nomme *le centre de pression* ou *centre des forces élastiques*.

Cas où le centre de pression passe à l'infini. — Le centre de pression C n'est pas nécessairement à l'intérieur du corps ; il peut même passer à l'infini sur la ligne X'X dans deux cas :

1° Lorsque la résultante R des forces qui agissent sur la partie (A) du corps se trouve être parallèle à la section X'X.

Ce cas se présente toujours dans les poutres droites horizontales, soumises à des forces toutes verticales, lorsque les sections que l'on considère sont elles-mêmes verticales ;

2° Lorsque les forces extérieures agissant sur (A) n'admettent pas de résultante et se réduisent à un couple.

On sait, en effet, qu'un couple peut être regardé comme une force infiniment petite dont le point d'application est infiniment éloigné.

On peut comprendre dans un seul énoncé ces deux cas où le centre de pression passe à l'infini. Soit, en effet, F l'une des forces extérieures agissant sur (A). Prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en c avec la section X'X et décomposons-la en deux : l'une F_t dirigée suivant X'X, l'autre F_n normale à cette ligne.

Toutes les composantes tangentielles F_t donnent une résultante égale à l'effort tranchant T; toutes les composantes normales F_n qui peuvent être placées les unes d'un côté du plan X'X, les autres de l'autre, donnent ou une résultante N ou un couple résultant. Dans le premier cas, le centre de pression C est à distance finie; il est au point d'intersection de la résultante N et de la trace X'X de la section sur le plan de symétrie; dans le second, il passe à l'infini. Ainsi, pour qu'il passe à l'infini, il faut et il suffit que les forces F_n forment un couple, ou, ce qui revient au même, il faut et il suffit que la somme algébrique des projections des forces extérieures F sur la normale à la section soit nulle, ce qui comprend bien, en effet, les deux cas mentionnés plus haut.

Remarque. — Le théorème du paragraphe précédent, qui permet de déduire la résultante (ou le couple résultant) des forces élastiques agissant dans une section, de la seule composition des forces extérieures, est précieux; mais on peut concevoir aussi qu'on fasse directement la composition des forces élastiques elles-mêmes.

A cet effet, considérons un élément infiniment petit ab de la ligne X'X et la bande du plan de la section projetée suivant ab. Les forces élastiques appliquées aux divers points de cette bande sont deux à deux symétriques par rapport à ab; or, en composant deux forces symétriques, on en obtient une située dans le plan de la figure et appliquée en ab. En composant, entre elles, toutes les forces ainsi appliquées en ab et provenant de la bande dont ab est la trace, on obtient une force unique f que nous pouvons décomposer en ses composantes tangentielle et normale f_t et f_n.

L'effort tranchant T est la résultante de toutes les forces f_t, c'est-à-dire leur somme algébrique, puisqu'elles sont toutes dirigées suivant la ligne XX'. La pression normale N est la résultante de toutes les forces normales f_n. Ainsi :

Théorème I. — *L'effort tranchant dans une section plane peut être défini indifféremment la somme des projections sur cette section des forces extérieures qui agissent d'un côté convenu de la section ou la somme des forces élastiques qui se produisent dans la section (et qui s'exercent par la partie du corps située du côté convenu dont il vient d'être parlé sur la partie située de l'autre côté). De même, la pression normale peut être définie indifféremment la somme des projections sur la normale à la section, soit des forces extérieures, soit des forces élastiques dont il vient d'être parlé.*

Observons que le centre de pression C est déterminé dès qu'on connaît la pression normale N; ce point est donc indépendant des forces élastiques tangentielles.

Théorème II. — *Le centre de pression dans une section quelconque est indépendant des forces élastiques tangentielles ou de l'effort tranchant qui se produit dans cette section. Il est le point où la résultante des forces élastiques normales coupe la ligne* XX'.

Corollaire. — *Le centre de pression d'une section est à distance finie toutes les fois que les forces élastiques normales admettent une résultante. Pour qu'il passe à l'infini, il faut et il suffit que ces forces se réduisent à un couple.*

Remarque. — Il est un cas où le centre de pression d'une section XX' ne peut être en dehors du corps : c'est lorsque, au lieu d'un corps unique, on a réellement deux corps (A) et (B) simplement juxtaposés le long du plan XX' sans *adhérence* entre eux. Alors il est clair que les corps ne peuvent rester en équilibre que s'ils sont *pressés* l'un contre l'autre; toutes les composantes normales f_n de l'action de l'un des corps sur l'autre sont donc des forces parallèles *de même sens;* le point d'application de leur résultante ne peut, par suite, se trouver qu'entre les points d'application de ces forces, c'est-à-dire dans la partie de la ligne X'X placée à l'intérieur du corps. C'est ce qui arrive pour les voûtes en maçonnerie formées de pierres (appelées voussoirs) juxtaposées. Il est vrai qu'on interpose entre elles du mortier destiné à

établir leur adhérence; mais, par mesure de sécurité, on dispose généralement les voûtes de façon que leur stabilité soit assurée sans la présence du mortier; on admet alors qu'elle est assurée, à plus forte raison, lorsque le mortier existe.

§ 65.

DE L'EMPLOI DES FORCES FICTIVES INTRODUITES AU PARAGRAPHE PRÉCÉDENT. — Ce qui justifie l'introduction des forces élastiques fictives dont il est parlé dans ce qui précède, c'est la facilité avec laquelle on les déduit, par les seules règles de Statique, de la connaissance des forces extérieures. En général, le fait de savoir que les forces élastiques en nombre infini qui se produisent dans une section admettraient une résultante connue si on les composait comme si elles étaient appliquées à un système invariable ne suffit pas pour les déterminer, mais il constitue une donnée géométrique qu'on est en droit d'utiliser. Supposons que la section ne coupe le corps qu'en deux points, de sorte qu'il n'y ait que deux forces élastiques; si l'on connaît leur résultante (leurs points d'application sont d'ailleurs connus), il suffit d'avoir encore la direction de l'une d'elles pour qu'elles soient déterminées.

Supposons qu'étant en nombre infini on sache, par exemple, que leurs composantes normales sont uniformément réparties dans toute la section. Alors leur valeur, en chaque point, rapportée à l'unité de surface, est égale au quotient $\frac{N}{S}$ de leur résultante par l'aire de la section totale.

Plus généralement, supposons que l'on considère des corps comme des poutres ou arcs de ponts, de dimensions transversales très faibles par rapport à leur longueur.

La déformation élastique ou *flexion* se fait parallèlement au plan de symétrie. Les points situés sur une même perpendiculaire à ce plan subissent sensiblement les mêmes déplacements élastiques et, par suite, les mêmes pressions ou tensions, de sorte qu'il suffit de trouver les forces élastiques aux divers points de la trace DE (*fig.* 7, p. 104) d'une section sur le plan de symétrie pour les avoir en tous les points de la section. Considérons en particulier les composantes normales et admettons qu'en chaque point de DE

on élève une perpendiculaire égale à la valeur de la pression normale en ce point rapportée à l'unité de longueur de DE. Le lieu des extrémités de ces perpendiculaires sera une certaine courbe *de* qu'on ne connaît pas. Seulement (§ 64) l'aire de cette courbe est représentée par la résultante N. Ainsi, la connaissance de la grandeur de N définit cette aire. Nous verrons plus loin que la connaissance de la position de N définit un autre élément important de la courbe, son *centre de gravité*. La connaissance de ces deux éléments, quoique très utile, ne suffirait pas sans doute à tracer la courbe. Mais admettons, comme la dimension transversale DE est faible, que l'on puisse approximativement substituer à cette courbe une droite $\delta\varepsilon$ qu'on devra choisir de telle façon que les forces élastiques *approchées* représentées par les ordonnées de la droite fournissent en grandeur, position et sens la même résultante N que les composantes des forces véritables. Si l'on prolonge la droite $\delta\varepsilon$ jusqu'à sa rencontre en S avec la ligne X'X prolongée, cela revient à admettre comme approximation que *les forces élastiques varient proportionnellement à leurs distances à un point fixe* S *de la droite* X'X.

Si l'on se borne à cette approximation, qu'on désigne parfois sous le nom de *loi du trapèze*, parce que les forces sont représentées par les ordonnées d'un trapèze DE$\delta\varepsilon$, il est aisé de comprendre, et nous verrons plus loin que *la seule connaissance de la résultante* N *suffit* à trouver la position de la droite $\delta\varepsilon$ et, par suite, à connaître la répartition approchée des pressions.

Mais on ne doit pas perdre de vue que les considérations de pure Statique qui vont être développées relativement à la recherche de la résultante sont rigoureuses et ne s'appuient en rien sur la loi hypothétique du trapèze.

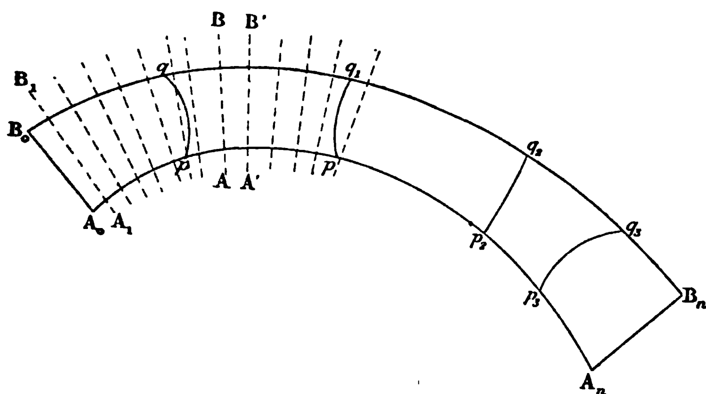
Nous avons seulement voulu montrer que, utile toujours, la connaissance de la résultante permet, à elle seule, de trouver la répartition des pressions si l'on veut y adjoindre cette hypothèse.

§ 66.

DÉFINITION DES SYSTÈMES DE CORPS ET DES FORCES CONSIDÉRÉS DANS CE CHAPITRE. — Nous considérons (*fig.* 8, p. 109) un corps ou plus généralement un système de corps symétriques par rapport à un

plan contenant toutes les forces extérieures, tels que A_0B_0pq, pqp_1q_1, $p_1q_1p_2q_2$, $p_2q_2p_3q_3$, $p_3q_3A_nB_n$ en contact les uns avec les autres le long des surfaces pq, p_1q_1, ... symétriques par rapport au plan des forces et d'ailleurs quelconques, soit sur toute l'étendue de ces surfaces, soit en un nombre limité de points, avec ou sans adhérence ; les sections extrêmes A_0B_0, A_nB_n, qui sont représentées planes, mais qui pourraient elles-mêmes être courbes, sont libres ou plus généralement appuyées à des corps fixes par un nombre quelconque de points.

Fig. 8.



En ce qui touche les forces données, nous savons (§ 62) que, si l'on veut étudier les pressions qu'elles déterminent dans les corps, il faut leur maintenir leurs points d'application véritables.

Les points d'application sont nécessairement à l'intérieur ou à la surface des corps sur lesquels agissent les forces ; et, comme nous supposons qu'elles n'agissent que dans le plan de symétrie, ils sont à l'intérieur ou sur le périmètre de la figure que le corps trace sur ce plan.

Il peut se présenter trois cas :

1° Il n'existe qu'un nombre fini de forces, par suite, un nombre fini de points d'application ;

2° Les forces se succèdent d'une manière continue, de façon telle, que leurs points d'application forment une ligne ;

3° Elles se succèdent d'une manière continue, de façon que leurs points d'application couvrent une aire de cette section.

Faisons, dans le système, des sections $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, ..., se succédant d'une manière continue suivant une loi quelconque. Nous les représentons planes; mais, sauf quand le contraire sera spécifié, les propriétés qui suivent s'étendent aussi bien à des sections courbes, par exemple, à des sections faites suivant les surfaces de séparation pq, $p_1 q_1$, ... des corps; mais, planes ou courbes, elles sont supposées symétriques par rapport au plan des forces.

Soient AB, A′B′ deux sections infiniment voisines. S'il s'agit de forces dont les points d'application couvrent une aire, nous serons amené à composer fictivement en une seule, dont il n'est pas nécessaire de définir le point d'application, toutes celles qui agissent ainsi sur chaque portion ABA′B′ du corps.

Nous l'appellerons une *résultante partielle*. On voit que les *résultantes partielles* sont essentiellement relatives au système de sections, planes ou non, qu'on a adoptées. Pour un autre système on aurait des résultantes partielles différentes.

On peut aussi avoir à considérer un nombre fini de sections et les résultantes partielles en nombre fini des forces agissant sur les parties du corps formées par deux sections consécutives.

§ 67.

Cas d'exception. — Nous écartons dans ce qui va suivre le cas où les centres de pression, dans les deux sections extrêmes $A_0 B_0$, $A_n B_n$, seraient à l'infini.

§ 68.

Théorème fondamental. — 1° *Si un système de corps comme ceux qui viennent d'être définis est soumis à un nombre fini de forces, parmi les polygones funiculaires de ces forces, il en existe toujours un qui jouit de la propriété que la résultante des forces élastiques exercées dans n'importe quelle section plane ou courbe faite dans le corps a pour ligne d'action l'un des côtés de ce polygone, et pour grandeur le rayon polaire correspondant.*

Le côté dont il s'agit est celui qui joint les deux forces dont les points d'application sont limitrophes de la section.

2° *Si les forces agissantes se succèdent d'une manière continue, de façon que leurs points d'application forment une ligne, parmi les courbes funiculaires de ces forces, il en existe toujours une qui jouit de cette propriété que la résultante des forces élastiques exercées dans une section plane ou courbe quelconque a pour ligne d'action l'une des tangentes à cette courbe, et pour grandeur le rayon polaire correspondant.*

La tangente dont il s'agit est celle menée au point où la courbe funiculaire est rencontrée par la ligne d'action de la force dont le point d'application est sur la section considérée.

3° *Si les forces agissantes sont telles que leurs points d'application occupent une aire dans le plan des forces, en considérant un système particulier de sections planes ou courbes choisies d'ailleurs arbitrairement parmi les courbes funiculaires des résultantes partielles* (§ 66) *correspondant à ce système de sections, il y en a une qui jouit de la propriété que la résultante des forces élastiques agissant dans l'une quelconque de ces sections a pour ligne d'action la tangente à cette courbe funiculaire au point où elle est rencontrée par la résultante partielle répondant à cette section, et pour grandeur le rayon polaire correspondant.* [*Si l'on prend les résultantes partielles d'un nombre fini de ces sections, il existe un polygone funiculaire de ces forces qui jouit, mais seulement à l'égard des sections en nombre fini dont il s'agit, des propriétés énoncées ci-dessus* (1°)].

1° Soit (*fig.* 9, p. 112) $A_0B_0A_1B_1$ le corps ou les corps considérés. Supposons-les soumis à un nombre fini de forces dont les points d'application sont

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,$$

les lignes d'action

$$1\alpha_1,\ 2\alpha_2,\ 3\alpha_3,\ 4\alpha_4,\ 5\alpha_5,$$

et les grandeurs (*fig.* 9, p. 113)

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

En vertu des restrictions faites au § 67, les réactions qui s'exercent dans la section extrême A_0B_0 (*fig.* 9) admettent une résul-

tante; soient r_0 la grandeur de cette résultante et $C_0 r_0$ sa ligne d'action.

Par l'origine a (*fig.* 9) du polygone des forces, menons aO égale et parallèle à r_0 et de sens contraire, de façon que Oa parcouru de O vers a représente la force r_0 en grandeur, direction et sens.

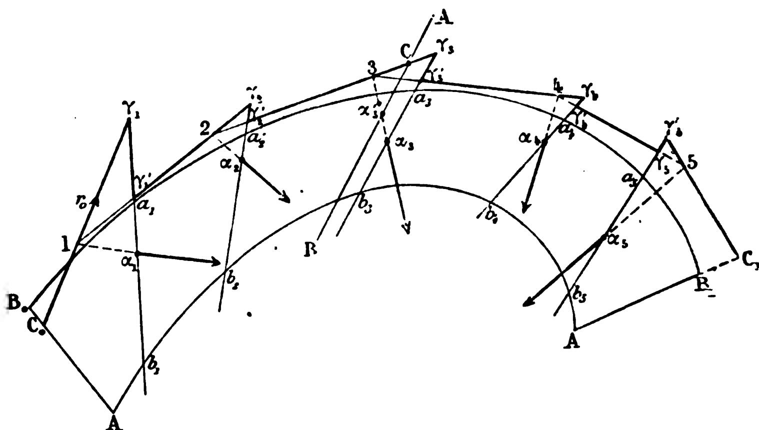
Construisons le polygone funiculaire des cinq forces données ayant le point O pour pôle et soit

$$C_0\ 1.2.3.4.5\ C_1$$

ce polygone

Coupons le corps ou le système de corps par une section quelconque, plane ou non, AB; les points d'application limitrophes de

Fig. 9.



cette section sont α_2 et α_3. Je dis qu'il en résulte que la ligne d'action de la force élastique totale r exercée sur la section AB par la partie A_0B_0AB est le côté 2.3 du polygone funiculaire et que cette force r est représentée en grandeur, direction et sens par le rayon polaire correspondant 2.3 ou OC compté depuis le pôle.

En effet, la partie A_0B_0AB du système doit être en équilibre sous l'action :

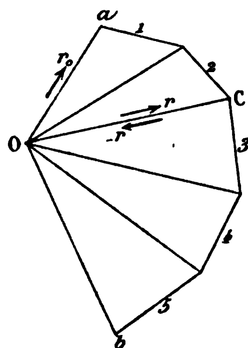
1° Des forces r_0, 1, 2,

2° De l'action exercée par A_1B_1AB suivant la surface AB et que nous appellerons $-r$.

La force $-r$ devant équilibrer celles r_0, 1, 2, la force $+r$ est leur résultante. Or la résultante des forces r_0 et $1.\alpha_1$ est représentée sur le polygone des forces par le rayon 1.2 et a pour ligne d'action 1.2 d'après la règle du parallélogramme; en composant de même cette résultante partielle avec la force 2, on obtient une nouvelle résultante représentée, sur le polygone des forces, par OC ou 2.3 et ayant pour ligne d'action le côté 2.3, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — On voit qu'il est essentiel de spécifier la position des points d'application, autrement on ne saurait pas quelles sont

Fig. 9.



les forces agissant sur la partie A_0B_0AB du corps. Si, par exemple, le point d'application α_3 se trouvait en α'_3, la force $3\alpha'_3$ agirait sur cette partie du corps; le théorème énoncé l'indiquerait bien, puisque, dans ce cas, les deux points d'application limitrophes de la section AB seraient non plus α_2 et α_3, mais α'_3 et α_4.

2° Ce qui précède reste vrai, quelque rapprochés que soient les points d'application des forces, par conséquent aussi à la limite lorsque ces points forment une courbe continue. Mais, dans ce cas, les deux points limitrophes α_2 et α_3 placés de part et d'autre de la section AB viennent se confondre au point où la section coupe la courbe lieu des points d'application, ce qui fournit l'énoncé de la seconde partie du théorème.

La troisième partie se déduit immédiatement de la seconde et de la première.

§ 69.

POLYGONE OU COURBE DES PRESSIONS. — Entre tous les polygones funiculaires des forces directement appliquées à un corps ou un système de corps comme ceux définis au § 66, celui défini par la partie 1° du théorème précédent est le seul qui fournisse tout à la fois la représentation des réactions des appuis, celle des forces élastiques totales qui s'exercent dans chaque section, et celle des actions mutuelles des corps les uns sur les autres. Car, pour avoir les actions mutuelles, il suffit d'appliquer le théorème à des sections pq, p_1q_1 ... (*fig.* 8, p. 109) faites suivant les surfaces de contact des corps.

Fig. 10.

Ce polygone donne donc, sous la forme la plus simple et la plus saisissante, toutes les indications que la Statique peut fournir sur les forces, tant extérieures qu'intérieures, qui agissent sur le système. On l'appelle le *polygone des pressions* ou la *courbe des pressions* dans le cas 2°.

Dans le cas 3°, le polygone ou la courbe des pressions est un polygone ou une courbe funiculaire, non plus des forces directement appliquées, mais de leurs résultantes partielles déterminées par un système de sections. Dans ce cas, il fournit les forces élastiques seulement pour ces sections.

La dénomination de *polygone des pressions* vient de ce que ce polygone a été d'abord employé à déterminer les pressions dans les voûtes en pierre; mais, sous la forme générale où il est présenté ici, il peut, suivant les cas, fournir des pressions ou des

tensions, et, par suite, être appelé *polygone* (ou courbe) *des forces élastiques*.

Nous conserverons cependant, en général, le nom consacré, en ajoutant qu'il mériterait d'être appelé aussi le *polygone* (*ou la courbe*) *de Méry*, du nom de l'Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées qui, le premier, en 1842, l'a utilisé dans l'étude des voûtes et est devenu ainsi, après Varignon et Coulomb, l'un des *fondateurs de la Statique graphique*.

§ 70.

POLYGONE OU COURBE LIEU DES CENTRES DE PRESSION. — Supposons maintenant qu'il s'agisse de sections planes. Quoique les lignes d'action des forces élastiques soient les côtés du polygone des pressions et que, par suite, les traces de ces côtés sur les sections planes forment les centres de pressions, il ne faudrait pas confondre le polygone ou la courbe des pressions avec le lieu des centres de pression.

Reprenons le cas des forces isolées et la section AB (*fig.* 9, p. 112) comprise entre les points d'application α_2 et α_3, de sorte que la force élastique qui y agit a pour ligne d'action 2.3, et le centre de pression C est l'intersection de cette ligne avec AB.

Considérons une suite de sections se succédant d'une manière continue suivant une loi quelconque et traçons, en particulier, celles $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, $a_4 b_4$, $a_5 b_5$ qui passent par les points d'application α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 des forces.

Toute section AB comprise entre les points α_2, α_3 ou entre les sections $a_2 b_2$ et $a_3 b_3$ subit une pression totale dirigée suivant 2.3. Donc, le lieu des centres de pression C de ces sections est la portion $\gamma'_2 \gamma_3$ du côté 2.3 prolongé. Mais, si l'on considère une section très voisine de $a_2 b_2$, comprise entre celle-ci et $a_1 b_1$, la ligne d'action de la force élastique qu'elle subit n'est plus dirigée suivant le côté 2.3 du polygone des pressions, mais suivant le côté 1.2. Donc, le lieu des centres de pression des sections comprises entre $a_1 b_1$ et $a_2 b_2$ est la portion $\gamma'_1 \gamma_2$ de la ligne indéfinie 1.2, comprise entre les sections $a_1 b_1$ et $a_2 b_2$.

On voit par là qu'il faut prendre les deux points d'intersection, tels que γ_1 et γ'_1, de chacune des sections $a_1 b_1$ passant par les points

d'application α_1 des forces, avec les deux côtés voisins du polygone des pressions, et alors le lieu des centres de pression est la ligne

$$C_0\gamma_1\gamma'_1\gamma_2\gamma'_2\gamma_3\gamma'_3\gamma_4\gamma'_4\gamma_5\gamma'_5 C_1,$$

qui montre que les centres de pression sont bien, ce qui est évident, sur les directions des côtés du polygone des pressions; mais une section, telle que AB, qui coupe le côté 3.4 de ce polygone n'a pas son centre de pression sur ce côté, mais sur celui 2.3 prolongé. Le centre de pression change brusquement pour deux plans infiniment voisins placés de part et d'autre de l'un des points d'application des forces agissantes.

Pour que ce changement brusque n'ait pas lieu et pour que le polygone des pressions soit en même temps lieu des centres de pression, il faut et il suffit que les deux points γ_1 et γ'_1, par exemple, se confondent tous deux au point 1 du polygone des pressions, ce qui exige que la section $a_1 b_1$ passant par le point d'application α_1 de la force $\alpha_1 1$ coïncide avec la ligne d'action de cette force et qu'il en soit de même des sections $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, ...

Si les forces se succèdent d'une manière continue, de façon que leurs points d'application forment une simple ligne, soient (*fig.* 10, p. 114) pq le lieu des points d'application α des forces et $C_0 C_1$ la courbe des pressions.

Considérons une section quelconque AB qui coupe le lieu des points d'application des forces en α. Soit M le point où la ligne d'action de la force agissant en ce point α rencontre la courbe funiculaire. La force élastique agissant dans la section AB a (§ 68, 2°) pour ligne d'action la tangente à la courbe funiculaire en M et, par suite, le centre de pression est au point de rencontre C de cette tangente avec AB.

On voit donc que le lieu des centres de pression C est une courbe toute différente de la courbe des pressions. Celle-ci d'ailleurs, dans le cas 2° du théorème du § 68, reste la même, quelles que soient les sections considérées, tandis que le lieu des points C change naturellement avec les sections.

Pour que le point C coïncide avec M, il faut et il suffit que la section AB passant au point α où agit la force αM coïncide avec la direction de cette force.

Ainsi :

1° *Si les forces agissantes sont isolées, il faut et il suffit, pour que le polygone des pressions soit en même temps lieu des centres de pression d'un système de sections, que celles des sections qui passent par les points d'application des forces contiennent leurs lignes d'action, toutes les autres sections pouvant être arbitraires.*

2° *Si les forces agissantes se succèdent d'une manière continue de façon que le lieu de leurs points d'application soit une ligne, il n'y a qu'un système de sections pour lequel le lieu des centres de pression coïncide avec la courbe des pressions : c'est celui qui est déterminé par les lignes d'action des forces agissantes.*

3° *Si les forces agissantes se succèdent d'une manière continue de façon que le lieu de leurs points d'application occupe une aire, il n'y a aussi qu'un système de sections jouissant de la propriété spécifiée : c'est celui déterminé par les lignes d'action des résultantes partielles* (cette partie du théorème se démontre comme celle 2°).

Ainsi, si, comme il arrive le plus fréquemment, les forces agissantes sont verticales, il n'y a, dans les deux cas de forces continues, que les sections verticales qui possèdent la propriété indiquée, et, dans le cas de forces isolées, les sections, quelles qu'elles soient, pourvu que, parmi elles, se trouvent les sections déterminées par les verticales des forces agissantes.

Dans une voûte en maçonnerie on cherche généralement la courbe des pressions pour des sections normales à l'intrados. Il n'y a qu'une section pour laquelle le centre de pression soit sur la courbe des pressions : c'est la section à la clef, parce qu'elle est verticale.

Lorsqu'on fait un nombre fini de sections et qu'on cherche le polygone funiculaire des résultantes partielles, pour trouver le polygone lieu des centres de pression dans les sections particulières qu'on a faites, il faut procéder comme il a été dit ci-dessus (§ 68), dans le cas de forces isolées.

§ 71.

THÉORÈME. — *Pour qu'un corps ou un système de corps, comme ceux spécifiés dans ce qui précède, soumis à des forces quelcon-*

ques, sauf celles exceptées au § 67, *soit en équilibre, il faut et il suffit :*

1° *Si les forces sont isolées, que, parmi leurs polygones funiculaires, il en existe au moins un qui puisse servir de polygone des pressions, c'est-à-dire qui, considéré comme un polygone des pressions, fournisse, pour les réactions des appuis et les actions mutuelles des corps, des pressions auxquelles les corps puissent résister en vertu de leurs liaisons entre eux et aux appuis;*

(Nous dirons que de telles pressions sont *compatibles* avec les liaisons du système.)

2° *Si les forces sont continues, leurs points d'application formant une ligne, qu'il existe au moins une courbe funiculaire qui, considérée comme courbe de pression, fournisse pour les réactions des appuis et les actions mutuelles des corps des pressions compatibles avec les liaisons.*

3° *Si les forces sont continues, leurs points d'application formant une aire, si l'on fait un système de sections en nombre fini* (*ou non*) *comprenant celles qui contiennent les points de contact des corps entre eux et aux appuis, il existe au moins un polygone* (*ou une courbe*) *funiculaire des résultantes partielles correspondantes, qui satisfasse à la condition indiquée* 1° (*ou* 2°).

Supposons qu'il s'agisse de forces isolées. La condition est évidemment nécessaire; car, si l'équilibre existe, nous savons (§ 68) qu'il existe un polygone funiculaire qui est un polygone des pressions et fournit, par conséquent, entre les corps, des actions mutuelles qui existent réellement, et, par suite, sont compatibles avec leurs liaisons.

Elle est suffisante.

Supposons, en effet, qu'il existe un polygone funiculaire qui, considéré comme polygone des pressions, fournisse entre tous les corps, y compris les appuis, des actions mutuelles compatibles avec leurs liaisons.

Considérons l'un quelconque des corps et la portion du polygone funiculaire relative aux forces qui le sollicitent. Par hypothèse, les réactions qu'il éprouve de la part des deux corps avec

lesquels il est en contact sont dirigées suivant les côtés extrêmes de cette portion du polygone et égales aux rayons polaires correspondants parcourus en allant de l'extrémité à l'origine du polygone des forces et passant par le pôle. Or, ces forces équilibrent celles qui sont directement appliquées au corps en vertu des propriétés mêmes des polygones funiculaires.

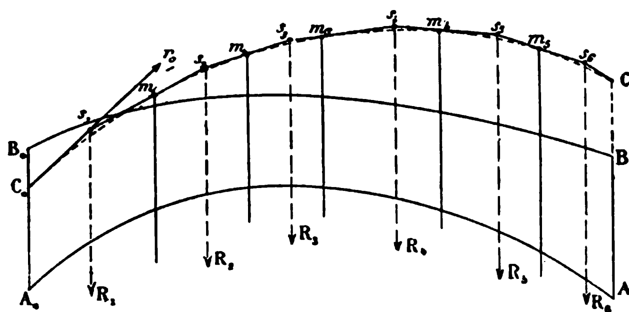
Ainsi, sous l'influence de ces réactions auxquelles les liaisons peuvent, par hypothèse, résister, chaque corps, et par suite le système tout entier, se trouve en équilibre.

La même démonstration s'étend aux cas 2° et 3°.

§ 71 *bis* (¹).

SUR LE TRACÉ DES COURBES DE PRESSION. — Supposons des forces continues dont le lieu des points d'application forme une ligne et admettons, pour abréger le langage, que ces forces soient verticales. Si elles ne l'étaient pas, tout ce qui est dit des lignes ou des sections verticales s'appliquerait à des lignes ou sections faites suivant les lignes d'action des forces données.

Fig. *a*.



Soit (*fig. a*) A_0B_0AB un corps ou système de corps soumis à des forces verticales se succédant d'une manière continue suivant une loi quelconque.

Soient C_0r_0 la réaction sur l'appui A_0B_0 et C_0C la courbe des pressions tracée en traits discontinus.

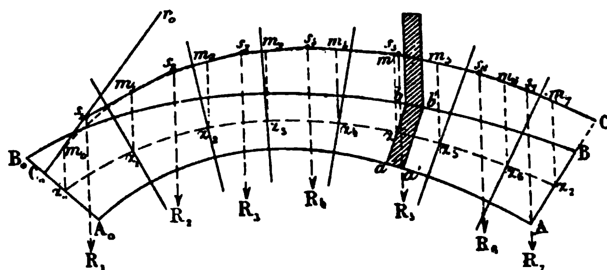
Menons un nombre fini de sections verticales qui coupent cette courbe aux points m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 et par ces points circonscrivons à la

(¹) Ce paragraphe n'est pas indispensable pour comprendre la suite.

courbe un polygone. Soient s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 ses sommets. D'après une propriété des courbes funiculaires (§ 45 *bis*), le sommet s_1 est un point de la résultante des forces verticales comprises entre la section extrême C_0 et la section m_1; de même, le point s_2 est un point de la résultante des forces comprises entre les sections m_1 et m_2, et ainsi de suite. Soient R_1, R_2, ... ces résultantes.

D'après la définition même du polygone des pressions, le polygone $C_0 s_1 s_2 \dots s_5 C_1$ est polygone des pressions, relativement aux sections m_1, m_2, m_3, m_4, m_5. Donc, inversement, si, dans le système des corps considérés, on fait un nombre fini de sections verticales, que l'on puisse, par un moyen quelconque, trouver les résultantes partielles des forces agissant entre ces sections et que l'on construise le polygone des pressions relatif à ces résultantes partielles, il sera circonscrit à la courbe des pressions des

Fig. *b*.



forces continues, ***aux points*** où il est coupé par les sections; le tracé de la courbe inscrite peut ainsi se faire avec une grande exactitude, puisque les points de contact C_0, m_1, m_2, ... sont connus.

Si les forces sont telles que leurs points d'application couvrent une aire, on sait que la même règle subsiste, c'est-à-dire que le ***polygone des pressions*** relatif aux résultantes partielles R_1, R_2, ... des forces comprises entre un nombre fini de sections verticales est circonscrit à ***la courbe des pressions*** relative à des sections verticales se succédant d'une manière continue, et les points de contact sont les points d'intersection des sections verticales avec le polygone tracé.

Supposons toujours le cas de forces verticales dont les points d'application couvrent une aire. Imaginons un système de sections inclinées se succédant d'une manière continue, par exemple, des sections normales à l'arc $A_0 A$ (*fig. b*).

Concevons deux sections infiniment voisines ab, $a'b'$, et construisons la résultante partielle de toutes les forces agissant entre ces deux sections. Ces forces peuvent se composer du poids de la portion de corps $aba'b'$ et d'un poids comme celui figuré en hachures. En les composant, on obtient une résultante partielle (non représentée sur la figure).

Soit α le point où la ligne d'action verticale de cette résultante coupe la section *ab*. Le lieu des points α fournira une courbe.

Soit d'ailleurs C_0C la courbe des pressions de ces résultantes partielles. Elle donnera les pressions non pas sur des sections quelconques, comme dans les cas 1° et 2° du théorème du § 68, mais seulement sur les sections considérées, c'est-à-dire sur toute section normale à A_0A.

Pour avoir la ligne d'action de la pression sur *ab*, il suffit par le point α de mener la verticale αm, et la tangente en m à la courbe des pressions sera la ligne d'action de la pression cherchée. Le rayon polaire correspondant en sera la grandeur.

Ceci posé, parmi les sections considérées, prenons-en un nombre fini; celles qui coupent le lieu des points α en α_1, α_2, α_3 ...; déterminons ces points α_1, α_2, α_3, ... par la considération de chaque section α et d'une section infiniment voisine, et la construction de la résultante partielle des forces agissant entre elles, comme nous avons fait pour le point α. Cette construction est facile et le sera surtout si l'on s'aide de la théorie du *centre de gravité* dont il sera parlé plus loin.

Menons les verticales $\alpha_1 m_1$, $\alpha_2 m_2$, $\alpha_3 m_3$, ..., $\alpha_6 m_6$, $\alpha_7 m_7$, jusqu'à leur rencontre avec la courbe des pressions en m_1, m_2, m_3, m_4, ...; par ces points, circonscrivons un polygone à cette courbe. Les sommets s_1, s_2, s_3, ... de ce polygone donnent les positions des résultantes partielles des forces agissant entre les sections considérées, et le polygone lui-même est rigoureusement polygone des pressions relativement aux sections particulières α_1, α_2, α_3, ...

Donc, réciproquement, ayant choisi un nombre fini de sections parmi celles relativement auxquelles on veut tracer une courbe des pressions, déterminez les points α_1, α_2, ... sur ces sections et les résultantes partielles R_1, R_2 ... des forces comprises entre elles (ce qui ne pourra se faire qu'approximativement); tracez le polygone des pressions relatif aux forces en nombre fini R_1, R_2, R_3, ... et menez les verticales des points α_1, α_2, ... jusqu'à leur rencontre en m_1, m_2, ... avec ce polygone. Inscrivez une courbe dans ledit polygone, les points de contact étant m_1, m_2, ..., vous aurez la courbe des pressions cherchée avec une grande approximation.

Remarque. — Dans les voûtes en maçonnerie où cette construction peut être utilisée, nous verrons que la courbe des pressions ne doit pas s'éloigner beaucoup des milieux des sections; il en est de même des points α; par suite, on néglige parfois de déterminer les points α et l'on inscrit la courbe dans le polygone sans que les points de contact aient été déterminés. Mais il faudrait se garder de croire que ces points de contact soient les points où les sections elles-mêmes coupent le polygone des pressions. Ce n'est que pour des sections verticales qu'il en serait ainsi.

§ 72.

CONDITIONS POUR QUE LES PRESSIONS PUISSENT ÊTRE DÉTERMINÉES PAR LA STATIQUE. — Pour que des corps comme ceux définis au § 66 soient en équilibre, il faut et il suffit que l'on trouve au moins un polygone funiculaire des forces données qui puisse servir de polygone des pressions ([1]). Or trois conditions sont nécessaires et suffisantes pour définir un polygone funiculaire. Donc :

1° Si les liaisons sont telles que, en vertu de leur définition même, elles assujettissent le polygone des pressions à trois conditions, celui-ci pourra être tracé et fournira les pressions qui naissent dans le système;

2° Si les liaisons sont telles que le polygone des pressions soit assujetti à plus de trois conditions, il ne pourra, en général, pas exister, et, par suite, l'équilibre du système sera impossible, à moins qu'entre les forces données il existe certaines relations que la Statique permettra toujours de trouver (§ 50). Si, par exemple, le polygone des pressions est assujetti à passer par n points, n étant supérieur à 3, on tracera le polygone funiculaire des forces données passant par trois des n points. S'il se trouve qu'il passe de lui-même par les $n - 3$ autres, l'équilibre sera assuré et les pressions déterminées. Dans le cas contraire, l'équilibre est impossible, puisqu'il est nécessaire, pour l'équilibre, qu'il existe un polygone funiculaire qui soit polygone des pressions;

3° Si les liaisons assujettissent le polygone des pressions à moins de trois conditions, alors il existera une infinité de polygones funiculaires pouvant servir de polygone des pressions. L'équilibre sera, au point de vue statique, également bien assuré par chacun d'eux et, pour trouver quel est le véritable, il faut avoir égard à la nature et à la forme des corps, ce qui exige qu'on ait recours à la

---

([1]) Nous parlerons toujours du polygone des pressions, étant entendu que, si les forces sont continues, le polygone est remplacé par une courbe. En parlant de polygones, on comprend tous les cas, puisque, ce qui est vrai pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés est vrai pour une courbe, tandis que l'inverse n'a pas lieu. De même, en considérant des forces isolées qui peuvent être aussi voisines que l'on veut, on comprend le cas des forces continues, tandis que ce dernier cas ne comprend pas le premier.

théorie de l'élasticité ou, si la température intervient, à celle de la chaleur.

Quelques applications vont éclaircir ces considérations générales.

§ 73.

REMARQUES SUR LES CHARNIÈRES. — Nous regarderons une charnière comme un cylindre de dimensions infiniment petites ou même comme un cylindre circulaire de dimensions finies traversant deux ou plusieurs corps. Le point où l'axe du cylindre perce le plan de symétrie contenant les forces se nomme le *centre* ou *point d'articulation*.

Il peut se faire qu'on applique des forces à la fois sur les corps et sur l'axe de la charnière ou qu'on en applique seulement sur la charnière ou seulement sur les corps.

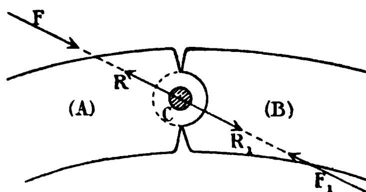
Soit (*fig.* 11, p. 124) (A) un des corps en nombre quelconque traversés par la charnière dont le centre ou point d'articulation est C. On peut la supprimer et regarder le corps (A) comme libre, pourvu qu'aux forces qui le sollicitent on adjoigne une force R égale à la réaction qu'il éprouve de la part de la charnière. Cette réaction est normale à la surface cylindrique de la charnière au point où celle-ci presse le corps; mais ce dernier point n'est pas connu *a priori;* il dépend des forces qui agissent sur le corps et sur la charnière. Ainsi, si deux forces F et F_1, égales et opposées et de direction quelconque, passaient par le point C, la charnière ferait naître sur le corps (A) une réaction R égale et opposée à F et sur (B) une réaction R_1 égale et opposée à F_1. Si les forces F et F_1 changeaient de sens ou de direction, il en serait de même de celles R et R_1, et les points de contact de la charnière et des corps, c'est-à-dire les points où se produisent les pressions, seraient tous deux sur le nouveau diamètre déterminé par la ligne d'action commune des deux forces.

Ce point n'est pas toujours aussi facile à déterminer que dans cet exemple; mais, quel qu'il soit, si l'on fait abstraction du frottement, la réaction entre les deux surfaces en contact est dirigée suivant leur normale commune et, comme l'une de ces surfaces est cylindrique, toutes ses normales passent par son centre C. Ainsi,

pour rendre libre un des corps en nombre quelconque traversés par une charnière C, il suffit de lui appliquer une force R *passant par le point* C *ou centre d'articulation. La grandeur et la direction de cette force sont d'ailleurs* a priori *indéterminées* et dépendent des conditions d'équilibre entre les forces agissant tant sur la charnière que sur les corps qu'elle relie.

Toute direction donnée à ces forces est compatible avec le mode de liaison du système, c'est-à-dire que la charnière peut résister à des forces passant par son centre, quelles que soient

Fig. 11.



les directions de ces forces et, par suite, aussi exercer sur les corps qu'elle relie des réactions de directions quelconques. La liaison entre chaque corps et la charnière est faite précisément pour que le corps puisse, de son côté, résister à de telles réactions.

§ 74.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE DES POLYGONES ARTICULÉS LORSQUE DES FORCES AGISSENT A LA FOIS SUR LES COTÉS ET LES SOMMETS DU POLYGONE. — Considérons un système de corps ayant tous un même plan de symétrie dans lequel agissent les forces qui le sollicitent, articulés entre eux de manière à former un polygone articulé, c'est-à-dire de manière que chaque corps ne porte que deux charnières (la ligne de jonction de leurs centres forme un côté du polygone articulé) et que chaque charnière ne traverse que deux corps.

Théorème. — *Quelles que soient les forces appliquées, soit aux différents corps, soit aux charnières, que les corps extrêmes s'appuient à des articulations fixes ou soient encastrés (c'est-à-dire fixés en tous les points d'une section plane les terminant), pour que le système soit en équilibre, il faut et il*

suffit que l'on puisse trouver un polygone funiculaire de toutes les forces agissantes (sans distinction entre celles appliquées aux corps ou celles appliquées aux charnières) qui passe par tous les points d'articulation. Ce polygone, qui sera le polygone des pressions, fournira alors non seulement les réactions des appuis et les actions entre les corps et les charnières, mais la résultante des forces élastiques agissant dans une section quelconque faite dans l'un des corps.

En effet (§ 68), pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit qu'on y puisse tracer un polygone des pressions, c'est-à-dire un polygone tel que la résultante des forces exercées dans une section quelconque, plane ou courbe du système, soit dirigée suivant un côté de ce polygone et soit représentée par le rayon polaire correspondant.

Soit C une charnière (*fig.* 12, p. 126).

Faisons une section mixtiligne *ab*A*cd* suivant l'*about* ou extrémité de l'un des deux corps traversés par la charnière C. Si A est le point de contact entre la charnière et le corps, il n'agit dans cette section qu'une seule force, celle exercée par la charnière et qui passe nécessairement par son centre C. Il faut donc que le côté 1.2 du polygone des pressions avec lequel cette force coïncide passe aussi par le point C.

Ainsi, le polygone des pressions doit passer par le centre de la charnière C et, comme nous pouvons faire le même raisonnement pour chaque charnière, il doit passer par tous les points d'articulation.

Mais nous savons que le polygone des pressions est un des polygones funiculaires des forces agissant sur le système. Donc, il est *nécessaire* qu'on puisse trouver un polygone funiculaire de ces forces passant par tous les points d'articulation.

Cette condition est d'ailleurs suffisante en vertu du théorème du § 71 ; car un polygone funiculaire passant par les centres d'articulation étant considéré comme un polygone des pressions ne fournit entre les charnières et les corps que des actions mutuelles passant par ces centres et par conséquent (§ 73) compatibles avec les liaisons du système.

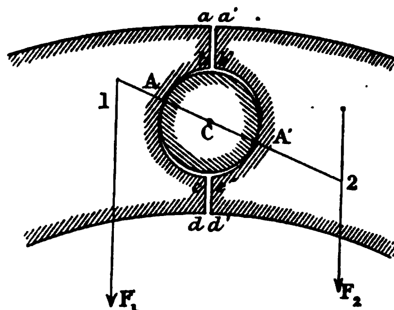
Remarque. — Supposons (*fig.* 12) qu'aucune force n'agisse

sur la charnière et que les deux forces limitrophes de la charnière soient F_1 et F_2; alors la pression que supporte la section *ab*A*cd* doit coïncider avec le côté 1.2 du polygone des pressions joignant les forces F_1 et F_2 (§ 68).

Si l'on fait la section *a'b'*A'*c'd'*, la pression au point de contact A' du second corps traversé par la charnière doit coïncider avec le même côté, puisque les points d'application des forces F_1 et F_2 sont aussi limitrophes de cette seconde section. Ainsi, dans ce cas, *le polygone des pressions ne présente pas de sommet au point d'articulation.*

Les forces exercées en A et A' par la charnière sur les deux

Fig. 12.



corps ont même direction; les points de contact A et A' sont diamétralement opposés, ce qui doit être, puisque, tout le système devant être en équilibre, la charnière en particulier doit être en équilibre et, comme elle ne supporte d'autres forces que les réactions en A et A', ces deux réactions doivent être l'une et l'autre dirigées suivant AA'. Notre théorème général indique d'ailleurs bien qu'elles sont égales et opposées, étant représentées toutes deux par le rayon polaire parallèle à 1.2 parcouru dans les deux sens.

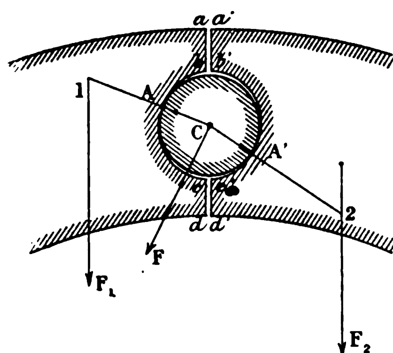
Si (*fig.* 12 *bis*) il agit une force F au point C, alors la pression exercée sur la section *ab*A*cd* coïncide avec le côté 1.C du polygone des pressions qui relie les deux forces F_1 et F limitrophes de cette section, tandis que la pression exercée sur la section *a'b'*A'*c'd'* coïncide avec le côté C2 qui relie les forces F et F_2 limitrophes de cette seconde section. Ainsi, dans ce cas, *le polygone des pressions présente un sommet au point d'articulation.*

On peut résumer cette observation ainsi :

1° Si aucune force n'agit sur une charnière C, les actions mutuelles des deux corps et celles qu'ils exercent l'un et l'autre sur la charnière ont pour grandeur commune le rayon polaire correspondant au côté du polygone des pressions qui passe au point C.

2° Si une force agit au point C, il passe en ce point deux côtés du polygone des pressions; l'action de chaque corps sur la charnière est égale au rayon polaire correspondant à celui des deux côtés qui est placé du côté de ce corps.

Fig. 12 *bis*.



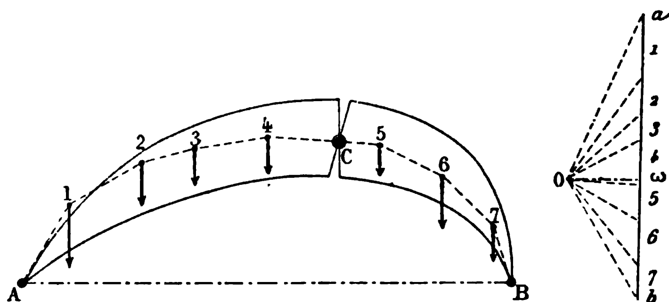
§ 75.

POUSSÉE D'UN ARC POSÉ SUR APPUIS SIMPLES, AVEC UNE CHARNIÈRE. — THÉORÈME. — *Quelles que soient les charges que porte un arc posé sur deux tourillons fixes* A *et* B *(de niveau ou non) et portant une charnière* C *en l'un de ses points, le polygone funiculaire des forces qui le sollicitent, passant par les trois points* A, B, C, *est son polygone des pressions. Par conséquent, les côtés extrêmes de ce polygone fournissent les directions des réactions des appuis; les grandeurs de ces réactions sont données par les rayons polaires correspondants.* Ce polygone est d'ailleurs facile à tracer (§ 45).

Soient (*fig.* 13) O le pôle de ce polygone et *ab* (*fig.* 13) la ré-

sultante des forces agissant sur l'arc tout entier et sur la charnière (si celle-ci porte elle-même une charge); les réactions des appuis sont représentées par Oa et bO. Donc, si l'on mène une parallèle Oω à AB, la poussée de l'arc est donnée par la longueur Oω, les réactions verticales par ωa et $b\omega$. D'après cela, si l'on ne cherche que les réactions des appuis, il suffit de déterminer la position du pôle. Si, au contraire, on veut avoir les forces élastiques et actions des corps sur les charnières, il faut tracer le polygone funiculaire.

Fig. 13. Fig. 13.



Remarque. — S'il n'y avait pas de charnière C, la condition, pour le polygone des pressions, de passer par ce point n'existerait pas. Tous les polygones funiculaires ayant leurs pôles sur la ligne indéfinie ωO menée par le point ω parallèlement à AB, passant par les points A et B (§ 43), pourraient (§ 71) servir de polygone des pressions et assureraient l'équilibre au point de vue statique, de sorte *qu'*une *condition serait, dans ce cas, à emprunter à la théorie de l'élasticité* pour la détermination du polygone des pressions.

§ 76.

ARC ENCASTRÉ A UN BOUT, SIMPLEMENT APPUYÉ A L'AUTRE AVEC DEUX CHARNIÈRES; REMARQUE SUR CET ARC SANS CHARNIÈRE. — Si un arc est encastré (*fig.* 14) suivant une section AB et simplement appuyé sur un tourillon fixe à son autre extrémité A_0 et qu'il porte deux charnières C et C', son polygone des pressions est défini par la

condition de passer par les trois charnières A_0, C, C'; nous savons donc le tracer (§ 45).

Soient $A_0$1.2.3.4.5.6.7D ce polygone (*fig.* 14) et O son pôle (*fig.* 14). La réaction de l'appui fixe A_0 est dirigée suivant $A_0$1 et représentée par le rayon polaire correspondant O*a*.

La *résultante* des réactions de l'appui fixe AB est, de même, dirigée suivant D7 et égale au rayon polaire correspondant *b*O.

Lorsque l'arc est complètement encastré, c'est-à-dire lorsqu'il y a adhérence entre lui et son appui le long de AB, le centre de pression D peut se trouver hors du corps. Si, au contraire, il est simplement *posé* sur l'appui AB sans lui être invariablement relié,

Fig. 14.

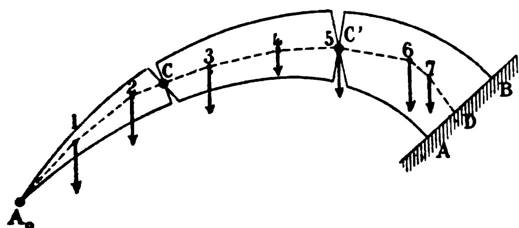
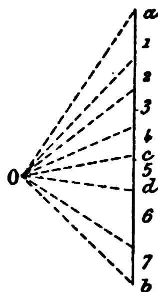


Fig. 14.



alors, cet appui ne pouvant résister qu'à des compressions, le centre de pression se trouve nécessairement entre les points A et B (§ 64, *Rem.*).

A la charnière C où il n'y a pas de force directement appliquée, l'action de chaque corps sur la charnière est dirigée suivant le côté 2.3 du polygone funiculaire et représentée par le rayon polaire correspondant. Ces deux actions sont égales et opposées.

Sur la charnière C' où agit une force et où, par suite, le polygone des pressions a un sommet, l'action de la partie CC' de l'arc est dirigée suivant le côté 4C' ou 4.5 et égale au rayon polaire correspondant 4.5, et l'action de la partie ABC' sur la même charnière est dirigée suivant le côté 6.5 ou 6C' et représentée par le rayon polaire correspondant 6.5.

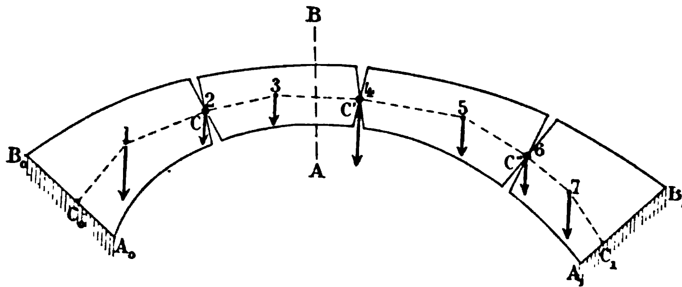
Remarque. — Si l'arc ne portait pas les deux charnières C

et C′, le polygone des pressions ne serait plus soumis qu'à la seule condition de passer par le point A_0. Les *deux* autres conditions nécessaires à sa détermination seraient donc à emprunter à la théorie de l'élasticité (*voir* tome II).

§ 77.

ARC ENCASTRÉ AUX DEUX BOUTS AVEC TROIS CHARNIÈRES. — Si l'arc $A_0B_0A_1B_1$ (*fig.* 15), encastré suivant ses deux sections extrêmes, porte trois charnières C, C′, C″, il faudra encore que le polygone des pressions passe par ces trois points, ce qui permet de le tracer

Fig. 15.



(§ 45), et si $C_0$1.2.3.4.5.6.7C_1 est ce polygone dont trois sommets 2, 4 et 6 se trouvent coïncider avec les charnières, parce qu'on a supposé des forces directement appliquées à chacune d'elles, les côtés extrêmes et leurs rayons polaires correspondants (ceux-ci non représentés) donnent les résultantes des réactions des appuis, et de même, pour une section quelconque AB, le côté 3.4 et le rayon polaire correspondant donnent (§ 68) la résultante des forces élastiques de cette section.

Remarque. — Si l'on supprime les charnières, on ne possède plus *a priori* aucune condition à laquelle le polygone des pressions soit soumis.

Tous les polygones funiculaires des forces données, sans exception, peuvent être adoptés comme polygone des pressions sans qùe les conditions d'équilibre cessent d'être satisfaites. Par conséquent, les *trois* conditions nécessaires pour définir celui de ces

polygones funiculaires qui constitue, en réalité, le polygone des pressions, sont alors à emprunter à la théorie de l'élasticité ou de la résistance des matériaux (*voir* tome II).

§ 78.

POLYGONE DE VARIGNON. — Le théorème du polygone de Varignon que ce célèbre géomètre a donné en 1725 et qui constitue le point de départ de toute la Statique graphique est un cas particulier de celui établi au § 74. C'est le cas où il n'agit de forces que sur les charnières et non sur les corps eux-mêmes. Alors, puisque le polygone des pressions passe par tous les points d'articulation, il coïncide nécessairement avec le polygone ayant ces points pour sommets.

Ainsi :

THÉORÈME. — *Pour qu'un système de corps comme ceux définis au théorème du* § 74 *ne supportant aucune force, le système n'étant soumis qu'à des forces agissant sur les charnières, soit en équilibre, il faut et il suffit que le polygone dont les sommets sont les points d'articulation soit l'un des polygones funiculaires des forces agissantes.*

Ce polygone est alors le polygone des pressions du système.

En raison de son rôle historique et de son importance, nous allons, ne quelques mots, établir ce théorème directement.

Soient (*fig.* 16, p. 132) 1, 2, 3, 4, 5 les points d'articulation sur lesquels agissent les forces données.

Chaque corps est traversé par deux charnières et les corps extrêmes $1C_0$ et $5C$ s'appuient sur des charnières fixes ou sont encastrés. Supposons, par exemple, que le premier porte sur une charnière fixe C_0 et que le second soit encastré au mur suivant un plan fixe C.

Observons que ce corps est ainsi entièrement fixe; il ne peut pas, comme les autres, tourner autour d'une charnière. La charnière 5 qui le traverse est donc elle-même fixe et tout se passe comme si l'on ne considérait que le polygone $C_0 1.2.3.4.5$ porté sur charnières fixes à ses deux extrémités.

Pour que le système formé :

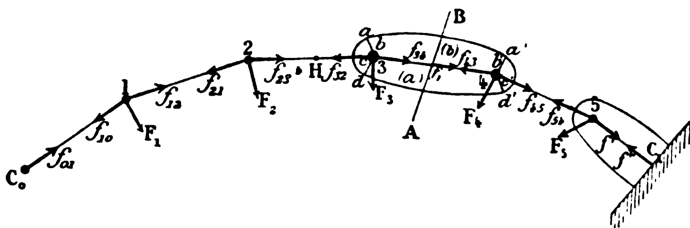
1° Par les corps;

2° Par les charnières non fixées 1, 2, 3, 4, soit en équilibre, il faut et il

suffit que chaque corps et chaque charnière soient séparément en équilibre sous l'action des forces qui leur sont appliquées.

Or, si l'on considère le corps traversé par les deux charnières 3 et 4, on peut (§ 73) supprimer ces charnières et regarder le corps comme libre, pourvu qu'on lui applique une force convenable passant par le centre de chaque charnière. Mais ici, le corps ne supportant pas d'autre force que ces deux réactions, pour qu'il soit en équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient égales et opposées, ce qui exige qu'elles soient dirigées l'une et l'autre suivant le côté 3.4 du polygone formé par les centres d'articulation. Soient f_{34} celle appliquée en 3 et f_{43} celle égale et opposée à la précédente appliquée en 4. Nous assurons ainsi l'équilibre de tous les corps en

Fig. 16.



appliquant, suivant les lignes de jonction, des paires de forces égales et opposées et de *grandeurs indéterminées*. Ces forces sont

f_{10}, f_{01} suivant le côté $C_0 1$;

f_{12}, f_{21} suivant le côté 1.2;

et ainsi de suite jusqu'aux forces f_{43} et f_{34} dirigées suivant le côté 4.3. Quant au dernier corps, comme il est encastré, il est en équilibre, quelles que soient les forces qui le sollicitent; il ne fournit donc aucune condition d'équilibre.

Si nous considérons, à présent, l'une quelconque des charnières, par exemple, celle 3, elle supporte : 1° la force directement appliquée F_3; 2° la pression du corps $ada'd'$, laquelle est égale et opposée à la réaction f_{34} que la charnière elle-même exerce sur ce corps; soit f'_{34} cette force; 3° la pression du corps articulé en 2 et 3, laquelle est, de même, une force f'_{32} égale et opposée à f_{32}.

Donc, les trois forces f'_{32}, f'_{34}, F_3 doivent être en équilibre, ce qui exige que celles f_{32} et f_{34} admettent F_3 pour résultante ou soient les composantes de F_3 suivant les deux côtés adjacents du polygone formé par les points d'articulation.

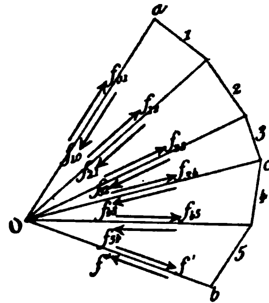
Ainsi, si l'on décompose chacune des forces F_1, F_2, ... *en deux autres suivant les côtés adjacents du polygone articulé, les deux composantes telles que* f_{10}, f_{01}; f_{12}, f_{21}; ..., *dirigées suivant chaque*

côté du polygone, doivent être égales et opposées, et ce sont là les conditions nécessaires et suffisantes pour que tout le système soit en équilibre.

Or, comme on le voit sur la *fig.* 16, où la décomposition est faite ou en se reportant au § 33, cela revient à dire que le polygone articulé doit être un polygone funiculaire des forces données. Chaque rayon polaire exprime la pression du côté correspondant.

Le rayon extrême donne en grandeur, direction et sens la pression f' exercée sur le plan C; car le point 5 rendu libre doit, comme les autres, être en équilibre sous l'action de la force F_5 et de deux forces égales et opposées à celles f_{54} et f'.

Fig. 16.



Corollaire I. — Soient (*fig.* 16) f'' la réaction du plan fixe C_1 et f_{01} celle du point fixe C_0. On peut rendre le polygone $C_0 1.2.3.4.5 C_1$ libre pourvu qu'aux forces F_1, F_2, ..., F_5 agissant en ses sommets on adjoigne des forces appliquées suivant ses côtés extrêmes et égales à f_{01} et f''.

Ainsi :

Pour qu'un polygone articulé formé de corps comme ceux spécifiés ci-dessus et libre soit en équilibre sous l'action de forces agissant : 1° *en ses sommets,* 2° *en ses extrémités, il faut et il suffit qu'il soit un des polygones funiculaires des forces agissant sur les sommets et que les deux forces agissant aux deux extrémités soient dirigées suivant les côtés extrêmes de ce polygone funiculaire et égales aux rayons polaires correspondants.*

Corollaire II. — De là, on déduit, pour le cas où le polygone est fermé :

Pour qu'un polygone articulé, fermé et libre, aux sommets duquel agissent des forces, soit en équilibre, il faut et il suffit que le polyone de ces forces soit fermé (condition évidente en vertu des § 35 et 46) *et que le polygone articulé donné soit l'un des polygones funiculaires des forces agissantes.*

§ 79.

PROBLÈMES SUR LES POLYGONES DE VARIGNON OU POLYGONES ARTICULÉS. — PROBLÈME I. — *Un polygone* C_0 1.2.3.4.5 C_1 (*fig.* 16), *dont les longueurs des côtés sont données, ainsi que les forces agissant sur ses divers sommets, est porté à l'une de ses extrémités sur un tourillon fixe* C_0 *et encastre à l'autre sur un plan fixe* C_1. *Le corps encastré a sa charnière en un point donné* 5; *de plus un côté* 2.3 *du polygone est assujetti à passer par un point donné* H; *trouver :* 1° *la forme d'équilibre du polygone;* 2° *les résultantes des pressions ou tensions des corps articulés dont il est formé;* 3° *les pressions sur les appuis.*

Il suffit de tracer le polygone funiculaire des forces données assujetties à passer par les trois points A, 5, H (§ 45).

Soit O le pôle parfaitement déterminé de ce polygone. L'un des corps, celui traversé par les charnières b et b' par exemple, supporte deux pressions égales et opposées f_{34}, f_{43} représentées par le rayon polaire 3.4 (*fig.* 16). Si l'on fait une section quelconque AB, qui divise ce corps en deux parties (a) et (b), la partie (b) est en équilibre sous l'action de la force f_{43} et de la résultante f_1 des forces exercées sur (b) suivant la section AB. Il faut donc que cette résultante soit égale et opposée à f_{43}, c'est-à-dire égale au rayon 4.3 et dirigée suivant la ligne d'action 4.3, *quelle que soit l'orientation de la section* AB.

Remarque. — D'une manière générale, si un corps, *quelle qu'en soit la forme,* est en équilibre sous l'action de deux forces, la résultante des actions élastiques d'une section quelconque (non parallèle à la ligne d'action commune de ces deux forces) est constante, égale à chacune de ces deux forces et dirigée suivant leur ligne d'action.

C'est ce qu'on exprime en disant qu'un pareil corps est soumis à une *pression* ou une *tension* constante.

Ici, pour chaque corps, cette tension ou pression est fournie par le rayon polaire parallèle à la ligne qui joint les deux points d'articulation du corps. Le rayon polaire Oa donne la tension du côté $C_0 1$ et en même temps la réaction du point fixe C_0. Le côté extrême $5C_1$ du polygone est la ligne d'action de la résultante des réactions du plan fixe C_1 et le rayon polaire bO donne la grandeur de cette réaction.

Tout cela résulte d'ailleurs immédiatement de ce que le polygone articulé est polygone des pressions (§ 68, 69) du système.

PROBLÈME II. — *Inversement, étant donnés un polygone articulé fixé en ses deux extrémités, ainsi que les directions des forces agissant en ses sommets, trouver les grandeurs à donner à ces forces pour que le polygone soit en équilibre.*

Par un point O (*fig.* 16 et 16, p. 132 et 133) menons des rayons parallèles aux côtés donnés du polygone; puis (*fig.* 16), d'un point a arbitrairement choisi sur le premier rayon, menons des lignes 1, 2, 3, ..., parallèles aux directions données des forces F_1, F_2, F_3, ...; ces parallèles limitées aux différents rayons représentent les grandeurs des forces cherchées.

Le point a ayant été choisi arbitrairement, on voit que la grandeur de l'une des forces peut être donnée arbitrairement, et alors les grandeurs des autres s'ensuivent.

§ 80.

POLYGONES ET COURBES SUSPENDUS, SUPPORTÉS. — Lorsque, comme dans la *fig.* 16, tous les corps articulés sont comprimés, ce qu'on exprime en disant que tous *les côtés du polygone* sont comprimés ou pressés, on dit que le polygone est *supporté* par ses deux points d'appui; dans le cas contraire, qui se présenterait si l'on changeait le sens de toutes les forces F_1, F_2, ..., on dit qu'il est *suspendu*, parce que le premier cas se présente généralement dans les ponts ou arcs *supportés*, et le second dans les ponts *suspendus*.

Dans ces derniers, on pourrait, sans troubler l'équilibre, rem-

placer les corps solides qui forment les côtés du polygone par des corps flexibles, tels que des fils, cordes ou câbles en fer. C'est de là, précisément, que vient le nom générique de polygone *funiculaire* (en allemand, *Seil-Polygon*, polygone de corde ou de fil).

Si les points d'articulation se rapprochent indéfiniment, les polygones d'équilibre, supportés ou suspendus, sont remplacés par des *courbes* ou arcs d'équilibre, supportés ou suspendus. Pour les courbes suspendues, on peut employer un corps parfaitement flexible et compressible, comme un fil, une corde, etc.

Pour les arcs ou courbes supportées, on peut aussi réaliser sensiblement des articulations se succédant d'une manière continue,

Fig. 17.

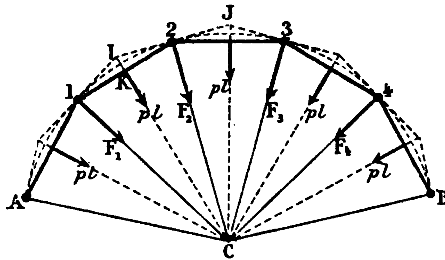
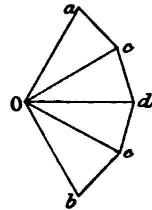


Fig. 17.



en employant un corps parfaitement flexible, pourvu qu'il résiste à la compression, par exemple, un ruban d'acier.

Toutefois, un arc parfaitement flexible *comprimé* n'est jamais en équilibre stable ; le moindre dérangement le déforme complètement et l'écarte de sa forme primitive ; tandis qu'un câble ou une corde suspendue, lorsqu'elle est en équilibre, est en équilibre stable, c'est-à-dire que si on la dérange un peu de sa position elle y revient après quelques oscillations.

§ 81.

APPLICATION A UN POLYGONE RÉGULIER PORTANT DES FORCES EN SES SOMMETS. — Comme application du problème II du § 79, soit (*fig.* 17) A1.2.3.4B une portion de polygone régulier posé en ses extrémités sur tourillons fixes A et B, soumis à des forces F_1, F_2, F_3, F_4 dirigées suivant les bissectrices des angles du polygone.

Construisons (*fig.* 17) les rayons polaires et les forces.

De ce que les lignes d'action sont les bissectrices des angles du polygone, il résulte que les triangles Oac, Ocd, ... sont équiangles et, par suite, isoscèles et égaux. Donc le polygone des forces est aussi une portion de polygone régulier; toutes les forces F_1, F_2, ... sont donc égales; soit F leur valeur commune. On a

$$F = Oc = cd = de = eb.$$

Les pressions des côtés A1, 1.2, ... du polygone donné sont aussi toutes égales, étant représentées par les rayons Oa, Oc, ... Désignons par t la valeur de cette pression et soient C le centre du polygone donné, $R = C1 = C2$, ... son rayon et $r = CK$ son apothème.

Les triangles isoscèles semblables aOc et CA1 donnent

$$\frac{ac}{A1} = \frac{Oa}{CA}$$

ou, en désignant par l la longueur du côté du polygone donné,

$$\frac{F}{l} = \frac{t}{R},$$

d'où

$$t = \frac{R}{l} F.$$

Ainsi, une portion de polygone régulier articulé, fixé en ses extrémités, est en équilibre sous l'action de forces égales entre elles de grandeur commune quelconque F, dirigées suivant ses bissectrices; tous les côtés du polygone sont également pressés (ou tendus, si le polygone est suspendu) et la valeur de la pression est à celle de la force F comme le rayon du polygone est à la longueur de son côté.

§ 82.

APPLICATION A UNE PORTION DE POLYGONE RÉGULIER PORTANT UNE PRESSION NORMALE UNIFORME. — Supposons que le polygone porte une pression normale uniforme de p^{kg} par unité de longueur; on demande de trouver la tension ou pression de ses côtés.

C'est une application du théorème du § 78, plus général que celui de Varignon ([1]).

La résultante des pressions agissant sur chaque côté du polygone est (*fig.* 17) une force pl appliquée au milieu de ce côté. Pour l'équilibre, il faut et il suffit (§ 74) que le polygone funiculaire de ces forces pl passe par les points d'articulation. Or, si l'on construit : 1° la circonférence circonscrite au polygone donné; 2° le polygone circonscrit à cette circonférence suivant les sommets du polygone donné, on obtient un polygone régulier qui sera le polygone funiculaire cherché et qui joue, par rapport aux forces pl, le même rôle que, dans le problème du paragraphe précédent, joue le polygone donné relativement aux forces F.

Donc, pour avoir le rayon polaire de ce nouveau polygone, il suffit d'appliquer la dernière formule; le premier membre sera le rayon polaire cherché que nous appellerons t'. Il faut, dans cette formule, remplacer F par pl.

D'ailleurs, le rayon du nouveau polygone est CI, son côté est IJ; donc

$$\frac{t'}{pl} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{IJ}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{CI}}{\mathrm{I2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{C2}}{\mathrm{2K}} = \frac{1}{2}\,\frac{r}{\frac{l}{2}},$$

en désignant par r l'apothème du polygone donné. Ainsi

$$t' = pr,$$

résultat facile à établir aussi directement.

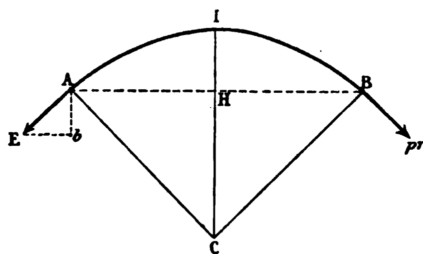
Mais le rayon polaire t', parallèle à un côté IJ, représente la valeur commune des actions mutuelles que deux côtés contigus exercent l'un sur l'autre ou, si l'on veut, l'action de chaque côté sur la charnière. Ainsi : *un polygone régulier soumis à une pression uniforme p est en équilibre et la valeur commune des actions mutuelles que ses divers côtés exercent les uns sur les autres sont le produit de p par l'apothème du polygone.*

([1]) On pourrait ramener le problème au précédent en décomposant la résultante des pressions agissant sur chaque côté en deux autres de même direction que lui et appliquées aux sommets. Nous préférons traiter la question comme une application simple du théorème du § 74.

§ 83.

POUSSÉE D'UN ARC CIRCULAIRE SUPPOSÉ FLEXIBLE SOUMIS A UNE PRESSION NORMALE UNIFORME. — Ce qui précède étant vrai pour un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés est vrai pour un arc de cercle et montre qu'un arc de cercle *même flexible,* appuyé à ses extrémités, reste en équilibre sous l'influence d'une pression normale. L'équilibre est instable si l'arc est supporté, stable dans le cas contraire. L'apothème du polygone dont il a été question au paragraphe précédent devient ici le rayon de l'arc. Ainsi : si (*fig.* 18) un arc AIB de rayon r est fixé à ses deux extrémités

Fig. 18.



et qu'il supporte une pression normale uniforme (de l'extérieur vers l'intérieur), il est comprimé et sa pression en chaque point est $t = pr$. Les pressions qu'il exerce sur ses appuis sont aussi égales à pr et tangentes à l'arc en A et B. Soient $AB = 2a$ la *portée* de l'arc et $IH = f$ sa flèche. Si $AE = pr$ est la pression que supporte l'appui A, la composante verticale Ab de cette force est donnée par la relation

$$\frac{Ab}{AH} = \frac{AE}{AC},$$

d'où

$$Ab = pa.$$

La composante horizontale ou *poussée* est donnée par la proportion

$$\frac{Eb}{AE} = \frac{HC}{AC}$$

ou

$$Eb = p \times HC$$

ou

$$Eb = p(r - f),$$

Or

$$\overline{AH}^2 = a^2 = f(2r - f),$$

d'où

$$Eb = \frac{p}{2}\left(\frac{a^2}{f} - f\right) = \frac{pf}{2}\left(\frac{a^2}{f^2} - 1\right),$$

qui donne la poussée en fonction de la portée et de la flèche.

Si le rapport $\frac{f}{a}$ est *très faible*, c'est-à-dire si l'arc est très surbaissé, on peut négliger l'unité devant $\frac{a^2}{f^2}$ et écrire approximativement pour la poussée

$$Eb = \frac{pa^2}{2f}.$$

§ 84.

CAS DE CHARGES VERTICALES; POUSSÉE. — Lorsque (*fig.* 19, p. 142) les forces qui agissent, soit sur un polygone articulé, soit sur un arc flexible fixé à ses extrémités, sont verticales, qu'elles soient en nombre limité ou non, le polygone de ces forces est représenté (*fig.* 19, p. 143) par une verticale ab. Soit O le pôle du polygone ou de la courbe d'équilibre. La tension d'un côté du polygone est représentée par un rayon Om parallèle à ce côté, de même que la tension en un point de l'arc, s'il s'agit d'un arc, est représentée par un rayon Om parallèle à la tangente à l'arc au point considéré.

Cette force Om peut se décomposer en deux composantes, l'une Oω parallèle à la corde AB de l'arc, l'autre ωm verticale. La première Oω est constante, quel que soit le rayon considéré Om, et égale à la distance polaire comptée parallèlement à la corde de l'arc; elle est donc aussi la même pour les côtés extrêmes du polygone ou pour les éléments extrêmes de l'arc; par suite elle représente la poussée exercée sur les appuis.

Ainsi *la poussée qu'un polygone ou un arc suspendu ou supporté et soumis à des charges verticales exerce sur ses appuis*

est représentée par sa distance polaire estimée parallèlement à la corde de l'arc.

Cette distance représente aussi la pression ou tension de l'arc au point où sa tangente est parallèle à la corde.

Si les appuis sont de niveau, la poussée est représentée par la distance polaire proprement dite, laquelle représente aussi la tension ou pression, suivant que l'arc est suspendu ou supporté, en son point le plus bas ou le plus élevé.

§ 85.

POLYGONE DES PONTS SUSPENDUS OU SUPPORTÉS. — Le câble d'un pont suspendu est relié au tablier qu'il supporte par des barres verticales (barres de suspension) équidistantes et l'on se propose de disposer le câble de façon que la charge totale du tablier se répartisse également entre toutes les barres. Par conséquent (*fig.* 19, p. 141) les forces agissantes 11′, 22′, 33′, ... sont ici toutes verticales, égales et équidistantes et il s'agit de trouver la forme à donner au câble pour qu'il reste en équilibre sous l'action de telles forces.

On se donne généralement la flèche du câble qu'il y a intérêt à prendre grande, ainsi qu'il résultera de la solution même, si l'on veut diminuer autant que possible les tensions que supporte le câble; mais, dans chaque cas, la flèche est limitée par les circonstances où l'on se trouve.

THÉORÈME. — *Le polygone funiculaire formé par un câble de pont suspendu est inscriptible dans une parabole à axe vertical.*

En effet, soient (*fig.* 19, p. 141) A et B les deux points de suspension du câble; 1, 2, 3, 4, 5 les barres de suspension équidistantes du tablier, c'est-à-dire les lignes d'action des forces agissantes, et (*fig.* 19, p. 143) 1, 2, 3, 4, 5 les longueurs égales entre elles portées bout à bout et formant le polygone des forces.

Traçons une parabole à axe vertical passant par les points A et B et d'ailleurs quelconque; on déterminera ainsi par ses intersections avec les barres les points 1, 2, 3, 4, 5; il s'agit de

démontrer que le polygone A 1.2.3.4.5 B reste en équilibre sous l'action de forces verticales *égales entre elles,* agissant en ses sommets.

A cet effet, d'un point quelconque O menons des rayons

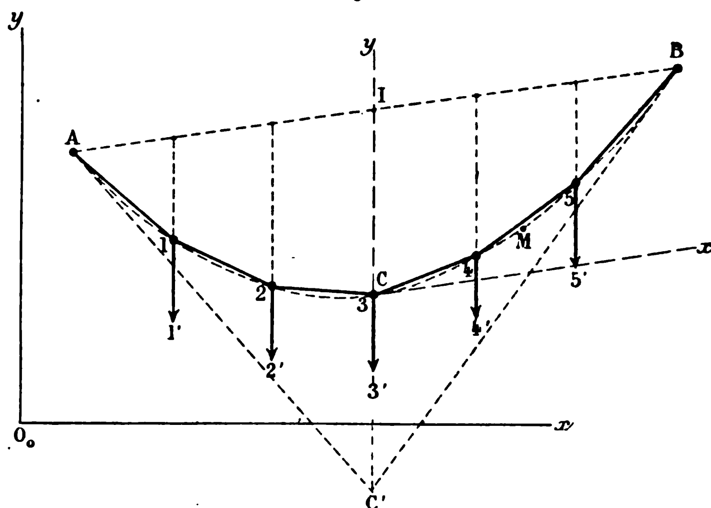
$$Oa,\ Om,\ On,\ Op,\ Oq,\ Ob,$$

respectivement parallèles aux côtés

A 1, 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, 5 B

du polygone et coupons ce faisceau de lignes par une verticale

Fig. 19.



quelconque ab qui y déterminera les segments

$$am = 1,\quad mn = 2,\quad np = 3,\quad pq = 4,\quad qb = 5.$$

Des forces verticales respectivement égales à ces grandeurs appliquées aux cinq sommets du polygone le maintiendront en équilibre en vertu du théorème de Varignon.

Toute la question est donc de montrer que ces forces sont toutes égales entre elles.

En effet, rapportons la parabole à deux axes rectangulaires O_0y, O_0x, l'un vertical, l'autre horizontal.

Son équation sera de la forme

$$y = A + Bx + C\frac{x^2}{2}.$$

Appelons x_1, y_1 les coordonnées du point **1** ; x_2, y_2 celles du point **2**, ...; x_i, y_i celles du point portant le n° i. Si a est l'équidistance

Fig. 19.

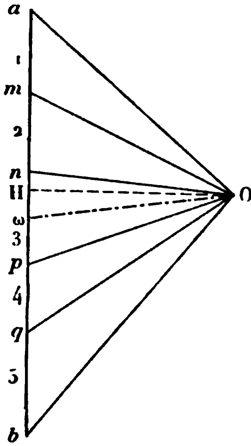
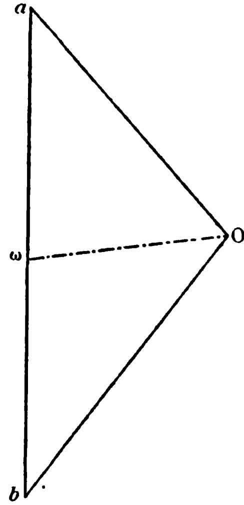


Fig. 19'.



des barres, on aura, par exemple,

$$x_4 = x_3 + a,$$
$$y_3 = A + Bx_3 + C\frac{x_3}{2},$$
$$y_4 = A + B(x_3 + a) + C\frac{\overline{(x_3 + a)}^2}{2};$$

d'où

$$y_4 - y_3 = Ba + \frac{C}{2}(2ax_3 + a^2),$$

et la tangente de l'angle que fait le côté **3.4** avec l'horizontale sera

$$\frac{y_4 - y_3}{a} = B + \frac{C}{2}(2x_3 + a).$$

Or le rayon 3.4 ou Op est, par hypothèse, parallèle au côté **3.4**;

donc, si OH est la distance polaire,

$$\frac{Hp}{HO} = B + \frac{C}{2}(2x_3 + a).$$

On aurait de même

$$\frac{Hq}{HO} = B + \frac{C}{2}(2x_4 + a),$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$\frac{pq}{HO} = C(x_4 - x_3) = Ca = \text{const}.$$

D'après cela, pour tracer le polygone, par le milieu de AB menons une verticale sur laquelle nous prendrons une longueur IC égale à la flèche donnée f.

La parallèle Cx à AB est tangente à la parabole et, si nous rapportons la courbe à l'axe Cx et à la verticale Cy, son équation sera

$$y = f\frac{x^2}{a^2},$$

puisqu'elle doit passer par les points A et B et par le point C.

On peut donc déterminer exactement les coordonnées de chacun des sommets 1, 2, 3, connaissant les abscisses des barres, c'est-à-dire les rapports $\frac{x}{a}$ qui sont des nombres entiers.

Il est, par suite, facile de tracer le polygone funiculaire que forme le câble et qui est assujetti à passer par les trois points donnés A, B, C sans recourir à la méthode générale du § 45. On peut aussi la tracer directement (*voir* note III *bis*), ce qui fournit les sommets du polygone inscrit A1.2.3....

Pour avoir les tensions, par un point O on mènera les parallèles Oa, Om, ... aux côtés du polygone, et l'on coupera ce faisceau par une verticale quelconque ab. Nous savons que tous les segments 1, 2, 3, ... seront égaux entre eux; ab représente la charge totale que porte le tablier et, comme cette charge est donnée, on en déduit l'échelle des forces. Soit Q cette charge évaluée en tonnes; on en conclut qu'une longueur $\frac{ab}{Q}$ vaut une tonne.

A cette échelle, Oa sera la tension du côté A1, Om celle du côté 1.2, etc.

§ 86.

POUSSÉE D'UN ARC PARABOLIQUE PORTANT UNE CHARGE VERTICALE UNIFORME. — Si les barres de suspension se rapprochent indéfiniment, ou si la charge du tablier se trouve uniformément répartie sur tout le câble au lieu de l'être, par parts égales, sur des verticales équidistantes, le polygone funiculaire se confond avec l'arc parabolique dans lequel il est inscrit. Ainsi, *un arc parabolique à axe vertical* portant une charge uniformément répartie suivant l'horizontale (tablier de pont) ou, ce qui revient au même, une charge uniformément répartie suivant sa corde, quelle qu'en soit l'inclinaison, et fixé à ses deux extrémités, reste en équilibre, même s'il est parfaitement flexible. Il forme une courbe funiculaire ou une courbe de pression (en d'autres termes, il est tendu ou comprimé), selon qu'il présente sa concavité vers le haut ou vers le bas; dans le premier cas, il peut servir de câble à un pont suspendu; dans le second, il peut former un arc de pont métallique supporté (sauf les précautions à prendre pour éviter l'instabilité).

Pour avoir les tensions ou pressions en ses divers points, par un point O′, on mènera (*fig.* 19′, p. 143) des parallèles $O'a$, $O'b$ à ses tangentes extrêmes; il suffit pour cela sur la verticale IC du milieu de la corde de prendre une longueur IC′ double de IC et les droites C′A, C′B sont les tangentes aux extrémités de l'arc; on coupera l'angle $aO'b$ par une verticale ab.

Cette verticale représentera la charge totale du tablier.

Soient p la charge par mètre courant de corde AB et $AB = 2a$; la charge totale sera $ab = 2pa$, ce qui donnera l'échelle des forces, puisque, si p est exprimé en kilogrammes, il résultera de cette égalité qu'une longueur $\frac{ab}{2pa}$ représente un kilogramme.

La tension (ou pression) en un point M de l'arc sera, à cette échelle, égale au rayon vecteur issu de O′ et parallèle à la tangente à la courbe en M.

Les tensions (ou pressions) supportées par les éléments extrêmes sont représentées par les rayons extrêmes aO' et $O'b$.

Celle aO' se décompose en une composante verticale ωa et une composante $O'\omega$ parallèle à la corde AB.

Celle $O'b$, en une composante $\omega O'$ parallèle à la corde et une composante verticale ωb.

Les points fixes A et B sont généralement placés aux sommets de culées en maçonnerie; la poussée $O'\omega$ tend à renverser ces culées vers le dedans ou vers le dehors, suivant que l'arc est suspendu ou supporté.

Prenons le cas usuel où les points A et B sont de niveau. Alors le point ω est au milieu de ab; $b\omega = a\omega$ représente la demi-charge totale du tablier, soit pa; donc la poussée est

$$O'\omega = pa : \operatorname{tang} bO'\omega.$$

Or $O'b$ est parallèle à la tangente à la parabole en B; donc $\operatorname{tang} bO'\omega$ est le coefficient angulaire de cette tangente, puisque les axes Cx, Cy sont rectangulaires. Or ce coefficient angulaire $\frac{IC'}{IB} = \frac{2f}{a}$, comme il résulterait aussi de l'équation de la courbe; donc la poussée est

$$O'\omega = pa \times \frac{a}{2f} = \frac{pa^2}{2f}.$$

Ainsi, *la poussée qu'un arc parabolique suspendu ou supporté dont la portée est* $2a$, *la flèche* f, *la charge par mètre courant de sa corde* p, *exerce sur ses culées est*

$$\frac{pa^2}{2f}.$$

On emploie parfois cette formule à titre de première approximation, pour calculer la poussée d'un arc peu différent de la parabole (comme un arc circulaire très surbaissé) lorsque sa charge est verticale et uniforme suivant la corde.

Pour un arc très surbaissé, elle se confond d'ailleurs avec la valeur approchée trouvée au § 83 pour la poussée d'un arc circulaire portant une charge normale uniforme ([1]).

(1) *Voir*, pour plus de développements, la Note sur les courbes funiculaires.

CHAPITRE VII.

SUITE DE LA RECHERCHE DES FORCES ÉLASTIQUES. LES FIGURES RÉCIPROQUES ET LA MÉTHODE DE CULMANN.

§ 87.

DÉFINITION DES FIGURES GÉOMÉTRIQUES FORMÉES PAR LES SYSTÈMES ARTICULÉS CONSIDÉRÉS DANS CE CHAPITRE. — Considérons une figure formée de droites reliant des points distribués d'une manière quelconque dans un plan; ces points sont ce que nous appellerons les *sommets* de la figure. Toute portion de droite comprise entre deux sommets sera appelée une *ligne* ou *côté* de la figure. Enfin nous désignerons par le mot *nœud* l'ensemble des côtés partant d'un même sommet.

Nous ne considérerons que des figures dont les côtés passent au moins par deux sommets et nous pouvons admettre que chaque côté passe par deux sommets seulement. Il suffira pour cela, si i sommets sont placés sur une même ligne droite, de regarder les $i-1$ segments qu'ils déterminent sur cette droite comme autant de côtés distincts de la figure.

§ 88.

FIGURES DÉFORMABLES, STRICTEMENT INDÉFORMABLES ET A LIGNES SURABONDANTES. — Nous diviserons les figures géométriques dont il vient d'être parlé d'abord en deux classes : *figures déformables* ou dont les angles peuvent varier sans que les longueurs des côtés varient, et *figures indéformables* dont les angles sont déterminés lorsque les longueurs des côtés sont données.

Les figures indéformables comprennent elles-mêmes deux catégories qu'il importe de distinguer : celles qui sont telles qu'elles cessent d'être indéformables lorsqu'on supprime un seul de leurs côtés seront dites *strictement indéformables* ou strictement *dé-*

finies de forme; celles, au contraire, qui ne perdent pas la qualité d'être indéformables lorsqu'on supprime un ou plusieurs de leurs côtés seront dites à lignes *surabondantes,* parce qu'elles contiennent plus de lignes qu'il n'est strictement nécessaire pour les définir de forme.

Un triangle est une figure strictement indéformable; un quadrilatère articulé est déformable; une figure formée par un quadrilatère et une de ses diagonales est strictement indéformable; un quadrilatère complet, c'est-à-dire la figure formée par les six lignes joignant quatre points d'un plan, renferme une ligne surabondante. Cinq de ces six lignes définissent entièrement la forme de la figure, de sorte que la sixième peut être trouvée, soit analytiquement, soit graphiquement à l'aide des cinq autres.

Ainsi, entre les longueurs des six lignes qui joignent quatre points d'un plan, il existe toujours une relation qui permet de trouver l'une d'elles en fonction des cinq autres.

§ 89.

POLYGONE COMPLET A n SOMMETS; NOMBRE DE CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR LE DÉFINIR. — La figure formée par l'ensemble des lignes joignant n points d'un plan deux à deux pourrait se nommer un polygone complet à n sommets. Une telle figure renferme $\frac{n(n-1)}{2}$ côtés. Mais il existe évidemment entre leurs longueurs un certain nombre de relations.

Pour les trouver toutes, envisageons deux des n sommets choisis arbitrairement A et B (*fig.* 20, p. 149). Les sommets restants sont au nombre de $n-2$; les lignes qui les joignent deux à deux, au nombre de $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

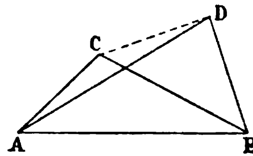
Je dis que toutes ces lignes, dont aucune n'aboutit aux points A et B, peuvent s'exprimer en fonction de celles qui aboutissent en ces deux points.

En effet, soit CD une ligne quelconque comprise entre deux sommets C et D. Entre les six lignes qui joignent les quatre points A, B, C, D, il existe une relation qui permet d'exprimer la ligne CD en fonction des cinq autres.

Ainsi, entre les $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes joignant les n points, il existe $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ relations. Ce sont d'ailleurs les seules distinctes qui puissent exister; car toutes les lignes, telles que CA et CB, joignant un sommet C aux deux points A et B, peuvent être prises arbitrairement, ainsi que la ligne AB.

Par chaque sommet C, passent deux lignes aboutissant en A et B, soit, pour les $n-2$ sommets C, $2n-4$ lignes plus celle AB, en tout $2n-3$ qui sont arbitraires. Si on se les donne, toutes les

Fig. 20.



autres, au nombre de $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, s'en déduisent; elles sont donc surabondantes. Les $2n-3$ lignes arbitraires et les $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ qui sont déterminées quand les premières sont données, forment d'ailleurs bien la totalité des lignes de la figure; car on a identiquement

$$2n-3+\frac{(n-2)(n-3)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Si, dans les $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ équations existant entre les longueurs de tous les côtés de la figure, au lieu de regarder comme connues toutes les lignes, au nombre de $2n-3$, qui aboutissent aux deux points particuliers A et B et comme inconnues les autres, on suppose donnés $2n-3$ côtés quelconques, on pourra en déduire les côtés restants.

Il va de soi qu'il faut, pour cela, que les côtés qu'on se donne soient *indépendants* les uns des autres, c'est-à-dire que, parmi eux, il ne s'en trouve pas qui soient tellement choisis, qu'entre leurs longueurs il existe une relation en vertu des équations mêmes qu'il s'agit de résoudre. Telles seraient six lignes joignant quatre points de la figure; les longueurs de six pareilles lignes ne sauraient être

données arbitrairement sans que les données fussent en contradiction avec les équations à résoudre, et le problème serait impossible; si on les donnait de façon que la relation qui existe entre elles fût satisfaite d'elle-même, cela équivaudrait à n'en donner que cinq distinctes, et le problème serait indéterminé.

Mais, si les $2n-3$ côtés donnés sont indépendants, les équations fourniront les grandeurs de tous les autres côtés de la figure en fonction de ceux-là.

Les expressions qu'on trouvera indiqueront, dans chaque cas, si le problème est possible ou non. Ainsi, trois côtés d'un triangle le définissent; mais, pour qu'on puisse le construire, il faut que le plus grand côté soit moindre que la somme des deux autres. Dans toute figure, les côtés donnés devront ainsi satisfaire à certaines inégalités que l'Analyse ou la Géométrie définira pour chaque figure.

Mais, si une figure est *construite* et, par conséquent possible, la connaissance de $2n-3$ de ses côtés (supposés distincts) définira les autres. Ainsi :

Théorème. — *Pour que les* $\frac{n(n-1)}{2}$ *distances mutuelles de n points d'un plan soient déterminées, il faut et il suffit que* $2n-3$ *d'entre elles soient connues.*

Or, quand on connaît toutes les distances mutuelles de divers points, on connaît aussi les angles que ces lignes font entre elles, puisque un quelconque de ces angles fait partie d'un triangle dont on connaît les trois côtés. On a donc tous les éléments qui constituent *la forme de la figure*. Donc : *une figure à n sommets est déterminée de forme par la connaissance de* $2n-3$ *de ses côtés.*

§ 90.

NOMBRE DE COTÉS D'UNE FIGURE DÉFORMABLE, STRICTEMENT INDÉFORMABLE, A LIGNES SURABONDANTES. — D'après cela, soit m le nombre des côtés existant réellement dans une figure donnée à n sommets; m sera au plus égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Posons

$$m = 2n-3+k,$$

k étant un nombre entier.

1° Si $k < 0$, la figure est déformable; car, même en se donnant les longueurs de tous ses côtés, la forme de la figure n'est pas définie et ses angles peuvent varier.

2° Si $k = 0$, la figure est strictement indéformable;

3° Si $k > 0$, la figure contient k lignes surabondantes, c'est-à-dire que, $2n - 3$ lignes de la figure étant données, la connaissance des k autres s'ensuit.

§ 91.

DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DES FIGURES LIBREMENT DILATABLES. — Nous dirons qu'une figure, comme celles dont il vient d'être parlé, est librement dilatable, lorsque chaque côté peut à volonté se dilater ou se contracter, dans certaines limites, sans que les autres côtés en soient influencés. Ceci exige que chaque côté puisse être séparément allongé ou raccourci dans certaines limites, tous les autres côtés conservant rigoureusement leurs longueurs. En particulier, la longueur de chaque côté doit pouvoir être augmentée ou diminuée d'une quantité infiniment petite, tous les autres côtés conservant leurs longueurs, soit rigoureusement, soit aux infiniment petits près d'ordre supérieur à l'allongement positif ou négatif du premier côté.

Il est évident que, pour qu'une figure soit librement dilatable, il est *en général* nécessaire et suffisant qu'elle ne contienne aucune ligne surabondante, en d'autres termes, qu'elle soit déformable ou strictement indéformable.

La condition est en général nécessaire. Prenons, en effet, une figure renfermant une ligne surabondante, par exemple les six lignes joignant quatre points. Comme les longueurs de cinq de ces six lignes déterminent la longueur de la sixième, on ne peut pas en laisser cinq invariables sans que la longueur de la sixième reste elle-même invariable; inversement, si la longueur de l'une d'elles change d'une quantité finie ou infiniment petite, les longueurs des cinq autres changeront, en général, de quantités de même ordre. Le même raisonnement s'applique, à plus forte raison, si la figure contient plus d'une ligne surabondante (1).

---

(1) Ce raisonnement peut toutefois être en défaut.

Considérons, par exemple, une figure renfermant une ligne surabondante, de

La condition est aussi, en général, suffisante.

En effet, dire qu'une figure ne contient aucune ligne surabondante, c'est dire que tous ses côtés sont indépendants les uns des autres, qu'ils peuvent être choisis arbitrairement; par conséquent on peut augmenter ou diminuer la longueur de l'un quelconque d'entre eux, les longueurs des autres restant invariables, sans que la figure cesse d'être possible (1).

---

sorte qu'entre les longueurs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ des m côtés qui la composent, il existe une relation géométrique pouvant s'exprimer par une certaine équation

$$f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) = 0.$$

Concevons qu'on construise une nouvelle figure infiniment peu différente de la première avec des côtés de longueurs $a_1 + \delta a_1$, $a_2 + \delta a_2$, $a_3 + \delta a_3$, ...

Entre les longueurs de ses côtés, on aura la relation

$$f(a_1 + \delta a_1, a_2 + \delta a_2, a_3 + \delta a_3, \ldots, a_m + \delta a_m) = 0,$$

et, en retranchant les deux équations membre à membre,

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2}\delta a_2 + \frac{\partial f}{\partial a_3}\delta a_3 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_m}\delta a_m = 0,$$

qui indique bien qu'en général les m côtés ne peuvent pas recevoir des allongements indépendants. Mais supposons que les m longueurs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ soient choisies de manière à satisfaire aux m équations

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a_3} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial a_m} = 0.$$

Alors la relation entre les allongements $\delta a_1, \delta a_2, \ldots, \delta a_m$ se trouve satisfaite, quels que soient ces allongements. Dans ce cas, quoique la figure contienne une ligne surabondante, ses divers côtés peuvent recevoir des dilatations infiniment petites, entièrement arbitraires.

Si l'on avait seulement $\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0$, alors le côté a_1 pourrait être dilaté, tous les autres conservant leurs longueurs.

(1) Mais ici aussi il y a des cas d'exception qu'il importe de signaler.

Quoique les côtés d'une figure strictement définie de forme soient indépendants, en ce sens qu'il n'existe entre eux aucune équation permettant de déduire algébriquement l'un d'eux de la connaissance des autres, la possibilité de la figure exige, comme il a été dit plus haut, que les longueurs de ses côtés satisfassent à des conditions d'*inégalité* qui font que, tous les côtés, sauf un, restant de longueurs invariables, la longueur du dernier ne puisse varier *qu'entre certaines limites*. Si donc la figure donnée a été constituée de façon que le côté en question ait précisément l'une des valeurs extrêmes qu'il ne peut franchir sans que la figure cesse d'être possible : 1° si c'est une valeur maxima qu'il a, on ne pourra pas le dilater; 2° si c'est une valeur minima, on ne pourra pas le contracter, sans que

§ 92.

DÉFINITION DES FIGURES RÉCIPROQUES. — Deux figures, comme celles définies au § 87, sont dites réciproques lorsqu'elles satisfont aux conditions suivantes :

1° Qu'à chaque ligne ou côté de l'une réponde une ligne

---

la figure cesse d'être possible. On conçoit donc qu'on puisse former de la sorte des figures strictement indéformables qui ne soient pas librement dilatables.

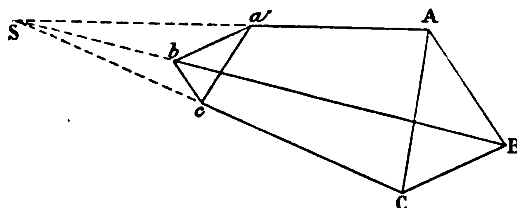
Comme exemple, considérons (*fig.* 21) deux triangles ABC, *abc*, et relions les sommets par trois droites A*a*, B*b*, C*c*. On aura une figure à six sommets et neuf côtés. Elle a le nombre de côtés voulu pour être strictement indéformable ou strictement déterminée de forme; car, si $n = 6$, on a $2n - 3 = 9$.

Pour la construire, plaçons le triangle ABC dans une position fixe quelconque : traçons ensuite le côté A*a* dans une direction arbitraire et achevons le quadrilatère AB*ab* dont la position est déterminée pour chaque position de A*a*.

Si ensuite on achève le triangle *abc*, on voit que son sommet *c* est aussi déterminé pour chaque direction de A*a*. Si l'on fait varier cette dernière direction, le point *c* décrit une certaine courbe.

Si du point C comme centre, avec le côté donné C*c* pour rayon, on décrit une

Fig. 21.



circonférence, elle coupera la courbe lieu du point *c* en un certain nombre de points qui fourniront un nombre fini de solutions du problème.

Considérons l'une des figures ainsi obtenues; ses angles sont déterminés, c'est-à-dire que la figure est bien indéformable.

En général aussi, elle est librement dilatable; si on laisse tous les côtés donnés invariables, qu'on change un peu la longueur de l'un d'eux, on pourra, avec ces nouvelles données, construire, en général, une nouvelle figure un peu différente de la première, et *une seule*.

Ainsi, chaque côté peut, en général, être dilaté ou contracté indépendamment des autres sans que la figure cesse d'être possible.

Mais il y a un cas d'exception.

Supposons que les premières données, celles à l'aide desquelles on a tracé la figure ABC*abc*, soient telles que l'arc décrit du point C comme centre avec le

parallèle de l'autre, et une seule; deux lignes qui se correspondent ainsi seront dites *réciproques* l'une de l'autre ou *correspondantes;*

2° Qu'à chaque nœud (ensemble des lignes issues d'un sommet) de l'une réponde, dans l'autre, un polygone fermé.

Une figure quelconque n'admet pas nécessairement une figure réciproque. Pour qu'une figure admette une réciproque, il est *nécessaire* (mais non suffisant):

1° Que chacun de ses nœuds comprenne au moins trois côtés;

2° Que, parmi les systèmes de polygones fermés que comprend la figure, il en existe au moins un, tel que chaque côté de la figure fasse partie de deux des polygones de ce système et de deux seulement.

En effet,

1° A un nœud de la figure considérée doit répondre un polygone fermé dans la figure réciproque; et, comme un polygone fermé

---

côté donné C*c* pour rayon, au lieu de couper en *c* le lieu décrit par ce point, lui soit tangent.

Il suffit, pour cela, tous les côtés autres que C*c* ayant été choisis à volonté (sous réserve, bien entendu, que les triangles ABC, *abc* puissent être construits avec les côtés donnés) qu'on prenne pour le côté C*c* la longueur de l'une des normales abaissées du point C sur le lieu des points *c*. Supposons, pour fixer les idées, que cette normale représente la plus courte distance du point C à la courbe, lieu des points *c*. Alors la figure ABC*abc* est encore possible; mais elle cesse de l'être si l'on prend pour C*c* une nouvelle valeur un peu plus faible que la normale dont il s'agit. Ainsi, dans ce cas, la figure ABC*abc*, *quoique parfaitement et strictement déterminée de forme,* n'est pas librement dilatable, puisque, si le côté C*c* se contractait, la figure ne pourrait plus exister.

Ce cas est celui où les trois côtés A*a*, B*b*, C*c* concourent en un même point. En effet, la tangente au lieu du point *c* est facile à construire. Ce point est invariablement lié aux deux points *a* et *b* qui sont eux-mêmes assujettis à se déplacer sur des circonférences décrites respectivement des points A et B comme centres. Donc le centre instantané de rotation de la figure invariable *abc* est le point de rencontre S des normales A*a*, B*b* aux trajectoires des deux points dont il s'agit; et, d'après les principes de la Cinématique, S*c* est la normale au lieu du point *c*.

Si donc on veut que la ligne C*c* soit elle-même normale à ce lieu, il faut que les trois points S, *c*, C soient en ligne droite.

Sauf les cas d'exception de ce genre pour l'étude complète desquels nous renvoyons à la note relative à ce sujet (t. II de cet Ouvrage), une figure strictement indéformable ou strictement définie de forme est aussi librement dilatable, tandis qu'une figure à lignes surabondantes n'est pas librement dilatable, même infiniment peu.

comprend au moins trois côtés, il faut que chaque nœud de la proposée comprenne au moins trois côtés ;

2° Un côté d'une des figures considérées passe (§ 87) par deux sommets et deux seulement.

Donc, chaque côté de la figure réciproque, si elle existe, fait partie de deux nœuds, et de deux seulement ; son correspondant, dans la proposée, fera donc partie de deux polygones fermés répondant à ces nœuds et ne fera partie d'aucun autre polygone fermé répondant à un nœud de la réciproque.

Il existe donc bien, dans la proposée, au moins un système de polygones fermés jouissant de la propriété énoncée ci-dessus (2°).

§ 93.

DÉFINITION DES SYSTÈMES ARTICULÉS. — Supposons à présent que chaque sommet soit (§ 73) un point d'articulation, que chaque côté soit la ligne de jonction des deux points d'articulation d'un corps ; nous aurons l'idée de la forme géométrique des charpentes ou systèmes articulés que nous nous proposons d'étudier.

A la place de chaque côté il faut concevoir placé un corps symétrique par rapport au plan de la figure, de forme d'ailleurs quelconque, traversé par deux charnières placées aux extrémités de ce côté.

On voit, d'après cela, que chaque corps est traversé par deux charnières, et par deux seulement, mais qu'une même charnière peut traverser un nombre quelconque de corps, puisqu'elle en traverse autant qu'il y a de côtés de la figure géométrique, issus du sommet que forme le centre d'articulation de la charnière considérée.

En général, les corps usités se réduiront à de simples *barres* cylindriques de faibles dimensions transversales. C'est pourquoi nous désignerons souvent les corps sous le nom de *barres* ou *tiges ;* mais il importe de remarquer que chaque corps peut être de forme quelconque, de sorte qu'*il peut lui-même être formé d'un système de barres,* et cette considération nous permettra de décomposer des systèmes articulés plus ou moins complexes en d'autres plus simples et faciles à étudier.

§ 94.

OBJET DU PROBLÈME A RÉSOUDRE. — Des forces données toutes situées dans le plan de symétrie agissent soit sur les corps, soit sur les charnières, c'est-à-dire sur les points d'articulation (points que l'on doit regarder comme distincts des corps auxquels ils servent de pivots) et l'on demande : 1° de trouver les conditions d'équilibre de ces forces ; 2° ces conditions étant supposées remplies, de déterminer les réactions que les corps éprouvent de la part des charnières ; 3° les résultantes des forces élastiques qui s'exercent dans une section quelconque faite dans l'un des corps.

Nous savons que le premier problème est toujours soluble par la Statique (§ 50); nous savons aussi que, une fois connues les réactions que chaque corps éprouve de la part des deux charnières qui le traversent, on peut tracer le polygone des pressions et, par suite, connaître les résultantes des actions élastiques dans l'une quelconque des sections qu'on y ferait. Ainsi, la principale difficulté consiste dans la résolution du problème 2°.

Nous nous proposons de montrer qu'il peut être résolu par la Statique toutes les fois (sans exception) que la figure formée par la charpente que l'on considère est librement dilatable et seulement dans ce cas. Mais, avant de nous occuper de cette proposition fondamentale, nous la vérifierons sur un type de charpente particulièrement important par ses applications et intéressant en raison de la facilité avec laquelle il se prête aux méthodes graphiques.

§ 95.

PRINCIPES APPLICABLES A TOUS LES SYSTÈMES ARTICULÉS. — Pour qu'un système articulé soit en équilibre, il faut et il suffit que chacune des parties dont il est composé, c'est-à-dire chaque corps et chaque charnière, soit séparément en équilibre.

Chaque corps peut être regardé comme libre sous l'action des forces qui lui sont directement appliquées et des réactions qu'il éprouve de la part des charnières supposées au nombre de deux qui le traversent.

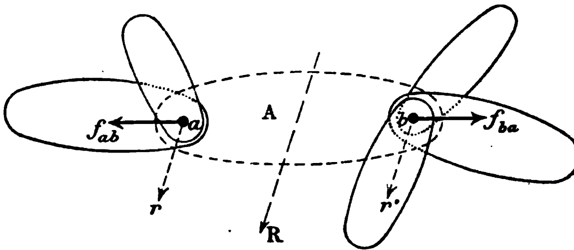
Considérons (*fig.* α) un corps A articulé en a et b avec d'autres corps en nombre quelconque.

On peut le détacher de tout le reste et le regarder comme libre (*fig.* β et β', p. 158), pourvu qu'aux forces qui lui sont directement appliquées on adjoigne des réactions convenables passant (§ 50) par les points d'articulation.

1° Si (*fig.* β) aucune force directement appliquée n'agit sur lui, il sera en équilibre sous la seule influence des réactions des charnières. Ces forces, que nous désignons par f'_{ab} et f'_{ba}, devront donc être égales, dirigées suivant la droite ab et de sens opposés.

Si ces forces sont, comme sur la figure, dirigées de façon à com-

Fig. α.



primer le corps A suivant la ligne ab, ou, comme nous dirons par abréviation, de façon à comprimer cette ligne, ce sont des *pressions;* dans le cas contraire, des *tensions.*

L'équilibre du corps A se trouve ainsi assuré, quelle que soit la grandeur commune des forces f'_{ab} et f'_{ba}. On peut inversement détacher (*fig.* α) ce corps sans troubler l'équilibre du reste du système, pourvu qu'aux charnières a et b on applique des forces égales aux pressions qu'elles éprouvent de la part du corps, c'est-à-dire des forces f_{ab} et f_{ba} respectivement égales et opposées à f'_{ab} et f'_{ba}.

Observons que si, comme l'indique la *fig.* β, le corps A est comprimé par les essieux qui le traversent, inversement il tend à écarter les essieux l'un de l'autre, c'est-à-dire que si les forces f_{ab} f'_{ba} *appliquées au corps* sont attractives, celles f_{ab} et f_{ba} *appliquées aux essieux* ou point d'articulation sont *répulsives* et *vice versa.*

2° Supposons maintenant (*fig.* β') que le corps A soit soumis à des forces directement appliquées dont la résultante est R.

Décomposons les réactions des charnières en leurs composantes r' et r'_1 parallèles à R et leurs composantes f'_{ab} et f'_{ba} suivant la ligne ab; les cinq forces

$$R, r', r'_1; f'_{ab}, f'_{ba}$$

devant se faire équilibre, leur polygone des forces doit se fermer. Or, les premières étant parallèles entre elles et les secondes de même direction, on voit que cela exige que le polygone des trois premières se ferme séparément ainsi que celui des deux dernières, c'est-à-dire que celles-ci soient égales et opposées; mais alors elles satisfont aux conditions d'équilibre relatives à des corps solides.

Fig. β.

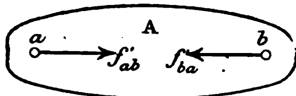
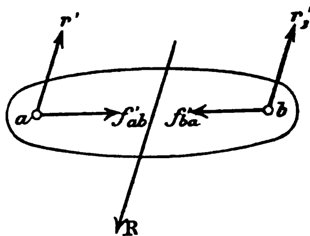


Fig. β'.



Donc, les trois premières doivent, de leur côté, être en équilibre. Ainsi les composantes r', r'_1 sont déterminées et peuvent être trouvées graphiquement (§ 42, *Probl. I*), et la valeur commune des deux forces f'_{ab}, f'_{ba} reste seule inconnue.

Les pressions exercées par le corps A sur les essieux seront égales et opposées à ces réactions, c'est-à-dire qu'elles se composeront des forces f_{ab} et f_{ba} (*fig.* α), comme dans le cas précédent, et en outre, des forces r et r_1 égales et opposées à r' et r'_1 et qu'on obtiendra directement en décomposant la force R en deux autres parallèles portant sur les charnières (§ 42). Ainsi :

Théorème I. — *Si un corps* A *est relié à d'autres corps en nombre quelconque par deux articulations seulement:*

1° *Si aucune force directement appliquée n'agit sur le corps* A, *pour que le système tout entier soit en équilibre, il faut et il suffit que ce système privé du corps* A *soit en équilibre sous l'influence des forces qui lui sont directement appliquées et de deux*

forces appliquées aux deux points d'articulation, dirigées suivant la ligne qui les joint et de sens contraires.

Si ces forces sont attractives, *le corps* A *est* tendu *suivant la ligne qui joint les deux points d'articulation; si elles sont* répulsives, *il est* comprimé *suivant cette ligne.*

2° *Si le corps* A *supporte lui-même des forces, on rentre dans le cas précédent en décomposant leur résultante en deux autres* r *et* r_1 (*fig.* α) *de même direction qu'elle, appliquées aux deux charnières.*

Si les forces données agissant sur le corps A *se réduisaient à un couple, on ferait la décomposition pour chacune des deux forces du couple.*

D'après cela, on peut, dans les recherches des conditions d'équilibre des systèmes articulés comme ceux que nous considérons, aussi bien que dans la recherche des actions mutuelles entre les corps et les charnières, supposer qu'il n'y a de forces directement appliquées que sur les charnières (¹). C'est ce que nous ferons. Alors, en vertu du théorème précédent, les conditions d'équilibre du système ne sont pas modifiées si l'on enlève successivement chacun des corps, pourvu que, suivant la droite qui joint ses deux points d'articulation, on applique deux forces égales et opposées.

Tous les corps étant ainsi enlevés, il ne restera que les charnières qu'on peut regarder comme *libres* et indépendantes les unes des autres, sous l'action des forces qui leur sont directement appliquées, et de celles qu'on a ajoutées pour tenir lieu des corps enlevés.

Pour que le système tel qu'il existait en réalité soit en équilibre, il faut et il suffit que chacune des charnières soit en équilibre, c'est-à-dire (§ 29) que le polygone des forces qui la sollicitent se ferme, puisque toutes ces forces passent par les centres d'articu lation qu'on a ainsi le droit de considérer seuls.

Ainsi :

(¹) Mais les conditions d'équilibre assurées et les actions mutuelles connues, si l'on veut chercher la répartition des pressions ou tensions que ces forces font naître à l'intérieur de chaque corps, il faudra restituer à chaque force son véritable point d'application et construire, pour chaque corps, le polygone des pressions, selon les principes établis au Chapitre précédent.

Théorème II. — *Étant donné un système articulé formé par des corps en nombre quelconque, ne portant chacun que deux charnières et soumis uniquement à des forces appliquées aux points d'articulation, si l'on applique suivant la ligne qui joint les deux centres d'articulation de chaque corps une paire de forces égales et opposées, pour que le sytème soit en équilibre, il faut et il suffit que chaque point d'articulation considéré comme libre soit en équilibre, c'est-à-dire qu'il faut et il suffit que le polygone formé par les forces directement appliquées en chacun de ces points et celles qu'on a ajoutées se ferme.*

Les corps pour lesquels la paire de forces ajoutées est *attractive* sont *tendus;* ceux pour lesquels elle est *répulsive* sont *comprimés.* On peut encore dire plus simplement que si, soit la force f_{ab} (*fig.* α), appliquée en *a*, soit celle f_{ba} appliquée en *b* tombe sur le prolongement de *ab*, le corps est comprimé; dans le cas contraire, il est tendu.

Remarque. — Si des forces agissent sur les corps eux-mêmes, on les reporte sur les charnières, comme il est indiqué ci-dessus.

§ 96.

APPLICATION AUX FRAMEWORKS OU SYSTÈMES RÉTICULAIRES. — On nomme *systèmes réticulaires* ou *systèmes simplement triangulés* ou *Frameworks* (en allemand *Fachwerck*) des charpentes formées par la juxtaposition de triangles suivant le type indiqué sur la *fig.* 64, *Pl. XIII*.

Elles se composent :

1° D'un polygone de pourtour, *abcdefghja* dont les côtés seront appelés les *barres principales;*

2° De barres placées diagonalement à l'intérieur du polygone de pourtour, comme il est indiqué sur la figure.

Ces barres se nomment les *barres de remplissage* et, suivant les cas, *bracons* ou *étrésillons;* parfois, celles inclinées d'un côté, à savoir, *bj*, *ch*, *dg*, prennent les noms de *bracons* ou *étrésillons,* les autres *cj*, *dh*, *eg* prennent le nom de *contre-bracons* ou *contre-étrésillons.* Quand il y a des barres verticales elles prennent souvent le nom de *poinçons.*

Les caractères essentiels de ces systèmes sont les suivants :

a. Se composant de triangles simplement juxtaposés, ils forment des figures strictement indéformables et librement dilatables ;

b. Il existe au moins un nœud, et, en général, deux (ici ceux *a* et *f*) ne comprenant que deux barres ; au moins un nœud et, en général, deux (ici *b* et *e*) ne comprenant que trois barres ;

c. Par un point quelconque on peut faire, dans la charpente, une section xy rencontrant au plus trois barres.

Remarque. — Les noms de *frames*, *framework*, *fachwerk*, *systèmes réticulaires* sont des noms génériques qu'on applique souvent à des systèmes articulés quelconques. Quand nous le ferons, nous le dirons explicitement.

A. — *Systèmes réticulaires libres.*

§ 96 *bis*.

Méthode générale pour déterminer les tensions ou pressions dans un framework ou système réticulaire libre. — Supposons qu'aux divers sommets ou en quelques-uns agissent des forces données. On demande de trouver leurs conditions d'équilibre ainsi que les tensions ou pressions qu'elles déterminent dans les lignes de jonction.

1° **Conditions d'équilibre.** — Pour comprendre, dans les considérations qui vont suivre, toutes les circonstances qui peuvent se présenter, nous avons supposé qu'il agit des forces sur certains sommets seulement. Il s'en exerce aux points *b*, *c*, *e*, *f*, *h*, *a*, tandis qu'on n'en suppose pas aux points *d*, *g*, *j*. La figure formée par la charpente étant indéformable, pour que les forces qui la sollicitent soient en équilibre, il faut et il suffit que leur polygone se ferme ainsi qu'un de leurs polygones funiculaires. Pour vérifier s'il en est ainsi, partons de l'une quelconque des forces données, par exemple, de celle appliquée en *b* ; numérotons-les *en suivant le polygone de pourtour de la charpente.*

Nous avons ainsi les lignes d'action

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Portons leurs grandeurs bout à bout, de manière à former *fig.* 64) le polygone des forces dont les côtés

1, 2, 3, 4, 5, 6

sont représentés sur la figure par de doubles lignes.

Les forces étant supposées en équilibre, ce polygone se ferme.

Traçons ensuite le polygone funiculaire relatif à un pôle O qu'on choisira à volonté. Ce polygone

$a'b'c'e'f'h'a'$

est représenté en lignes pointillées sur la figure.

Les côtés successifs $a'b'$, $b'c'$, $c'e'$, $e'f'$, $f'h'$, $h'a'$, compris respectivement entre les lignes d'action

6 et 1, 1 et 2, 2 et 3, etc.

et par conséquent parallèles aux rayons issus de O (*fig.* 64) et aboutissant aux sommets 6.1, 1.2, 2.3, etc. du polygone des forces, se ferme aussi, par hypothèse.

Remarque. — Dans la pratique, si l'on sait d'avance que les forces données sont en équilibre, il ne sera pas nécessaire de tracer ce polygone funiculaire; le plus souvent la charpente reposera sur un ou deux appuis; alors les réactions de ces appuis devront être déterminées suivant les indications données au Chapitre V, de manière à faire équilibre aux forces directement appliquées et la détermination de ces réactions exigera d'ordinaire le tracé d'un polygone funiculaire obtenu soit en suivant l'ordre de successiou que nous avons adopté pour les forces, *soit en suivant tout autre ordre de succession.*

Le polygone, tel que nous l'avons tracé, en prenant les forces dans l'ordre où elles se présentent lorsqu'on suit tout le pourtour de la charpente, est essentiel pour la clarté des explications qui vont suivre, mais, comme nous le verrons, ne joue aucun rôle dans le tracé final de l'épure. Si donc, par le tracé d'un autre polygone funiculaire ou par toute autre considération, on est assuré que les forces agissantes se font équilibre, il sera inutile, dans la pratique, de tracer celui porté sur la figure.

2° **Recherche des tensions.** — La figure formée par la charpente donnée n'admet pas de figure réciproque (§ 92), puisque, des points *a* et *f* ne partent que deux barres. Mais complétons-la par l'adjonction : 1° des côtés du polygone funiculaire; 2° des lignes d'action des forces, ou du moins des portions de ces lignes comprises entre le polygone funiculaire et la charpente.

Ceci fait, nous nous proposons de trouver une figure réciproque de la figure ainsi complétée, en nous imposant la condition que les lignes réciproques des lignes d'action des forces données soient les côtés du polygone de ces forces. Nous démontrerons que ce problème est possible d'une seule manière et que, de plus, les lignes réciproques de celles qui, sur la figure donnée, coïncident avec les barres de la charpente représentent les tensions ou pressions de ces barres à l'échelle où les côtés du polygone des forces représentent les forces données.

D'autre part, nous avons vu que, si une figure admet une réciproque, à chaque nœud de la réciproque répond, dans la proposée, un polygone fermé et le système des polygones fermés ainsi définis est tel que chaque côté de la figure donnée fait partie de deux de ces polygones et de deux seulement. Nous démontrerons que dans tous les systèmes réticulaires, ces polygones peuvent être définis d'avance et toujours d'après la règle unique que nous allons indiquer; à cet effet, nous diviserons les lignes de la figure en quatre catégories :

1° Les barres principales, c'est-à-dire celles qui forment le pourtour de la charpente;
2° Les étrésillons et contre-étrésillons;
3° Les lignes d'action des forces extérieures;
4° Les côtés du polygone funiculaire.

1° Chaque barre principale fait partie de deux polygones fermés, à savoir : 1° un triangle de la charpente; 2° un polygone formé par les lignes d'action des deux forces limitrophes de ce côté, par la portion du polygone funiculaire et celle du pourtour de la charpente comprises entre ces mêmes forces.

Ainsi, la barre *bc*, comprise entre les forces 1 et 2, fait partie du triangle *bcj* et du quadrilatère $bb'cc'$; toute barre principale aux deux extrémités de laquelle agissent des forces fera ainsi partie

d'un triangle et d'un quadrilatère; mais les barres qui ne sont pas dans ce cas font partie d'un triangle et d'un polygone d'un plus grand nombre de côtés.

Ainsi, la barre *hg*, comprise entre les forces 4 et 5, fait partie du triangle *hgd* et du pentagone *hgff'h'h*; la barre *gf* fait partie de ce même pentagone. Toutes les barres comprises entre deux forces consécutives ont ainsi en commun un des deux polygones fermés auxquels elles appartiennent, en sorte que, si la force 5 n'existait pas, les barres *aj*, *jh*, *hg*, *gf* feraient toutes partie d'un même polygone fermé ayant, pour deux de ses côtés, les forces 4 et 6 entre lesquelles toutes ces barres seraient comprises.

2° Chaque étrésillon fait partie de deux triangles qui se présentent d'eux-mêmes sur la figure de la charpente; la barre *bj* fait partie des deux triangles *bja*, *bjc*; la barre *jc*, des deux triangles *jcb*, *jch*.

3° La ligne d'action de chaque force fait partie de deux polygones fermés pour lesquels il ne saurait non plus y avoir de doute; ils sont formés par la ligne considérée elle-même, par l'une des deux forces voisines et limités, d'autre part, par les portions correspondantes du polygone funiculaire et du pourtour de la charpente.

Ainsi *ff'* fait partie du quadrilatère *ff'e'e* et du pentagone *ff'h'hgf*.

4° Chaque côté du polygone funiculaire fait partie de ce polygone même qui est fermé et de l'un des polygones fermés dont il vient d'être parlé.

Ainsi *b'c'* fait partie du polygone funiculaire et du quadrilatère *b'c'bc*; *c'e'* fait partie du polygone funiculaire et du pentagone *c'e'edcc'*.

Pour démontrer les propositions qui viennent d'être énoncées, il suffit de construire la figure réciproque cherchée. Nous pourrions, pour cela, partir de la définition même de ces figures, consistant en ce qu'à chaque nœud de la proposée répond un polygone fermé de la réciproque, et *vice versa*.

Mais, pour nous conformer à ce qu'on est réellement amené à faire dans les applications, nous procéderons autrement : nous essayerons de construire une figure telle : 1° qu'à chaque nœud de la proposée réponde, dans la nouvelle figure, un polygone fermé;

2° qu'à *chacun des polygones fermés de la proposée qui viennent d'être définis* réponde un nœud de la figure cherchée.

Il est clair que s'il est possible de construire une telle figure, non seulement elle sera réciproque de la proposée, selon la définition du § 92, puisqu'à ses nœuds répondront des polygones fermés de la proposée, mais de plus ces polygones fermés seront bien ceux annoncés.

Pour construire la figure cherchée, après avoir numéroté les lignes d'action des forces, en suivant, comme il a été dit plus haut, le pourtour des barres principales, donnons les numéros suivants aux barres elles-mêmes, dans un ordre quelconque (*fig.* **64**). Toutes ces lignes étant désignées par des chiffres *gras,* leurs lignes réciproques (*fig.* 64) seront désignées par les chiffres ordinaires correspondants.

Il n'y a que les côtés $a'b'$, $b'c'$, ... du polygone funiculaire que nous n'avons pas numérotés, parce que, dans la pratique, on n'a pas à s'en occuper.

Cela posé, les lignes réciproques des lignes d'action des forces **1**, **2**, **3**, ... ou bb', cc', ee', ... (*fig.* **64**) sont tracées (*fig.* 64). Ce sont les côtés 1, 2, 3, ... du polygone des forces. D'autre part, la position (non la grandeur) de toutes les barres principales est déterminée d'avance. Ainsi, la barre bc appartient au quadrilatère $bcb'c'$ comprenant les lignes d'action **1** et **2**; dans la figure réciproque, à ce polygone fermé doit répondre un nœud, c'est-à-dire des lignes concourantes; donc la réciproque de bc passe par le point de rencontre des réciproques de **1** et **2**, c'est-à-dire par le sommet 1.2 du polygone des forces et, comme la réciproque d'une ligne est, par définition, parallèle à cette ligne, sa position est déterminée; de même les barres cd, de font partie l'une et l'autre d'un polygone fermé auquel appartiennent les lignes d'action **2** et **3** entre lesquelles ces barres sont comprises; donc les lignes réciproques de ces lignes passent *l'une et l'autre* par le point 2.3 du polygone des forces. Nous avons donc cette règle : *La réciproque d'une barre principale passe par celui des sommets du polygone des forces qui est formé par les deux forces limitrophes à cette barre.*

Et c'est cette règle qui, en définissant *a priori* la position des lignes réciproques des barres principales, nous dispensera de tra-

cer le polygone funiculaire lorsque d'autres raisons n'auront pas conduit à le faire.

Ceci posé, partons de l'un des deux nœuds *a* ou *f* ne comprenant que trois lignes, par exemple du nœud *a*.

Aux trois lignes

6, 7, 8

de ce nœud doivent répondre les trois côtés d'un polygone fermé, c'est-à-dire un triangle. Nous connaissons un côté de ce triangle, le côté 6 (*fig.* 64) du polygone des forces qui correspond, par hypothèse, à la ligne d'action 6, et les directions des deux autres. Le triangle est donc déterminé; pour l'obtenir, il suffit, par l'une des extrémités de 6, de mener une parallèle à 7 et, par l'autre extrémité, une parallèle à 8. Or, d'après la règle qui vient d'être établie, la barre principale 7 comprise entre les lignes d'action 6 et 1 part du sommet 6.1 du polygone des forces et la barre principale 8 comprise entre les lignes d'action 6 et 5 part du sommet 6.5 de ce même polygone.

Nous avons donc, comme répondant au nœud *a* sur la figure, le triangle parfaitement déterminé ayant pour côtés

6, 7, 8.

D'ailleurs les côtés 7 et 8 représentent évidemment les tensions ou pressions des barres de même nom; car (§ 95, théor. II) le point *a* doit être en équilibre sous l'action de ces tensions ou pressions et de la force 6. Donc, ces trois lignes doivent former un polygone fermé (triangle) et, comme on connaît le côté 6 de ce triangle en grandeur, direction et sens et les deux autres en direction, ce ne peut être que le triangle qui vient d'être construit.

Il est d'ailleurs facile de voir si les côtés 7 et 8 représentent des pressions ou des tensions. En effet, le sens de la force 6 est donné par celui du polygone des forces ou par la flèche de 6; ce sens détermine celui du triangle qui doit être parcouru dans l'ordre

6, 7, 8.

Par suite, la force 7, mise en place, c'est-à-dire appliquée à l'extrémité *a* de la barre *ab*, tombe sur le prolongement de cette ligne et non sur la ligne elle-même; donc (§ 95, théor. II) la barre *ab* est comprimée; de même la force 8, appliquée au point *a* de la

barre 8, tombe sur le prolongement de cette ligne : c'est donc aussi une pression : c'est pourquoi, sur les deux figures, les lignes portant les nos 7 et 8 sont indiquées *en gros traits.*

Du nœud *a*, on passe à celui des deux nœuds voisins, *b* ou *j*, qui contient le moins de barres : ici c'est le nœud *b* ; il se compose de quatre lignes, à savoir

1, 7, 9, 10.

Dans la figure réciproque, il devra lui correspondre un quadrilatère.

Nous avons déjà deux côtés de ce quadrilatère, à savoir

1 et 7;

les deux autres répondent aux côtés

10 et 9.

Le premier étant une barre principale comprise entre les lignes d'action 1 et 2 part du sommet 1.2 du polygone des forces ; le second faisant partie du triangle formé par les côtés 9, 7, 8 (dont les réciproques doivent former un nœud) passe par le point 7.8 (nous désignerons toujours un point de la figure réciproque par deux des lignes qui y concourent).

Ainsi : du point 1.2 on mènera une parallèle à 10 ; du point 7.8, une parallèle à 9. On aura ainsi le quadrilatère cherché formé par les lignes

(*a*) 7, 1, 10, 9.

Il est d'ailleurs évident que 7 étant, comme nous l'avons montré, la pression de la barre 7 et 1 étant la grandeur de la force 1, il faut que 10 et 9 représentent les tensions ou pressions des barres 10 et 9 ; car, le point *b* devant être en équilibre, ces tensions ou pressions doivent, avec les forces 7 et 1, former un quadrilatère fermé. Ce quadrilatère est déterminé, puisqu'on en connaît les côtés 7 et 1 et les deux autres en direction. Ce ne peut donc être que celui formé par les lignes (*a*).

Le sens de ce quadrilatère est fourni par celui de la force donnée 1 ; si cette force n'existait pas, ce sens serait néanmoins connu ; car nous savons que 7 représente une pression, c'est-à-dire que les forces à appliquer en *a* et *b* (§ 95, théor. II) sont répulsives ; donc, la force 7 à appliquer en *b* tombe sur le prolongement de

ab. Donc le sens de la force 7 parallèle à *ab* est le sens *ab*, ce qui montre que le quadrilatère doit être parcouru dans l'ordre (*a*) de ses côtés. Par suite, la force 10 mise en place, c'est-à-dire appliquée en *b*, tombe sur le prolongement de la barre *cb*, ou est répulsive : c'est donc une pression ; la force 9 mise en place en *b* tombe suivant la barre *bj* à laquelle elle est appliquée; donc elle est attractive (§ 95) et cette barre 9 est tendue; c'est pourquoi nous l'avons représentée par un *trait plus fin*.

Du nœud *b*, on passera au nœud *j* comprenant les quatre lignes

8, 9, 11, 12.

Les réciproques des deux premiers sont placées. Pour placer la réciproque de l'étrésillon 11, on observe qu'il fait partie du triangle *jbc*; donc, 11 fournira un nœud avec 9 et 10; la barre principale **12** comprise entre les forces 6 et 5 passe par le sommet 6.5 du polygone des forces. Ainsi, de ce sommet on mènera une parallèle à **12** et du sommet 9.10 une parallèle à 11 ; on formera ainsi le quadrilatère dont les côtés sont

8, 9, 11, 12.

On verra, comme ci-dessus, que les deux dernières sont les tensions ou pressions des barres de mêmes numéros. Le quadrilatère doit être parcouru dans l'ordre où nous avons écrit les côtés; car, 8 étant, d'après ce qui précède, une pression, les forces 8 à appliquer en *j* et *a* sont répulsives; la première a donc le sens *aj*.

Il résulte de ce sens du polygone que les barres 11 et 12 sont pressées.

On continuera de la sorte sans difficulté en prenant successivement les nœuds *c*, *h*, *d*, *g* obtenus en parcourant successivement les étrésillons et contre-étrésillons.

Arrivé au nœud *e*, on connaît par les déterminations faites sur les nœuds *d* et *g* les pressions des barres 18 et 19. Donc, au lieu que, pour chacun des nœuds antérieurs, on avait *deux tensions inconnues,* ce qui a permis de constituer les polygones fermés relatifs à ces nœuds, ici on n'en a qu'une, celle de la barre 21. Le nœud *e* comprend les quatre côtés

3, 18, 19, 21,

qui, sur la figure réciproque, doivent former un quadrilatère.

Trois des réciproques,

3, 18, 19,

sont déjà placées sur cette figure; donc, pour qu'au nœud *e* réponde un polygone fermé et, par suite, pour que la figure proposée admette réellement, comme nous l'avons annoncé, une figure réciproque, il faut qu'en joignant les deux extrémités du contour polygonal formé par les trois lignes ci-dessus désignées on obtienne une ligne qui puisse constituer la réciproque de **21**, c'est-à-dire qui lui soit parallèle.

En d'autres termes, si l'on joint l'extrémité de 3, c'est-à-dire le sommet 3.4, à l'extrémité de 19, on obtient une ligne 21 qui devra se trouver d'elle-même être parallèle à **21**, faute de quoi la figure réciproque que nous nous proposons de tracer n'existe pas.

Mais je dis que cette condition sera remplie d'elle-même. En effet, par hypothèse, les forces qui agissent sur l'ensemble de la charpente sont en équilibre. D'autre part, par les opérations faites sur les nœuds

a, *b*, *j*, *e*, *h*, *d*, *g*,

nous avons exprimé que les forces agissant sur chacun de ces divers nœuds forment autant de polygones fermés, c'est-à-dire sont séparément en équilibre. Donc, les forces restantes, c'est-à-dire celles qui agissent sur les deux nœuds *e* et *f*, sont, de leur côté, en équilibre. Mais, si des forces agissant aux deux extrémités *e* et *f* d'une barre sont en équilibre, leurs résultantes sont dirigées l'une et l'autre suivant *ef*, égales et de sens opposés. Or les forces agissant à l'extrémité *e* de la barre *ef* sont la force **3** et les tensions des barres **18** et **19**; leur résultante, c'est-à-dire la droite 21 qui ferme le polygone de ces trois forces, est donc parallèle à **21** et le nœud *e* admet un polygone fermé. Cette ligne 21 représente ainsi la pression (ici c'est une pression) de la barre **21**.

De même les deux forces qui agissent à l'extrémité *f* de la barre *ef* sont 4 et 20; comme la barre est en équilibre, leur résultante est forcément égale et opposée à celle des forces agissant en *e*; en d'autres termes, les lignes

4, 20, 21

forment d'elles-mêmes un triangle. C'est en effet ce qu'on voit sur la figure.

§ 97.

VÉRIFICATION DES ÉPURES. — Les détails qui précèdent ne peuvent laisser aucun doute sur la manière de tracer les épures de ce genre.

On voit que le tracé du polygone funiculaire n'est pas nécessaire dans la pratique. Il suffit de se rappeler la règle donnée plus haut pour placer les barres principales. Le polygone funiculaire ne nous a servi que pour bien établir cette règle.

Le fait qu'arrivée à l'avant-dernier nœud, la ligne de fermeture du polygone réciproque de ce nœud est entièrement déterminée et que cette ligne doit être parallèle à la dernière barre, fournit une vérification précieuse de l'épure. Si cette vérification n'a pas lieu très exactement, on doit conclure qu'on a commis quelque erreur et la recommencer. Pour éviter de retomber dans la même erreur, on peut recommencer par le nœud f, si l'on avait d'abord cheminé en partant du nœud a et *vice versa*.

Remarque. — A mesure qu'on avance, il est essentiel de tracer en gros traits les pressions et, en traits fins, les tensions. Cela évite l'emploi des flèches pour désigner le sens des forces, emploi qui ne pourrait que tromper puisqu'à chaque force inconnue, que ce soit une tension ou une pression agissant à l'une des extrémités d'une barre, répond une force égale et *de sens opposé* agissant à l'autre extrémité.

Ces deux forces étant représentées par une seule et même ligne de la figure réciproque, si l'on employait des flèches, chaque ligne devrait porter deux flèches de sens opposés. Il faut donc s'abstenir des flèches.

§ 98.

CAS DES FIGURES DÉFORMABLES. — Supposons que, de la figure que nous venons de considérer, on enlève un certain nombre de barres, de façon à la rendre déformable.

Pour l'équilibre, il sera toujours nécessaire (§ 46) que le polygone des forces agissantes, ainsi qu'un quelconque de leurs polygones funiculaires, se ferme. Supposons ces conditions remplies et admettons, pour fixer les idées, qu'on enlève la barre 13.

On pourra, en opérant comme il vient d'être dit, construire les polygones fermés réciproques des nœuds a, b, j.

Mais, arrivé au nœud c, on se trouvera avoir déjà tracé, sur la figure, le polygone des trois forces

$$2,\ 10,\ 11.$$

Comme la barre 13 n'existe pas, il faudra, pour que le point c soit en équilibre, que la droite qui ferme ce polygone soit parallèle à **14**.

Si cette condition n'était pas remplie, les forces agissantes ne pourraient pas, quoiqu'elles satisfassent aux conditions d'équilibre relatives à des systèmes invariables, maintenir en équilibre la charpente déformable dont il s'agit.

Supposons donc que les forces aient été choisies de façon que cette condition se trouve satisfaite. Alors la ligne de fermeture parallèle à **14** qu'on aura tracée représentera la tension de cette barre.

On pourra ensuite passer aux nœuds suivants h, d, g, e, et opérer comme précédemment.

Ainsi, si une charpente contient une barre de moins que le nombre nécessaire pour qu'elle soit strictement triangulée, il faut, pour qu'elle puisse être en équilibre, que les forces qui la sollicitent satisfassent à *une* condition en sus de celles relatives aux systèmes invariables. La Statique graphique permet de vérifier si cette condition est remplie et de trouver, si elle l'est, les tensions des barres.

On montrerait de même que, si une figure renferme k barres de moins que le nombre nécessaire pour qu'elle soit triangulée, il faut, pour son équilibre, que les forces qui la sollicitent satisfassent à k conditions en sus de celles relatives aux systèmes invariables ; la Statique graphique permet de vérifier si elles sont remplies et donne, si elles le sont, les tensions de toutes les barres.

§ 99.

CAS DES FIGURES A LIGNES SURABONDANTES. — Supposons que, au lieu d'enlever des barres de la figure, on vienne, au contraire, à en ajouter. La figure sera, *a fortiori,* indéformable et l'équilibre sera assuré si les forces agissantes ont leur polygone des forces et un de leurs polygones funiculaires fermés.

Concevons qu'on ajoute une barre joignant les deux sommets *j* et *d*. On pourra toujours construire comme précédemment les polygones réciproques des nœuds *a* et *b* et connaître ainsi les tensions des barres 7, 8, 9, 10 aboutissant à ces deux sommets. Mais, au nœud *j*, au lieu d'avoir seulement *deux* tensions inconnues, on en aura trois, à savoir celles des deux barres 11, 12 et de la nouvelle barre *jd*. Le polygone réciproque du nœud *j* sera un pentagone qui devra avoir deux côtés donnés en grandeur, direction et sens, à savoir les côtés 8 et 9, et les trois autres côtés donnés en direction seulement. Or on peut construire une infinité de polygones fermés satisfaisant à ces conditions; on peut se donner arbitrairement la grandeur et le sens d'un des trois côtés inconnus, par exemple de celui qui correspondra à la barre additionnelle *jd*, et alors les deux autres seront déterminés.

Pour tous les nœuds suivants les polygones réciproques se trouveront déterminés. Ainsi l'on peut, sans cesser de satisfaire à toutes les conditions d'équilibre fournies par la Statique, se donner arbitrairement la tension de la barre additionnelle, et alors les tensions des autres barres sont déterminées.

On verrait de même qu'en ajoutant *k* barres on peut se donner arbitrairement leurs tensions, sans cesser de satisfaire aux conditions d'équilibre fournies par la Statique, et ces conditions permettent alors de déterminer, par le tracé d'une figure réciproque, les tensions des autres barres.

La Statique laisse donc, dans ce cas, le problème de la recherche des tensions indéterminé. Nous montrons dans le second Volume de cet Ouvrage comment les premiers principes de la théorie de l'élasticité permettent de le résoudre.

§ 100.

MÉTHODE DE CULMANN. — Concevons une charpente réticulaire ou non, mais disposée de façon qu'on puisse y faire une section plane ou courbe, rencontrant au plus trois barres, en d'autres termes, de façon qu'en coupant effectivement trois barres on puisse séparer la charpente en deux. Si cette propriété existe à l'égard de trois barres, on peut immédiatement en trouver les tensions.

En effet, considérons la *fig.* 64 (*Pl. XIII*), qu'elle soit réticu-

laire ou plus complexe; admettons qu'une section (plane ou non) xy ne rencontre que trois barres 14, 15, 16. On peut concevoir qu'on enlève toute la partie de la charpente placée d'un côté de la section, par exemple à sa droite, sans troubler l'équilibre de la partie de gauche, pourvu qu'aux trois points rencontrés par la section on applique des forces égales aux actions que les parties enlevées des trois barres exercent sur les partics conservées, c'est-à-dire des forces égales aux tensions de ces lignes. Il faut donc qu'il y ait équilibre entre : 1° ces trois tensions; 2° la résultante R des forces 6, 1, 2, 5 agissant à gauche de xy.

Les premières sont donc trois forces agissant suivant des lignes d'action données 14, 15, 16 et maintenant en équilibre une force connue R. La recherche graphique de ces forces fait l'objet du problème résolu au § 57.

S'il s'agit d'un système réticulaire, on peut de la sorte trouver les tensions de toutes les barres.

Pour appliquer cette méthode, on devra numéroter les forces données, non pas, comme nous l'avons fait, en suivant le pourtour de la charpente, mais en partant de l'un des deux nœuds ne comprenant que deux barres, par exemple du nœud a, et suivant ensuite les nœuds en zigzag, c'est-à-dire dans l'ordre a, b, j, c, h, d, g, e, f, de sorte qu'ici l'ordre de succession des forces qu'il faudrait prendre pour construire le polygone des forces serait celui-ci :

6, 1, 2, 5, 3, 4.

On construirait un polygone funiculaire correspondant.

Alors on voit que les forces dont on cherche la résultante seraient les quatre premières et se trouveraient *consécutives* sur le polygone des forces ; par suite (§ 57), on aurait immédiatement, par le polygone funiculaire, la résultante cherchée R, et la décomposition de cette force suivant les trois lignes d'action données se ferait facilement.

Pour toute autre section, le *même* polygone funiculaire, en prolongeant simplement deux de ses côtés, donnerait la position de la nouvelle résultante à décomposer et le polygone des forces en donnerait la grandeur.

Il peut arriver que les résultantes partielles ainsi obtenues ou

certaines d'entre elles soient trop éloignées pour être employées ; alors on aura recours au second procédé du § 57.

Culmann, qui, mettant à profit des travaux épars de Varignon, Coulomb, Poncelet, Méry, Chasles, etc., a, le premier, fait, de la Statique graphique, un corps de doctrine, a imaginé cette méthode. Celle des figures réciproques, due à Maxwell, doit son importance aux beaux travaux de Cremona.

La méthode de Culmann, pour être moins élégante, n'en est pas moins précieuse. Nous allons indiquer un cas très étendu où il est indispensable de l'employer soit seule, soit concurremment avec la méthode des figures réciproques.

Même en dehors de ce cas, elle offre le grand avantage de donner *directement* la tension d'une barre quelconque, sans passer par les tensions d'autres barres, ce qui évite toute accumulation d'erreurs.

§ 101.

CONDITIONS POUR QUE LA STATIQUE FOURNISSE LES TENSIONS D'UN SYSTÈME DE BARRES. — Nous montrerons dans des Notes spéciales (t. II) que, sans aucune exception, pour que la Statique puisse fournir les tensions d'un système articulé libre, il faut et il suffit que ce système soit (§ 91) librement dilatable. Sans entrer ici dans l'examen des cas d'exception pour lesquels nous renvoyons aux notes dont il s'agit, il est facile d'établir la proposition suivante, qui permet presque toujours, dans la pratique, à l'inspection d'un système articulé, de reconnaître s'il peut être traité par la Statique seule ou s'il est nécessaire de recourir à la théorie de l'élasticité.

THÉORÈME. — *Pour que la Statique puisse fournir les tensions d'un système articulé libre, il faut et il suffit,* en général, *qu'il ne contienne pas de lignes surabondantes, c'est-à-dire que, si n est le nombre de ses sommets, il renferme au plus $2n - 3$ côtés.*

En effet, pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que chaque sommet regardé comme libre soit en équilibre sous l'influence des forces qui lui sont directement appliquées et des tensions des barres qui y aboutissent. Cela exige que la somme des

projections des forces sur deux axes soit nulle pour chaque sommet. Si donc il y a n sommets, la Statique fournit ainsi $2n$ équations entre les tensions inconnues et les forces données.

Mais il est facile de voir que ces $2n$ équations se réduisent à $2n-3$, parce que les forces données doivent toujours (§ 46), que le système soit déformable ou non, satisfaire aux conditions d'équilibre des systèmes invariables. Ces conditions sont suffisantes si le système est indéformable; dans le cas contraire, elles ne sont pas suffisantes, mais restent nécessaires.

Supposons d'abord que le système soit strictement indéformable, c'est-à-dire renferme $2n-3$ barres. Alors les conditions sont à la fois nécessaires et suffisantes.

Cela posé, laissant de côté deux sommets A et B formant les extrémités d'une barre choisie arbitrairement AB, considérons les $n-2$ autres sommets. Ils fournissent $2n-4$ conditions d'équilibre dans lesquelles entrent les tensions des barres autres que celles AB, c'est-à-dire $2n-4$ tensions inconnues.

Donc, ces $2n-4$ équations fourniront, sauf si elles sont incompatibles ou indéterminées (cas d'exception pour lesquels on renvoie aux Notes précitées), les tensions de toutes les barres autres que celle AB. Ces équations étant satisfaites, c'est-à-dire les forces agissant sur chacun des sommets autres que A et B étant séparément en équilibre, il faut que la barre AB soit elle-même en équilibre sous l'influence des forces directement appliquées en ses deux extrémités A et B et des tensions des barres autres que celle AB issues de ces mêmes extrémités.

Toutes ces forces sont connues par la résolution des $2n-4$ équations considérées. Puisqu'elles sont en équilibre, il faut et il suffit que la résultante R de celles appliquées en A soit égale et opposée à la résultante R′ de celles appliquées en B.

Cela aura lieu nécessairement, puisque, par hypothèse, les forces appliquées à tout le système sont telles qu'elles le maintiennent en équilibre. Mais alors la valeur commune des deux résultantes R et R′ égales et opposées, dirigées l'une et l'autre suivant AB, représentent la tension de la barre AB, de sorte que les tensions de toutes les barres sont déterminées.

Considérons à présent un système à n sommets ne contenant que $2n-3-k$ barres, k étant un nombre positif.

Si nous ajoutons, pour un instant, k barres au système donné, nous aurons un nouveau système à $2n-3$ barres et nous pourrons, en général, d'après ce qui précède, déterminer les tensions de toutes les barres qui le composent en fonction des forces données qui lui sont appliquées.

Soient

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_k,$$

les tensions trouvées pour les k barres que l'on a ajoutées. Pour que le système véritable, c'est-à-dire privé de ces barres fictives, soit en équilibre, il faut et il suffit que les forces données soient telles que les tensions de ces barres soient nulles. Il faut donc et il suffit que les forces données soient telles que l'on ait identiquement

$$t_1 = 0,\quad t_2 = 0,\quad \ldots,\quad t_k = 0.$$

Ces équations, où les premiers membres sont connus en fonction des forces directement appliquées, indiquent que, pour que le système puisse être en équilibre, il faut et il suffit que les forces données satisfassent à k conditions en outre de celles relatives à tous les corps libres. Si ces conditions sont remplies, la Statique fournit les tensions de toutes les barres, sauf toujours les cas d'exception réservés.

Supposons, au contraire, une figure à k lignes surabondantes, c'est-à-dire renfermant

$$2n-3+k$$

barres. Supprimons k barres en les remplaçant par leurs tensions inconnues

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_k,$$

c'est-à-dire en appliquant aux deux extrémités de chacune d'elles deux forces égales et opposées, de grandeur inconnue, représentant leurs tensions.

L'équilibre ne sera pas troublé, et nous aurons un système à

$$2n-3$$

barres. Nous pourrons exprimer les tensions de ces $2n-3$ barres en fonction : 1° des forces données; 2° des tensions des k barres supprimées. Quelles que soient ces dernières tensions, l'équilibre se trouve assuré, puisqu'on a exprimé que chaque sommet est sé-

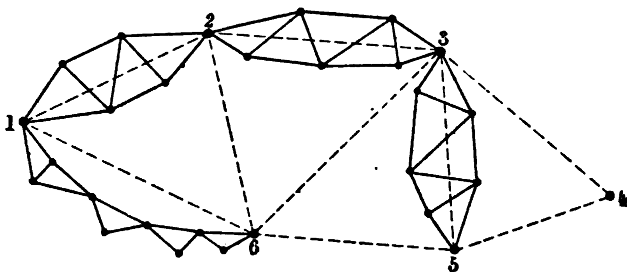
parément en équilibre; elles restent donc indéterminées et nous montrons dans les Notes susmentionnées comment la théorie de l'élasticité les fournit.

§ 102.

SYSTÈMES RÉTICULAIRES COMPOSÉS. — Dans les systèmes réticulaires précédemment étudiés, chaque ligne de la figure peut représenter ou une simple barre ou plus généralement un corps de forme quelconque supportant lui-même des forces quelconques (§ 93). Soit, par exemple (*fig.* 22, p. 177) le système à six sommets 1, 2, 3, 4, 5, 6, aux divers nœuds duquel agissent des forces données.

On peut lui appliquer soit la méthode des figures réciproques,

Fig. 22.



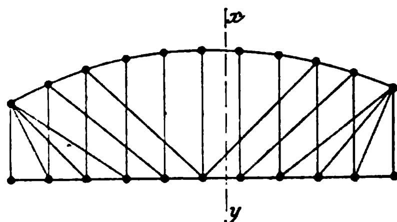
soit celle de Culmann. Mais concevons qu'on remplace chacun des côtés 1.2, 1.6, ... par un système triangulé (on peut concevoir de pareils systèmes aussi sur les côtés 3.4, 4.5, 5.6, quoiqu'ils ne soient pas représentés sur la figure). Aux divers nœuds de ces systèmes agissent des forces données. Il n'y aura plus, en général, aucun nœud ne contenant que deux lignes, qu'on puisse prendre comme point de départ pour l'application de la méthode des figures réciproques, ni aucune section ne rencontrant que trois barres, permettant d'appliquer la méthode de Culmann. Mais il nous suffit, suivant la remarque de la fin du § 95, de décomposer les forces agissant sur les corps 1.2, 2.3, ..., de façon à les reporter sur les nœuds 1, 2, 3, ... Alors, n'ayant que des forces appliquées aux six nœuds 1, 2, 3, 4, 5, 6, nous pouvons remplacer les corps qui les relient par de simples lignes et appliquer à ce système la méthode de Maxwell-Cremona ou celle de Culmann.

Puis, on considérera le système 1.2 comme libre sous l'action des forces qui lui sont directement appliquées et des réactions, à présent connues, qu'il subit aux deux sommets 1 et 2; de même pour le système 1.6 et les autres s'il y en avait.

Le système 1.2, par exemple, peut être regardé comme libre sous l'influence : 1° des forces qui lui sont directement appliquées; 2° des deux réactions parallèles à la résultante de ces forces et les équilibrant, dont la détermination est facile et a d'ailleurs été faite lorsque, suivant la règle du § 95, on a reporté toutes les forces sur les points d'articulation 1 et 2; 3° des deux tensions trouvées.

On peut donc trouver les tensions de toutes les barres qui le composent, et de même pour les autres systèmes.

Fig. 23.



La *fig.* 23 représente une charpente quelquefois usitée en Angleterre et en Allemagne. Le nombre des sommets est $n = 22$. Celui des côtés, $m = 41$. Donc $m = 2n - 3$. Par suite, (§ 101) la Statique doit pouvoir fournir les tensions des côtés. Pour les trouver, observons que la section xy coupe seulement trois barres. Donc, la méthode de Culmann fournit leurs tensions. Ces tensions connues, la méthode des figures réciproques ou celle de Culmann s'applique à chacune des parties à droite ou à gauche de la section xy.

On pourrait, bien entendu, faire une section analogue à gauche du *poinçon* du milieu.

La (*fig.* 24, p. 179) représente une charpente pour toiture où les *arbalétriers* AB et BC peuvent être remplacés chacun par une simple ligne en reportant les forces qui les sollicitent sur les points A, B, C. Alors on a cinq nœuds A, B, C, D, E, soit $n = 5$, et $m = 7$ pour le nombre des côtés. Donc $m = 2n - 3$. On voit d'ailleurs que c'est un système réticulaire. Ayant obtenu les tensions suivant

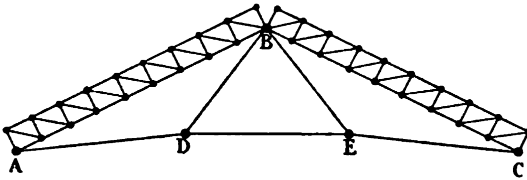
AB et BC, les arbalétriers dirigés suivant ces lignes peuvent être regardés comme libres sous l'action de ces tensions, des forces qui leur sont directement appliquées et des réactions parallèles à la résultante de ces forces, réactions qu'on sait trouver. Et, comme chacun d'eux forme un système réticulaire, on peut trouver, par les figures réciproques, les tensions de chacune des barres qui les composent.

B. — *Des systèmes à liaisons.*

§ 103.

NOMBRE DES CONDITIONS GÉOMÉTRIQUES DES LIAISONS. — Jusqu'ici nous avons considéré des systèmes articulés libres, définis par les dis-

Fig. 24.



tances mutuelles de leurs sommets, c'est-à dire définis uniquement de *forme* et non de position.

Admettons maintenant que certains points du système soient assujettis à rester fixes ou à demeurer sur des courbes données. Ces nouvelles sujétions pourront influer à la fois sur la forme et la position du système.

Une figure à n sommets est entièrement définie de forme et de position si l'on connaît la position de tous ses sommets, puisqu'alors on peut déterminer non seulement la grandeur, mais la position de tous ses côtés. Chaque sommet étant défini par deux grandeurs, par exemple, par ses deux coordonnées, la figure tout entière est définie par $2n$ grandeurs.

Toute équation entre ces $2n$ grandeurs ou quelques-unes d'entre elles se nomme une *équation de liaison* ou une *condition* à laquelle e système est soumis.

La sujétion, pour un point, de rester sur une courbe donnée, se traduit par une équation entre les deux coordonnées de ce point. C'est donc *une* condition.

La sujétion, pour un point, de demeurer fixe, vaut deux conditions, puisqu'elle détermine les deux coordonnées du point.

Se donner la longueur d'un côté d'une figure vaut une condition, puisque cette donnée se traduit par une équation, à savoir

$$\overline{(x-x_1)}^2+\overline{(y-y_1)}^2=l^2$$

entre les coordonnées x, y, x_1, y_1 des deux extrémités du côté donné de longueur l.

Nous avons vu que la forme d'une figure est définie par $2n-3$ côtés, c'est-à-dire par $2n-3$ conditions.

La position d'une figure de forme donnée est définie par trois conditions, puisqu'il suffit de fixer un point de la figure et d'assujettir un autre point à demeurer sur une courbe pour qu'elle soit entièrement fixe.

Ainsi, $2n$ conditions définissent bien, comme nous l'avons dit, la forme et la position d'une figure en la rendant fixe.

Si on la soumet à plus de $2n$ conditions, elle est *a fortiori* fixe; mais les conditions excédant le nombre $2n$ sont surabondantes. Si elle est soumise à moins de $2n$ conditions, elle est mobile.

Si une figure à n sommets renferme $2n-3$ côtés ou davantage, elle est déterminée de position par trois conditions. Toute autre condition est surabondante.

Si une figure à n sommets ne contient que

$$2n-k-3$$

lignes de longueurs données, ce qui lui impose $2n-k-3$ conditions, on peut encore l'assujettir à $k+3$ nouvelles conditions pour la définir strictement de forme et de position.

Si elle est soumise à moins de $k+3$ conditions, elle reste mobile; si elle est soumise à plus de $k+3$ conditions, les conditions excédant ce chiffre sont surabondantes; les côtés de la figure ne pourront plus se dilater librement et, en cas de dilatation par la chaleur, les barres qui la composent feront naître des pressions sur les appuis et des tensions dans les barres elles-mêmes.

§ 104.

NOMBRE DES RÉACTIONS INCONNUES. — Lorsqu'un système articulé soumis à des forces données agissant sur ses sommets n'est pas libre, on le rend libre en adjoignant à ces forces les réactions des appuis, et le problème à résoudre consiste : 1° à trouver les conditions d'équilibre entre les forces données; 2° ces conditions étant supposées remplies, à déterminer les tensions des barres et les réactions des appuis.

Observons que le nombre des inconnues introduites par les réactions des appuis est toujours égal à celui des conditions géométriques imposées au système. En effet, un point fixe vaut deux conditions. Or, pour le rendre libre, il faut lui appliquer une force inconnue à la fois en grandeur et en direction, ce qui introduit deux inconnues, à savoir la grandeur de la force et l'angle qu'elle fait avec un axe fixe ou, si l'on veut, les deux composantes de la force parallèlement à deux axes fixes.

Si un point est assujetti à demeurer sur une courbe sans frottement, pour le rendre libre, il faut lui appliquer une force de direction normale à la courbe, dont la grandeur est seule inconnue. Or une telle sujétion équivaut à une seule condition.

Ainsi, si un système a f points fixes et s points assujettis à demeurer sur des courbes, c'est-à-dire s'il est soumis à $2f + s$ conditions, pour le rendre libre, on aura ainsi à introduire $2f + s$ réactions inconnues.

§ 105.

CONDITIONS POUR QUE LA STATIQUE FOURNISSE LES RÉACTIONS ET LES TENSIONS. — Théorème. — *Quel que soit le nombre des liaisons d'un système articulé, pour que la Statique fournisse les réactions des appuis et les tensions de tous les côtés d'une figure à n sommets, il faut et il suffit,* en général : 1° *qu'elle contienne au plus $2n - 3$ côtés;* 2° *que, si elle en contient $2n - 3 - k$, les sommets soient au plus assujettis à $k + 3$ conditions de liaison.*

On peut encore dire qu'il faut et il suffit que la figure soit libre-

ment dilatable malgré les liaisons auxquelles elle est soumise [1].

Rendons le système libre par l'adjonction des réactions des appuis. Pour que la Statique puisse fournir les tensions des barres, la figure supposée à n sommets doit évidemment contenir au plus $2n - 3$ lignes; car, si elle en contenait davantage, la Statique serait impuissante à déterminer ces tensions, même si les réactions des appuis étaient connues, à plus forte raison si, comme cela a lieu ici, elles ne le sont pas. Supposons donc que le nombre des côtés soit

$$2n - 3 - k,$$

k étant positif ou nul.

Pour qu'une figure d'un pareil nombre de côtés regardée comme libre soit en équilibre, il faut et il suffit (§ 101) que les forces *extérieures* qui la sollicitent (comprenant ici les réactions des appuis) satisfassent à k conditions en sus des trois conditions relatives aux systèmes invariables, soit en tout à $k + 3$ conditions. Ces conditions satisfaites, la Statique fournit les tensions des barres.

Donc, pour qu'elle fournisse aussi les réactions des appuis, il faut et il suffit que ces réactions soient en nombre moindre ou au plus égal à $k + 3$; pour cela, il faut et il suffit (§ 104) que la figure soit soumise au plus à $k + 3$ conditions de liaison, c'est-à-dire qu'elle soit mobile ou strictement définie.

§ 106.

CALCUL DES DIMENSIONS DES BARRES D'UN SYSTÈME ARTICULÉ. SYSTÈMES D'ÉGALE RÉSISTANCE. — Toute la théorie exposée dans ce Chapitre est vraie quelle que soit la forme des corps formant le système articulé que l'on considère, pourvu que chaque corps ne porte que deux articulations. Supposons, en particulier, comme cela a lieu en général, que ces corps se réduisent à de simples barres cylindriques de dimensions transversales assez grandes pour que celles qui sont comprimées n'aient aucune tendance à fléchir.

Soit t_i la tension (ou pression) subie par une barre de section s_i, de sorte que la tension (ou pression) qu'elle subit par unité de surface

---

[1] On établit dans les Notes susmentionnées (t. II) que ce dernier énoncé ne souffre aucune exception.

est $\frac{t_i}{s_i}$. On sait expérimentalement, d'après la nature de la matière employée, que ce rapport ne doit pas dépasser une valeur donnée que nous appellerons R, et qui, pour chaque matière, est déterminée (*voir* Note I).

Cette constante fixée, on devra avoir

$$(a) \qquad \frac{t_i}{s_i} \leq R,$$

R pouvant, pour une même matière, avoir une valeur différente, suivan que t_i est une tension ou une compression.

On tire de là

$$(a') \qquad s_i \geq \frac{t_i}{R}.$$

La valeur la plus petite possible de s_i est donc

$$(b) \qquad s_i = \frac{t_i}{R}.$$

C'est celle qui conduit à la plus faible dépense possible de matière. On en déduit

$$(b') \qquad \frac{t_i}{s_i} = R.$$

Si toutes les barres ont été ainsi calculées sans excès dans leurs dimensions transversales, toutes celles qui sont tendues supportent même tension et toutes celles qui sont comprimées supportent même compression par unité de surface.

Un système ainsi constitué se nomme un *solide d'égale résistance*.

Dans tout système articulé dépourvu de lignes surabondantes, on peut trouver les tensions de toutes les barres par la Statique. Ayant ces tensions, l'équation (b) fournit les sections correspondantes, de sorte qu'un tel système peut toujours être constitué rigoureusement en solide d'égale résistance.

On montrera (t. II) que ce sont, en général, les seuls jouissant de cette importante propriété.

CHAPITRE VIII.

THÉORIE ET CONSTRUCTION DES MOMENTS DE FORCES DANS UN PLAN.

§ 107.

REMARQUES SUR LES PROJECTIONS DES FORCES. — Quelles que soient les forces situées dans un plan, qui agissent sur un système invariable, elles peuvent (§ 33) être remplacées par deux résultantes. Ces deux résultantes ont même somme géométrique que les forces données, c'est-à-dire que l'origine et l'extrémité du polygone des deux résultantes coïncident respectivement avec l'origine et l'extrémité du polygone de toutes les forces données.

Donc (§ 7) : *la projection sur un axe quelconque des deux résultantes d'un système de forces, dans un plan, est égale à la somme algébrique des projections de ses composantes.*

Si les forces admettent une seule résultante (§ 36), elle est égale à leur somme géométrique. Donc (§ 7) : *La projection, sur un axe quelconque, de la résultante d'un système de forces dans un plan est égale à la somme des projections de ces forces sur cet axe.*

§ 108.

MOMENT D'UNE FORCE PAR RAPPORT A UN POINT. — Lorsque des forces sont toutes situées dans un même plan, on appelle *moment d'une force* par rapport à un point du plan le produit de la force par sa distance au point. Cette distance, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire abaissée du point sur la force, se nomme le *bras de levier* de la force.

On compte les moments positivement ou négativement suivant que la force tend à faire tourner son bras de levier dans un sens convenu, par exemple, dans le sens des aiguilles d'une montre, ou en sens contraire.

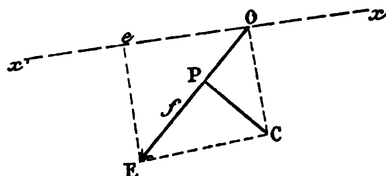
Le point par rapport auquel on prend les moments d'un système de forces se nomme quelquefois le *centre des moments*.

Soient (*fig.* 25) OE une ligne représentant en grandeur, position et sens, une force f et C un point quelconque du plan, dont la distance à OE est représentée par la perpendiculaire CP. Le moment de la force f par rapport au point C est le produit $f \times CP = OE \times CP$.

Ce produit est précédé du signe + ou du signe —, selon que la force f tend à faire tourner le bras de levier CP autour du point C supposé fixe, dans un sens convenu ou en sens contraire.

Si le sens convenu pour les moments positifs est celui des aiguilles d'une montre, le moment de la force f est négatif.

Fig. 25.



Remarque I. — Le moment d'une force ne change ni en grandeur, ni en signe si l'on déplace son point d'application sur sa ligne d'action. Il change de signe, si l'on change la force de sens. D'où résulte que la somme algébrique des moments, par rapport à un point, de deux forces égales entre elles, dirigées toutes deux suivant la droite qui joint leurs points d'application et de sens opposés, est nulle ; ou encore, on ne change pas la somme des moments d'un système de forces situées dans un plan, par rapport à n'importe quel point du plan, en adjoignant à ces forces des paires de forces égales et opposées, dirigées suivant les droites qui joignent leurs points d'application ou en supprimant de telles forces.

Remarque II. — Le moment d'une force par rapport à un point quelconque de sa ligne d'action est nul ; réciproquement, si le moment d'une force par rapport à un point est nul, ce point appartient nécessairement à la ligne d'action de cette force.

Remarque III. — Le moment d'une force par rapport à un

point est égal en valeur absolue au double de l'aire du triangle ayant la force pour base et le point pour sommet. Ainsi, le moment de la force $f =$ OE par rapport au point C est le double de l'aire du triangle OEC.

Remarque IV. — Le moment d'une force $f =$ OE par rapport à un point C est égal, en grandeur et signe, au produit de la distance CO du centre des moments au point d'application de la force par la projection de cette force sur une perpendiculaire à CO.

En effet, menons par le point O une ligne Ox perpendiculaire à OC et projetons la force OE sur Ox. Le moment de la force, en valeur absolue, est égal au double de l'aire du triangle OEC; or, si l'on regarde OC comme base de ce triangle, sa hauteur est précisément la projection Oe de la force; la proposition est donc établie en ce qui touche la valeur absolue du moment. Elle est aussi vraie, en ce qui concerne son signe, pourvu qu'on fasse sur le sens positif de l'axe Ox une convention convenable. Si les moments positifs sont comptés de gauche à droite, on devra regarder comme positif le sens Ox tel qu'un observateur placé en O et regardant C ait le demi-axe Ox à sa gauche.

On voit en effet qu'alors la projection de OE sur l'axe Ox est négative; par suite, son produit par la grandeur essentiellement positive OC est aussi négatif, ce qui doit être, puisque le moment de la force f est négatif.

§ 109.

MOMENT DES FORCES CONCOURANTES. — THÉORÈME. — *Le moment de la résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées en un même point et situées dans un plan, par rapport à un point quelconque du plan, est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

En effet, soient (*fig.* 26, p. 187)

$$f, f_1, f_2, f_3, \ldots$$

des forces appliquées en un point O et R leur résultante.

Désignons par $f', f'_1, f'_2, \ldots$, R′ les nombres positifs ou négatifs qui représentent les projections de ces diverses forces sur l'axe

Ox qui vient d'être considéré. La projection de la résultante étant (§ 107) égale à la somme des projections des composantes, on a

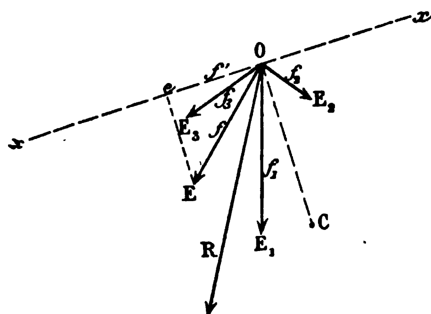
$$R' = f' + f'_1 + f'_2 + \dots$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par le même facteur OC, on aura

$$R' \times OC = f' \times OC + f'_1 \times OC + f'_2 \times OC + \dots$$

égalité qui, en vertu de la remarque IV du paragraphe précédent, exprime le théorème énoncé.

Fig. 26.



Remarque. — Le même théorème s'applique à des forces appliquées en divers points d'un corps, pourvu que leurs lignes d'action soient concourantes. Car les moments de ces forces (§ 108, Rem. I) sont les mêmes que si elles étaient toutes appliquées au point de concours de leurs lignes d'action.

§ 110.

MOMENT D'UN COUPLE. — THÉORÈME. — *La somme des moments de deux forces formant un couple est constante, en grandeur et signe, par rapport à tous les points de son plan et égale au produit de la force du couple par son bras de levier, ce produit étant pris positivement ou négativement, selon que les deux forces tendent à faire tourner le bras de levier dans le sens des moments positifs ou en sens contraire.*

Cette valeur constante se nomme le *moment du couple*.

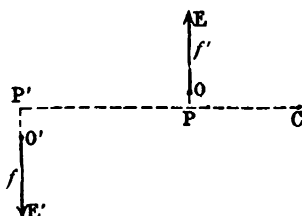
En effet, soient (*fig.* 27) le couple formé par les forces égales, parallèles et de sens opposés f et f', et C un point du plan. Abaissons de ce point la perpendiculaire sur les deux forces; soient P et P' les pieds de cette perpendiculaire sur chacune d'elles.

Les moments des deux forces f et f' par rapport au point C sont en valeur absolue

$$f \times CP \quad \text{et} \quad f' \times CP' = f \times CP'.$$

Mais le premier de ces moments est positif et le second négatif, si nous regardons le sens du mouvement des aiguilles d'une montre

Fig. 27.



comme celui des moments positifs. Donc, la somme des moments des deux forces est

$$f(CP - CP') = -f \times PP'$$

ce qui établit la proposition.

Le résultat serait le même si le point C était pris entre les lignes d'action des deux forces.

Remarque. — La somme des moments des deux forces d'un couple n'est nulle par rapport à aucun point du plan, à moins que son bras de levier soit nul. Alors cette somme de moments est nulle relativement à tous les points du plan.

§ 111.

MOMENTS DE FORCES QUELCONQUES. — THÉORÈME. — 1° *Lorsqu'un système de forces situées dans un plan admet une résultante, c'est-à-dire lorsque le polygone de ces forces n'est pas fermé,*

le moment de la résultante par rapport à tout point du plan est égal à la somme des moments des forces elles-mêmes.

2° *Lorsqu'un système de forces se réduit à un couple, c'est-à-dire lorsque le polygone de ces forces est fermé, la somme de leurs moments relativement à tout point du plan est constante et égale au moment du couple résultant.*

En effet, pour trouver soit la résultante, soit le couple résultant d'un système de forces, on n'a fait (§ 33, 36, 39) que les opérations suivantes : déplacer les points d'application de forces sur leurs lignes d'action; supprimer où ajouter des paires de forces égales, dirigées suivant les droites qui joignent leurs points d'application et de sens opposés; composer ou décomposer des forces appliquées en un même point. Or il résulte des théorèmes qui viennent d'être établis qu'aucune de ces opérations n'altère la somme des moments des forces considérées.

Donc : 1° si elles se réduisent à une résultante, son moment par rapport à tout point du plan est égal à la somme des moments des forces elles-mêmes par rapport à ce point; 2° si elles se réduisent à un couple, la somme de leurs moments par rapport à tout point du plan est égale à la somme des moments des deux forces du couple par rapport à ce point et, comme cette dernière est constante (§ 110) et égale au moment du couple, il en est de même de la première.

§ 112.

EXPRESSION DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE A L'AIDE DES MOMENTS. — THÉORÈME. — *Pour que des forces situées dans un plan et appliquées à un système invariable soient en équilibre, il faut et il suffit que les sommes de leurs projections sur deux axes non parallèles situés dans ce plan soient nulles, ainsi que la somme de leurs moments relativement à un point du plan.*

Remarque. — Si ces conditions sont remplies pour un seul système d'axes et un seul point, elles le sont pour tous les axes et tous les points du plan.

En effet, pour que des forces soient en équilibre, il faut et il suffit que les deux forces auxquelles elles sont réductibles (§ 33)

soient égales et opposées, c'est-à-dire forment un couple dont le bras de levier soit nul. La somme des projections de deux pareilles forces sur un axe quelconque et la somme de leurs moments relativement à un point quelconque du plan sont nulles. Donc (§ 107 et 111) il en est de même de la somme des projections des forces données sur un axe quelconque et de la somme de leurs moments relativement à un point quelconque.

La condition indiquée est donc nécessaire.

Elle est d'ailleurs suffisante.

Car, de ce que les sommes des projections des forces sur deux axes sont nulles, il résulte que leur polygone des forces se ferme et que, par suite (§ 39), elles se réduisent à un couple.

Et de ce que la somme de leurs moments relativement à un seul point du plan est nulle, il résulte (§ 111) qu'il en est de même du moment de ce couple, ce qui exige (§ 110) que son bras de levier soit nul ou que les deux forces qui le composent soient nulles. Dans les deux cas, il constitue un système en équilibre.

Remarque. — Si les conditions d'équilibre indiquées sont remplies relativement à un système d'axes, les forces se réduisant à un couple de moment nul, les sommes de leurs projections et moments sont nulles pour tout axe et pour tout point du plan.

§ 113.

AUTRE FORME DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE. — THÉORÈME. — *Pour que des forces situées dans un plan et appliquées à un système invariable soient en équilibre, il faut et il suffit que les sommes de leurs moments soient nulles relativement à trois points non en ligne droite situés dans le plan.*

En effet, si la somme des moments est nulle relativement à un point A du plan, les forces données ne sont pas réductibles à un couple, puisque le moment d'un couple n'est nul par rapport à aucun point du plan (§ 110, *Rem.*), à moins qu'il ne se réduise à deux forces en équilibre.

Ainsi, ou les forces données sont en équilibre, ou elles se réduisent à une force unique. Dans le premier cas, la proposition est démontrée; dans le second, la force unique est nulle; en effet, son

moment (§ 111) est nul par rapport à trois points non en ligne droite.

Or, le moment d'une force par rapport à un point n'est nul que si elle est nulle ou si elle passe par ce point; la force dont il s'agit devrait donc, si elle n'était pas nulle, passer par trois points non en ligne droite, ce qui est impossible.

Corollaire. — *Si les sommes des moments d'un système de forces par rapport à trois points non en ligne droite sont nulles, il en est de même de la somme de leurs moments relativement à tout point du plan et de la somme de leurs projections sur un axe quelconque.*

§ 114.

Équivalence. — Théorème. — *Pour que deux systèmes de forces situées dans un plan et appliquées à un système invariable soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient mêmes sommes de projections sur deux axes du plan et même somme de moments relativement à un point du plan.*

Remarque. — Si ces conditions sont remplies pour deux axes et un point particulier, elles le sont pour un axe quelconque et un point quelconque.

En effet, pour que deux systèmes de forces F et F′ appliquées à un système invariable soient équivalents, il faut et il suffit (§ 21) que les forces F et celles F′ changées de sens, que nous appellerons — F′, se fassent équilibre.

Il faut donc et il suffit (§ 112) que la somme des projections sur deux axes et la somme des moments, relativement à un point, des forces F et — F′, soient nulles, ou, ce qui revient au même, que les sommes des projections sur deux axes et la somme des moments relativement à un point des forces F et + F′ soient respectivement égales entre elles.

Corollaire I. — *Pour que deux couples soient équivalents, il faut et il suffit que leurs moments soient égaux.*

En effet, deux couples sont deux systèmes particuliers de forces.

Comme les sommes de leurs projections sur deux axes quelconques sont nulles et, par suite, égales entre elles, il suffit, pour que ces deux systèmes de forces soient équivalents, qu'ils aient mêmes sommes de moments relativement à un point du plan. Et, comme la somme des moments de deux forces formant un couple est (§ 110) égale au moment même du couple, la proposition est établie.

Corollaire II. — *On peut déplacer un couple d'une manière quelconque dans son plan, changer en même temps d'une façon arbitraire la longueur de son bras de levier, pourvu qu'on modifie en même temps la grandeur commune des deux forces qui le composent, de façon que le produit de cette grandeur par le bras de levier ne change pas, sans que le couple cesse d'être équivalent à lui-même.*

En effet, toutes ces opérations ne modifient ni en grandeur ni en signe le moment du couple.

§ 115.

COMPOSITION DES COUPLES. — Théorème. — *Un système de couples distribués d'une manière quelconque dans un plan est réductible à un couple unique dont le moment est égal à la somme algébrique des moments des couples composants.*

En effet, un système de couples est un système de forces dont le polygone des forces se ferme ou dont la somme géométrique est nulle. Donc (§ 39) elle est réductible à un couple unique. D'ailleurs (§ 111) la somme des moments des deux forces du couple résultant par rapport à un point est égale à la somme des moments relativement à ce point des forces composantes et, comme la somme des moments des deux forces du couple résultant par rapport à n'importe quel point est constante et égale au moment de ce couple, qu'il en est de même de la somme des moments des deux forces formant chaque couple composant, la proposition est établie.

§ 116.

Lemme. — *Étant donnée une force* F *appliquée en un point d'un corps, on peut toujours la transporter parallèlement à elle-même en un point quelconque* A *du corps, pourvu qu'à la nouvelle force on adjoigne un couple ayant pour moment le moment de la force donnée par rapport au point* A.

En effet (*fig.* 28), soit F une force appliquée en un point O

Fig. 28.



d'un corps. En un autre point A, appliquons deux forces, l'une F' égale, parallèle et de même sens que la force donnée, l'autre — F égale et opposée à la précédente. Nous n'aurons rien changé à l'état du corps.

La force F se trouve donc remplacée par la force F' qui lui est égale et le couple F, — F dont le moment est, par définition même, égal au moment de la force F par rapport au point A.

§ 117.

Résultante de translation ; couple résultant. — Théorème. — *Tout système de forces situées dans un plan et appliquées à un système invariable est réductible : 1° à une force unique égale à la somme géométrique des forces données et appliquée en un point* A *choisi arbitrairement dans le plan ; 2° à un couple dont le moment est égal en grandeur et signe à la somme des moments des forces données relativement au point* A.

La force se nomme *la résultante de translation* des forces données au point A ; le couple se nomme le *couple résultant de cette translation*.

Soient

$$(1) \qquad F, F_1, F_2, \ldots$$

des forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan. Transportons-les parallèlement à elles-mêmes en un point A et soient respectivement

$$(1') \qquad F', F'_1, F'_2, \ldots$$

les forces transportées, en adjoignant à ces dernières forces les couples correspondants F, — F, ..., comme il est dit au paragraphe précédent.

Nous aurons ainsi deux systèmes de forces :

1° Les forces (1′) toutes appliquées au même point A et que nous pouvons composer en une force unique R égale à leur somme géométrique et, par suite, à la somme géométrique des forces données;

2° Les couples

$$F, -F;\ F_1, -F_1;\ F_2, -F_2;\ \ldots,$$

qu'on peut réduire (§ 115) à un couple unique ayant pour moment la somme des moments de ces couples. Mais le moment du couple F, — F n'est autre que le moment de la force F par rapport au point A; celui du couple F_1, — F_1 est de même égal au moment de la force F_1 par rapport à ce même point et ainsi de suite, de sorte que le couple résultant a bien pour moment la somme des moments des forces données relativement au point A.

Remarque I. — Si l'on transporte des forces en un point A le moment du couple résultant de cette translation ou la somme des moments des forces données par rapport au point A, c'est une seule et même chose.

Remarque II. — Pour que deux systèmes de forces soient équivalents, il faut et il suffit : 1° qu'ils aient même résultante de translation en un point arbitrairement choisi A du plan; 2° que les couples résultant de cette translation aient même moment (ou soient équivalents).

Car, pour que deux systèmes de forces soient équivalents, il faut qu'ils aient (§ 114) mêmes sommes de projections sur deux axes,

par suite même somme géométrique ou même résultante de translation.

Il faut de plus qu'ils aient même somme de moments relativement à un point A du plan, par suite que les couples résultant de la translation des deux systèmes de forces en ce point aient même moment ou (§ 114) soient équivalents.

§ 118.

CONSTRUCTION GRAPHIQUE DU MOMENT D'UNE FORCE. — Soit (*fig.* 29) une force dont la ligne d'action est 1 et la grandeur (*fig.* 29) $f = ab = 1$.

Fig. 29.

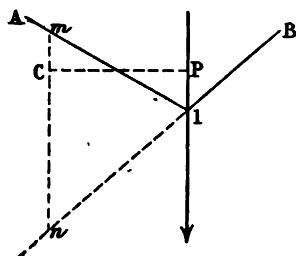
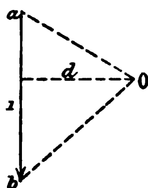


Fig. 29.



Construisons le polygone funiculaire de cette force relativement à un pôle quelconque O. Il ne comprendra que les deux côtés A 1 et 1 B, respectivement parallèles aux rayons Oa et Ob.

Ceci posé, je dis que le moment de la force relativement à un point quelconque C est égal au produit de la distance polaire d du polygone funiculaire, par la longueur mn qu'intercepte entre ses côtés une parallèle à la force, menée par le point C.

En effet, les deux triangles 1 mn et Oab sont semblables comme ayant leurs côtés parallèles.

Donc, leurs bases sont entre elles comme leurs hauteurs

$$\frac{mn}{ab} = \frac{\mathrm{CP}}{d} \quad \text{ou} \quad f \times \mathrm{CP} = d \times mn.$$

Le premier membre est le moment de la force donnée par rapport au point C, ce qui établit la proposition.

Remarque I. — Observons que, moyennant des conventions convenables, le second membre peut fournir non seulement la grandeur du moment, mais aussi son signe. A cet effet, attribuons un signe à chacun des facteurs du second membre: 1° nous attribuerons à la distance polaire d un signe contraire à celui du moment de la force fictive ab par rapport au pôle O; 2° nous attribuerons à mn un sens, en comptant cette ligne de m vers n, c'est-à-dire du point où elle coupe le côté du polygone funiculaire parallèle au rayon *origine* Oa vers celui où elle coupe le côté parallèle au rayon *extrême* Ob, et nous la regarderons comme positive ou négative suivant qu'elle aura ou non même sens que la force donnée ou que ab.

Moyennant ces conventions, le second membre de la dernière équation représente le moment de la force f en grandeur et signe.

Les moments étant comptés positivement de gauche à droite, les deux facteurs d et mn sont ici positifs.

Remarque II. — Pour que le produit $mn \times d$ soit homogène à un moment, il faut que l'un des facteurs soit compté à l'échelle des forces et l'autre à l'échelle des longueurs.

Si la distance polaire d est égale à l'unité de longueur, le segment mn compté à l'échelle des forces représente la valeur numérique du moment.

Si d avait, au contraire une longueur égale à celle qui représente l'unité de force, alors la longueur mn estimée à l'*échelle des longueurs* représenterait la valeur numérique du moment.

S'il est incommode de prendre pour d la longueur représentant l'unité de longueur ou l'unité de force, on prendra, pour ce facteur qui entre dans tous les moments, une valeur qui soit dans un rapport simple avec l'une de ces deux unités.

§ 119.

CONSTRUCTION DU MOMENT DE LA RÉSULTANTE D'UN SYSTÈME DE FORCES. — THÉORÈME I. — *Le moment de la résultante d'un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan par rapport à un point quelconque* C *du plan* (*ou la somme des mo-*

ments de ces forces) est égal au produit de la longueur du segment intercepté par les côtés extrêmes d'un quelconque des polygones funiculaires des forces considérées, sur une parallèle à leur résultante menée par le point C, par la distance du pôle de ce polygone à la droite qui ferme le polygone des forces.

Fig. 30.

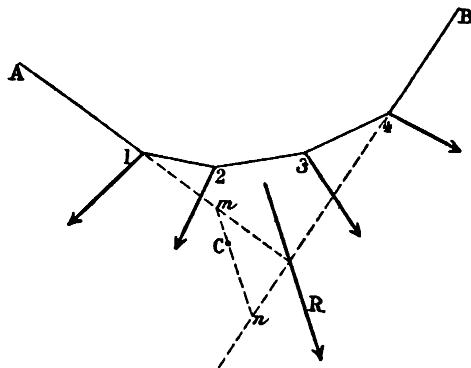
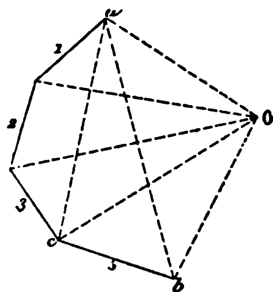


Fig. 3o.



Dans ce produit, l'un des facteurs est mesuré à l'échelle des forces, l'autre, à l'échelle des longueurs.

Soient (*fig.* 30)

1, 2, 3, 4

les lignes d'action de quatre forces représentées (*fig.* 3o) par les côtés

1, 2, 3, 4

du polygone des forces.

Construisons le polygone funiculaire A1.2.3.4B relatif à un pôle quelconque O. La résultante R des forces passe par le point d'intersection des côtés extrêmes A1 et B4 du polygone funiculaire et est représentée, sur le polygone des forces, par la ligne *ab*.

Si *d* est la distance du pôle à cette ligne *ab*, en vertu du paragraphe précédent, le moment de la force $R = ab$ par rapport à un point quelconque C est égal au produit

$$mn \times d$$

du segment intercepté entre les côtés A1 et B4 du polygone funiculaire, sur une parallèle à la force menée par le point, par la distance *d* du pôle à la ligne *ab*.

Remarque I. — Les remarques du paragraphe précédent sur les échelles d'évaluation des facteurs *mn* et *d*, sur la manière de choisir la distance *d* et sur les signes à attribuer aux deux facteurs *mn* et *d*, s'appliquent ici.

Remarque II. — Le même polygone funiculaire permet de trouver non seulement le moment de la résultante de toutes les forces, mais aussi le moment de la résultante partielle de certaines d'entre elles, pourvu qu'elles soient consécutives. Ainsi, pour avoir le moment de la résultante des forces 1, 2, 3, il suffirait, par le point C, de mener une parallèle à la diagonale *ac* du polygone des forces, qui donne la direction de cette résultante, et le produit du segment intercepté sur cette parallèle, par les côtés A1 et 3.4 comprenant entre eux les forces considérées, par la distance *d'* du pôle à la ligne *ac*, donnerait le moment cherché.

Dans le cas de forces parallèles, les facteurs *d*, *d'*, ... à employer, soit que l'on cherche le moment de la résultante totale, soit que l'on cherche les moments de résultantes partielles, restent les mêmes et sont tous égaux à la distance polaire. D'où ce théorème :

Théorème II. — *Le moment de la résultante d'un certain nombre de forces parallèles situées dans un plan par rapport à un point quelconque* C *du plan (ou la somme des moments de ces*

forces) est égal au produit de l'ordonnée parallèle à ces forces, menée du point C *et comprise entre les deux côtés d'un polygone funiculaire quelconque comprenant entre eux les forces considérées, par la distance polaire de ce polygone.*

L'une des deux lignes qui entrent dans le produit doit être mesurée à l'échelle des longueurs et l'autre à l'échelle des forces. Les deux facteurs doivent recevoir les signes ci-dessus spécifiés.

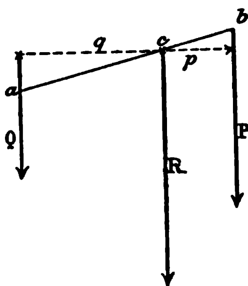
CHAPITRE IX.

COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES DANS L'ESPACE.

§ 120.

COMPOSITION ET CENTRE DE DEUX FORCES PARALLÈLES. — Nous avons vu (§ 42) que la résultante R de deux forces parallèles et de même sens P et Q est (*fig.* 31) une force de même direction et de

Fig. 31.



de même sens qu'elles, égale à leur somme, placée entre les deux et divisant la droite *ab* qui joint leurs points d'application, en raison inverse de leurs grandeurs ; que, de même, la résultante R (*fig.* 32) de deux forces P et Q parallèles, de sens contraires et inégales, est une force de même direction et de même sens que la plus grande des deux (on suppose ici $P > Q$), égale à leur différence, placée sur le prolongement de la ligne *ba* qui joint leurs points d'application et divisant toujours cette ligne en raison inverse des grandeurs des deux forces, de sorte que la résultante est placée du côté de la plus grande des deux.

Cette règle, que nous avons déduite de la considération des polygones funiculaires, est aussi une conséquence immédiate de la théorie des moments.

Soit (*fig.* 31) *c* le point où la résultante des deux forces données

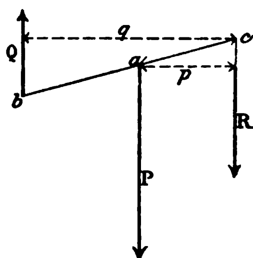
et supposées de même sens coupe la ligne ab et soient p et q les distances de ce point aux deux forces données. Le moment de la résultante cherchée R par rapport au point c est nul; donc (§ 111) il en est de même de la somme algébrique des moments de ses composantes P et Q.

Ceci exige que ces deux moments soient de signes contraires ou que les forces P et Q tendent à faire tourner leurs bras de levier p et q en sens opposés. Il est nécessaire, pour cela, que le point c soit placé entre les points a et b et alors le théorème fournit la relation

$$(a) \qquad Pp - Qq = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{q}{p} = \frac{ac}{cb}.$$

Si (*fig.* 32) les forces P et Q sont de sens contraires, la néces-

Fig. 32.



sité que la somme des moments des forces P et Q par rapport au point c de la résultante soit nulle ou que ces moments soient égaux et de signes contraires exige que le point c ne soit plus entre les points a et b et que l'on ait toujours les équations (a).

Remarque. — Si les deux forces parallèles et de sens opposés sont égales, elles fournissent un couple et n'admettent pas de résultante. Ce cas écarté, qu'il s'agisse de deux forces de même sens ou de sens opposés, la position du point c où la ligne d'action de la résultante coupe la droite qui joint les points d'application a et b des deux forces ne dépend ni de la direction commune de ces forces, ni de leurs grandeurs absolues, mais seulement de la position de ces points d'application et du rapport des grandeurs des forces. Le point c ne changerait donc pas si l'on modifiait les intensités

des deux forces dans un même rapport et si l'on faisait tourner leurs lignes d'action d'un même angle quelconque et dans le même sens, autour des points *a* et *b*.

§ 121.

CENTRE DES FORCES PARALLÈLES. SA DÉTERMINATION GRAPHIQUE. — THÉORÈME. — *Étant donné un système de forces parallèles situées ou non dans un plan, si, sans changer les rapports de leurs grandeurs, on fait tourner chacune d'elles d'un même angle* α *et dans le même sens, autour d'un point fixe arbitrairement choisi sur sa ligne d'action, leur résultante ne fera elle-même que pivoter autour d'un point fixe, indépendant de l'angle* α *et du rapport dans lequel on a modifié les grandeurs des forces.*

Ce point fixe se nomme le centre des forces parallèles.

La remarque du paragraphe précédent établit le théorème dans le cas de deux forces.

Supposons-le démontré pour un système de i forces, je dis qu'il sera vrai pour $i+1$. En effet, soient Q la résultante des i premières forces données et R la résultante de Q et de la $(i+1)^{\text{ième}}$ que nous nommerons P_{i+1} : R sera ainsi la résultante de toutes les forces données.

Faisons tourner chacune de ces forces d'un même angle quelconque autour d'un point fixe et modifions leurs grandeurs dans un même rapport quelconque : par hypothèse, la résultante Q des i premières forces tournera du même angle autour d'un point fixe et sera modifiée dans le même rapport ; mais alors la résultante de Q et de P_{i+1}, c'est-à-dire la résultante R de toutes les forces données, tournera elle-même autour d'un point fixe et sera modifiée dans le même rapport en vertu de la remarque du paragraphe précédent. Donc, si le théorème est vrai pour i forces, il est vrai pour $i+1$.

Étant établi pour deux forces, il est donc vrai pour trois, par suite pour quatre, et ainsi de suite pour un nombre quelconque.

Remarque I. — Lorsque les points d'application d'un système de forces parallèles distribuées d'une manière quelconque dans

l'espace sont tous dans un même plan P, le centre des forces parallèles est lui-même dans ce plan.

Pour le démontrer, il suffit de supposer que toutes les forces aient tourné d'un même angle, de façon à venir se placer dans le plan : leur résultante sera alors elle-même dans ce plan; il en est donc de même du centre des forces parallèles données qui est un point de cette résultante.

De là on déduit :

Remarque II. — Lorsque les points fixes autour desquels pivotent les diverses forces sont sur une ligne droite, le centre des forces parallèles se trouve aussi sur cette ligne.

Car il doit se trouver à la fois dans deux plans quelconques passant par la droite.

§ 122.

COMPOSITION ET ÉQUILIBRE GRAPHIQUE DES FORCES PARALLÈLES DANS L'ESPACE. — Cette remarque permet de ramener à un problème de Statique graphique plane la recherche du centre des forces parallèles dans l'espace et, par suite, aussi la recherche de la résultante des forces parallèles dans l'espace; car, si l'on connaît le centre d'un système de forces parallèles, la ligne d'action de leur résultante est connue, puisqu'elle passe par ce centre et est parallèle aux forces données; la grandeur de la résultante égale à la somme des forces données et son sens sont directement fournis par le polygone des forces.

On pourra, par exemple, se donner les lignes d'action, ainsi que le polygone des forces, en projection sur deux plans perpendiculaires. On déterminera les traces des diverses lignes d'action sur l'un des plans de projection; puis on amènera toutes les forces données dans ce plan en les faisant tourner d'un même angle autour de leurs traces. Le centre des forces ainsi déplacées sera un point de la résultante cherchée; la direction de cette résultante est celle des forces données; sa grandeur se trouve par les deux projections du polygone des forces.

Si les forces ainsi ramenées dans un plan admettent une résultante unique, il en sera de même des forces données. Ceci exige,

d'après ce qui précède (§ 36), que le polygone des forces ramenées dans un plan, lequel est superposable à celui des forces données, ne soit pas fermé.

Si le polygone des forces données est fermé, alors ces forces se feront équilibre ou se réduiront à un couple, suivant que leur polygone funiculaire, après qu'elles auront été amenées dans un plan, sera fermé ou non.

CHAPITRE X.

PROJECTIONS ET MOMENTS DES FORCES PARALLÈLES DANS L'ESPACE.

§ 123.

LEMME. — *La projection sur un plan de la résultante d'un système de forces parallèles coïncide avec la résultante des projections de ces forces sur le même plan.*

Soit un système de forces parallèles distribuées d'une manière quelconque dans l'espace

(1) $$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n.$$

Concevons que les forces données soient représentées par des longueurs portées dans les sens voulus sur leurs lignes d'action respectives. Projetons ces longueurs sur un plan et soient

(2) $$P'_1, P'_2, P'_3, \ldots, P'_n$$

leurs projections; nous pourrons considérer ces lignes comme de nouvelles forces. Soient R la résultante des forces données et R′ la résultante de leurs projections. Il s'agit de montrer que R′ est la projection de R. Pour cela, prolongeons les forces données jusqu'à leurs rencontres avec le plan de projection et regardons-les comme appliquées en ces points; leurs projections formeront un nouveau système de forces parallèles appliquées aux mêmes points; les intensités des forces projetées sont proportionnelles à celles des forces données, le rapport des premières aux dernières étant le cosinus de l'angle aigu α que la direction de celles-ci fait avec le plan de projection; on peut donc faire coïncider les forces données avec leurs projections en faisant tourner les premières d'un même angle α autour de leurs points d'application et réduisant chacune d'elles dans le rapport $\cos\alpha : 1$. Dans ce mouvement, la résultante des forces données tournera (§ 121) du même angle autour de sa trace sur le plan de projection et sa grandeur sera

réduite dans le rapport $\cos\alpha : 1$, c'est-à-dire qu'elle viendra coïncider avec sa projection. Cette projection est donc la résultante des forces projetées.

§ 124.

MOMENT D'UNE FORCE RELATIVEMENT A UN PLAN. — Dans l'étude des forces parallèles, on appelle *moment* d'une force par rapport à un plan le produit de cette force par la distance de son point d'application au plan. Dans ce produit, on convient : 1° de compter positivement les forces dirigées dans un sens convenu et négativement celles dirigées en sens contraire; 2° de compter positivement les distances au plan des points situés d'un côté convenu de ce plan et négativement celles des points situés de l'autre côté.

On remarquera que le moment d'une force, relativement à un plan, a un tout autre caractère que le moment d'une force relativement à un point, que nous avons considéré dans l'étude des forces situées dans un plan. Celui-ci dépend essentiellement de la position de la ligne d'action de la force et nullement de celle de son point d'application; celui-là, au contraire, ne dépend que de la position du point d'application et non de la direction de la ligne d'action de la force.

D'après cela, étant donné un système de forces parallèles, faisons-les tourner d'un même angle autour de leurs points d'application, de façon à les rendre parallèles à une droite Oy arbitrairement tracée dans le plan (P) par rapport auquel on prend les moments; puis projetons-les sur un plan perpendiculaire à (P), mené par la droite Oy; enfin prenons les moments des forces projetées et de leur résultante par rapport à un point quelconque O de Oy.

Le moment de l'une quelconque des forces données par rapport au plan (P) est évidemment, en valeur absolue, égal au moment de sa projection par rapport au point O; car les forces se projettent en vraie grandeur et leurs distances au plan (P) sont égales aux distances de leurs projections au point O. De plus, en vertu des conventions qui viennent d'être faites sur les signes des deux facteurs dont le produit serait le moment d'une force par rapport à un plan, on voit que, toutes les forces pour lesquelles ce moment

a un même signe sont telles que les moments de leurs projections relativement au point O ont aussi un même signe. Donc on peut faire les conventions sur les signes, de façon que ces deux moments soient, pour chaque force, égaux à la fois en grandeur et en signe.

Le moment relatif au point O de la résultante des forces projetées est égal à la somme des moments de ces forces (§ 111). Cette dernière somme est, d'après ce qui précède, égale à la somme des moments des forces données relativement au plan (P); de plus, la résultante des forces projetées étant, d'après le lemme du paragraphe précédent, la projection de la résultante des forces de l'espace, son moment relatif au point O est égal au moment relatif au plan (P) de cette dernière résultante. Donc :

THÉORÈME. — *Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles par rapport à un plan quelconque est égal à la somme des moments de ces forces par rapport à ce plan.*

DÉTERMINATION ANALYTIQUE DU CENTRE DES FORCES PARALLÈLES. — D'après cela, soient

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n$$

un système de forces parallèles.

Considérons trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz.

Soient

$$\begin{aligned} &x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\\ &y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\\ &z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots,\ z_n \end{aligned}$$

les coordonnées des points d'application des forces données relatives à ces axes et soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre des forces parallèles. Si R est la résultante des forces données, le théorème qui vient d'être établi, appliqué successivement aux trois plans, donnera les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} R\xi &= P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots + P_nx_n = \Sigma Px,\\ R\eta &= P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + \ldots + P_ny_n = \Sigma Py,\\ R\zeta &= P_1z_1 + P_2z_2 + P_3z_3 + \ldots + P_nz_n = \Sigma Pz, \end{aligned}\right.$$

P étant, en grandeur et signe, l'une quelconque des forces données;

x, y, z étant les coordonnées de son point d'application et Σ désignant les sommes algébriques qui forment les seconds membres des équations (1). Ces sommes sont connues; la résultante R l'est également, puisque

$$(2) \qquad R = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \Sigma P.$$

Ainsi les équations (1) font connaître les coordonnées ξ, η, ζ du centre des forces parallèles.

Si toutes les forces sont situées dans un même plan, par exemple dans le plan xOy, alors $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, ..., $z_n = 0$. La dernière équation (1) donne alors $\zeta = 0$, c'est-à-dire que le centre des forces parallèles est aussi situé dans ce plan, ce que nous savions (§ **121**), et sa position est définie par ses deux coordonnées ξ et η relatives aux deux axes Ox et Oy, de même que les points d'application des forces données sont définis par leurs coordonnées x_i et y_i. Il résulte de là que les plans zOy et zOx, perpendiculaires au plan xOy qui contient les forces données, ne jouent plus aucun rôle, mais seulement leurs traces Ox et Oy sur ce plan. Voilà pourquoi le produit Px, moment de la force P relativement au plan zOy, peut, dans ce cas, prendre le nom de moment de la force P relativement à la *droite* Oy intersection du plan zOy avec le plan qui contient toutes les forces. De même le produit Py, moment de la force P relativement au plan zOx, prendra le nom de *moment* de cette force, relativement à la *droite* Ox.

En général, quand des forces parallèles sont toutes situées dans un plan, on appellera *moment* de l'une de ces forces par rapport à une droite du plan son moment par rapport à un plan mené par cette droite perpendiculairement à celui qui contient les forces. On peut donc énoncer le théorème suivant comme cas particulier de celui qui fait l'objet du paragraphe précédent : *Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles, contenues dans un plan, par rapport à une droite du plan, est égal à la somme des moments de ces forces par rapport à cette droite.*

Remarque. — La somme des moments d'un système de forces parallèles par rapport à tout plan passant par le centre de ces forces est nulle et réciproquement.

§ 125.

ÉQUIVALENCE ENTRE LE ROLE ANALYTIQUE DES PROJECTIONS ET DES MOMENTS ET LE ROLE GRAPHIQUE DU POLYGONE DES FORCES ET DU POLYGONE FUNICULAIRE. — On voit que le théorème des moments permet de déterminer analytiquement la position du centre des forces parallèles, comme le polygone funiculaire permet de le déterminer graphiquement.

De même le théorème des projections tient analytiquement lieu du polygone des forces, lequel se réduit toujours à une ligne droite dans le cas des forces parallèles.

Pour qu'un système de forces parallèles soit en équilibre, il faut analytiquement : 1° que les sommes de ses projections, sur deux plans parallèles à ces forces et se coupant, soient nulles; 2° que les sommes de leurs moments relativement à ces plans soient nulles; et graphiquement : 1° que le polygone de ces forces soit fermé; 2° qu'un des polygones funiculaires de ces forces *ramenées dans un plan* (§ 122) soit également fermé.

CHAPITRE XI.

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES CENTRES DE GRAVITÉ DES CORPS, SURFACES ET LIGNES.

§ 126.

POIDS ET CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CORPS, D'UNE SURFACE, D'UNE LIGNE. — On nomme *pesanteur* ou *gravité* la cause qui sollicite les corps à descendre vers la terre lorsqu'ils sont abandonnés à eux-mêmes.

L'expérience prouve que cette cause se fait sentir sur toutes les molécules d'un corps. En un même lieu elle agit de la même manière sur toutes ces molécules, quelles qu'en soient les masses; car, dans le vide, un duvet et une balle de plomb tombent de la même hauteur avec la même vitesse.

La résultante des actions de la gravité sur toutes les molécules d'un corps est ce qu'on nomme le *poids* de ce corps.

La direction de la pesanteur, assez bien représentée par un fil à plomb, est ce qu'on nomme la *verticale;* tout plan ou toute ligne perpendiculaire à cette direction se nomme un *plan horizontal* ou une *ligne horizontale.*

Toutes les verticales issues des divers points d'un corps sont sensiblement parallèles, et nous les regarderons comme étant rigoureusement parallèles.

Le centre des forces parallèles qui agissent sur un corps en vertu de la pesanteur prend le nom de *centre de gravité* du corps. Ainsi (§ 121) le centre de gravité d'un corps est un point pris sur la ligne d'action de la force représentant le poids de ce corps, point tel qu'il ne changerait pas à l'intérieur du corps, si l'on imaginait qu'on fît tourner d'un même angle α toutes les forces verticales agissant, en vertu de la pesanteur, sur les différentes particules dont le corps se compose, autour de leurs points d'application.

On ne peut pas, à la vérité, modifier ainsi la direction des forces de la pesanteur; mais on fait quelque chose d'équivalent en inclinant le corps lui-même d'un angle α, relativement à la verticale. Donc la propriété qui caractérise le centre des forces parallèles en général peut, quand il s'agit de la pesanteur, être exprimée aïnsi : il existe à l'intérieur de chaque corps un point idéal par lequel passe constamment la résultante des actions que la pesanteur exerce sur ce corps, quelque position qu'on lui donne dans l'espace. Ce point se nomme le *centre de gravité* du corps.

On appelle *densité* ou mieux *poids spécifique* d'un corps homogène le poids de l'unité de volume de corps, ou, si l'on veut, le rapport du poids de ce corps à son volume.

Si, tout autour d'un point m d'un corps hétérogène, on conçoit une petite portion de ce corps, le rapport du poids de cette portion à son volume est sa *densité moyenne* ou *son poids spécifique moyen;* la limite vers laquelle tend ce rapport lorsque la portion considérée du corps décroît indéfiniment, sans cesser de passer par le point m, est ce qu'on nomme la *densité* du corps en ce point.

Nous considérerons aussi des surfaces et des lignes pesantes, en admettant que la gravité s'exerce sur les surfaces homogènes en raison de leur étendue, et sur les lignes homogènes en raison de leur longueur. La densité d'une figure homogène est donc le poids d'une portion de cette figure ayant une aire égale à l'unité de surface; la densité d'une ligne homogène, le poids d'une portion de cette ligne égale à l'unité de longueur.

De là on passe, comme nous venons de le faire pour les volumes, à la définition de la densité en chaque point d'une ligne ou d'une surface hétérogène.

§ 127.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR LA DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES CENTRES DE GRAVITÉ. — Le centre de gravité n'étant autre chose que le centre des forces parallèles dues à la gravité, la méthode générale indiquée au § 121 pour la recherche graphique du centre des forces parallèles s'applique à la recherche des centres de gravité. Toutefois, dans cette dernière recherche, on a affaire non plus à un nombre limité de forces dont on connaisse le polygone des forces et dont il soit aisé de construire les polygones funiculaires, mais aux

forces en nombre illimité que la gravité exerce sur les diverses particules des lignes, des surfaces ou des corps. Le premier objet que l'on se propose, en général, dans la recherche graphique des centres de gravité, c'est de substituer aux actions de la pesanteur un nombre *fini* de forces parallèles qui leur soient équivalentes; il ne reste ensuite qu'à déterminer le centre de ces dernières forces.

On peut appliquer cette méthode toutes les fois que la figure dont on cherche le centre de gravité peut être décomposée en un nombre fini d'autres figures plus simples et dont on sait trouver les centres de gravité; car alors il suffit de concevoir qu'aux centres de gravité des figures composantes soient appliquées des forces parallèles et proportionnelles aux poids de ces figures, et de chercher le centre de ces forces parallèles.

Ainsi, par exemple, si l'on sait trouver le centre de gravité d'un tétraèdre, on sait trouver le centre de gravité d'un polyèdre quelconque, tout polyèdre étant décomposable en tétraèdres; de même, si l'on sait trouver le centre de gravité d'un triangle, on peut trouver le centre de gravité d'un polygone à un nombre quelconque de côtés, et ainsi de suite.

Il y a deux cas à considérer :

1° Supposons qu'un volume A (et ce que nous disons des volumes s'applique aussi bien aux lignes et aux surfaces) soit la somme d'autres volumes A_1, A_2, ..., A_n, de telle façon que

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n.$$

Si, au centre de gravité des figures dont les volumes sont A_1, A_2, $A_3, \ldots$, on applique des forces proportionnelles à ces volumes, parallèles, de même sens *et de direction d'ailleurs quelconque,* le centre de ces forces parallèles sera le centre de gravité du volume A.

2° Si le volume

$$A = A_1 - A_2,$$

alors, pour avoir le centre de gravité de ce volume, on devra, aux centres de gravité des corps dont les volumes sont A_1 et A_2, appliquer des forces proportionnelles à A_1 et A_2, parallèles, de direction quelconque, *mais de sens contraires.* Car de ce que A est la

différence entre A_1 et A_2, on déduit que A_1 est la somme de A et de A_2 ; donc le centre de gravité du volume A_1 est le point d'application de la résultante des deux forces parallèles et de même sens appliquées aux centres de gravité des corps dont les volumes sont A et A_2, et proportionnelles à ces volumes.

Appelons, pour abréger, A, A_1, A_2 les intensités de forces parallèles et de même sens appliquées aux centres de gravité des volumes A, A_1, A_3 et proportionnelles à ces volumes. La force A_1 étant la résultante des forces A et A_2, les trois forces A_1, — A et — A_2 se font équilibre : donc chacune d'elles est égale et opposée à la résultante des deux autres; en particulier, — A est égal et opposé à la résultante de A_1 et — A_2, c'est-à-dire que A est la résultante de ces dernières forces.

De là on déduit généralement que si le volume A est

$$A = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 \pm \ldots \pm A_n,$$

de telle façon qu'il soit formé de volumes dont les uns sont à ajouter entre eux, les autres à retrancher, pour trouver le centre de gravité du volume A, on devra, aux centres de gravité des volumes A_1, A_2, A_3, ..., appliquer des forces proportionnelles à ces volumes, parallèles, mais en ayant soin de diriger dans *un même sens* toutes celles qui se rapportent aux volumes à ajouter et dans le *sens contraire* toutes celles qui se rapportent aux volumes à soustraire.

Le centre de ces forces parallèles sera le centre de gravité cherché.

Nous allons maintenant indiquer le moyen de trouver les centres de gravité des figures les plus simples, auxquelles on ramènera ensuite soit exactement, soit approximativement, toutes les autres.

Nous ne considérerons d'ailleurs que des figures homogènes.

§ 128.

LEMME. — *Lorsqu'une figure est divisée, par un plan, en deux parties parfaitement symétriques, ce plan contient le centre de gravité de la figure;* car il n'y a pas de raison pour que le

centre de gravité se trouve plutôt d'un côté de ce plan que de l'autre.

Si une figure contient deux plans de symétrie, son centre de gravité est sur leur ligne d'intersection; si elle en contient trois, le centre de gravité est en leur point de rencontre.

Ainsi le centre de gravité d'un parallélépipède rectangle coïncidera avec son centre de figure par lequel passent évidemment trois plans de symétrie.

Si, dans une figure plane, tout est symétrique de part et d'autre d'une droite, le centre de gravité est sur cette droite.

Si une figure plane contient deux lignes de symétrie, son centre de gravité est en leur point de rencontre. C'est ainsi que le centre de gravité d'un rectangle coïncide avec son centre de figure.

Centre de gravité des lignes.

§ 129.

APPLICATION DE LA MÉTHODE GÉNÉRALE A LA RECHERCHE DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN CONTOUR POLYGONAL OU CURVILIGNE QUELCONQUE. — Le centre de gravité d'une portion de ligne droite est sur cette ligne (§ 121, *Remarque I*).

Si la ligne droite est homogène, il est évidemment en son milieu, car il n'y a pas de raison pour qu'il tombe plutôt d'un côté de ce milieu que de l'autre.

Le poids d'une telle ligne est d'ailleurs proportionnel à sa longueur.

Étant donné un contour polygonal, si, au milieu de chacun de ses côtés, on suppose appliquée une force proportionnelle à la longueur de ce côté, toutes ces forces étant parallèles et de même sens, et qu'on les compose au moyen de la règle du polygone des forces et du polygone funiculaire, on aura la ligne d'action de leur résultante. Si on les compose une seconde fois après les avoir toutes inclinées dans le même sens d'un angle quelconque, on aura la ligne d'action de la résultante parallèle à cette nouvelle direction. L'intersection des deux lignes d'action ainsi obtenues est le centre de gravité cherché.

Pour trouver le centre de gravité du périmètre d'une courbe irrégulière, on y substituera le périmètre d'un polygone inscrit d'un grand nombre de côtés.

§ 130.

Triangle. — S'il s'agit d'un triangle ABC (*fig.* 46, *Pl.* X), en joignant les milieux de ses côtés, on obtient un second triangle *abc* semblable au premier. En *b* on doit supposer appliquée une force proportionnelle à AC ou à $ac = \frac{AC}{2}$, en *c* une force proportionnelle à AB ou à $ab = \frac{AB}{2}$; enfin en *a* une force proportionnelle à $bc = \frac{BC}{2}$.

Le centre des deux forces parallèles appliquées en *b* et *c* est le point d'intersection de *bc*, avec la bissectrice de l'angle *a* (§ 120); donc le centre de gravité cherché est sur cette bissectrice. Par la même raison, il est sur les bissectrices des angles *b* et *c*. Ainsi : *le centre de gravité du périmètre d'un triangle coïncide avec le centre du cercle inscrit dans le triangle qui joint les milieux de ses côtés.*

§ 131.

Portion de polygone régulier. — Soit (*fig.* 50, *Pl.* X) AIB une portion de polygone régulier. La ligne OY, perpendiculaire sur le milieu de la corde AB qui sous-tend cette portion de polygone, est une ligne de symétrie ; le centre de gravité cherché se trouve donc sur cette ligne (§ 128). Pour avoir sa position, il faut concevoir qu'au milieu *i* de chaque côté du polygone soit appliquée une force proportionnelle à la longueur *ab* de ce côté, toutes ces forces ayant même direction et même sens ; le centre de ces forces parallèles sera le centre de gravité cherché. Soit G ce point. Appliquons le théorème des moments des forces parallèles (§ 124) à une droite XX′ parallèle à la corde AB et passant par le centre O du polygone régulier dont le contour AIB fait partie. La résultante de toutes les forces parallèles est égale à leur somme, ou au périmètre AIB. Soit L ce périmètre. Le moment de cette résultante est $L \times OG$. Le moment de la composante appliquée en *i* est

$ab \times ij = l \times y$, en appelant l la longueur du côté ab et y la distance ij. Le théorème des moments donnera donc

$$L \times OG = \Sigma(l \times y),$$

le signe Σ indiquant une somme qui s'étend à tous les côtés du polygone donné.

Or, si l'on mène la ligne aa' parallèle à OY et ba' parallèle à XX', les triangles semblables Oij et $aa'b$ donneront

$$\frac{a'b}{ab} = \frac{ij}{Oi},$$

ou, en appelant l' la projection de ab sur XX' et r le rayon Oi du cercle inscrit dans le polygone donné,

$$\frac{l'}{l} = \frac{y}{r},$$

d'où

$$l \times y = l' \times r;$$

donc

$$L \times OG = \Sigma(l' \times r);$$

et, comme le facteur r est le même dans tous les termes de la somme Σ, on peut le faire sortir du signe Σ et écrire

$$L \times OG = r\Sigma l' = r \times A'B' = r \times AB$$

ou

$$OG = \frac{r \times AB}{L},$$

expression facile à construire. Il suffit de construire un triangle rectangle B'MM' dont la hauteur MM' soit égale à r et dont l'hypoténuse B'M' soit égale à la longueur L du contour donné. Si l'on porte sur cette hypoténuse $B'c = AB$, le centre de gravité cherché G se trouvera sur une parallèle à XX' menée par c; car, si l'on abaisse cc' perpendiculaire sur XX',

$$\frac{cc'}{MM'} = \frac{B'c}{B'M'},$$

ou

$$\frac{cc'}{r} = \frac{AB}{L},$$

d'où

$$cc' = \frac{AB \times r}{L} = OG$$

§ 132.

Arc de cercle. — La construction précédente étant applicable, quelque petits que soient les côtés du polygone régulier, elle s'appliquera encore à la limite, lorsque ce polygone se confondra avec un arc de cercle.

Si donc (*fig.* 48, *Pl.* *X*) G est le centre de gravité de l'arc de cercle AIB, de longueur L et de rayon r, on aura

$$OG \times L = r \times AB,$$

d'où

$$OG = \frac{r \times AB}{L}.$$

On peut construire le point G, soit par le procédé indiqué ci-dessus, soit par celui qui suit : sur la tangente au milieu I de l'arc, portons une longueur IB′ égale au demi-arc IB rectifié. Joignons le point B′ au point O; en B, menons une perpendiculaire à AB jusqu'à sa rencontre en C avec OB′; enfin de C abaissons une perpendiculaire CG sur le rayon OI. Le point G sera le centre de gravité cherché; car

$$\frac{OG}{OI} = \frac{CG}{IB'},$$

ou

$$\frac{OG}{r} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}L} = \frac{AB}{L},$$

d'où

$$OG = \frac{r \times AB}{L}.$$

Centre de gravité des aires planes.

§ 133.

On appelle *diamètre* d'une ligne plane le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée.

Quand un diamètre est rectiligne, sa direction et celle des cordes qu'il divise en parties égales sont dites *conjuguées*.

Théorème. — *Lorsqu'une courbe plane fermée admet un dia-*

mètre rectiligne, le centre de gravité de l'aire de cette courbe se trouve sur ce diamètre.

Soit (*fig.* 49, *Pl. X*) xy une droite, lieu des milieux des cordes ac parallèles à une direction fixe.

Traçons une série de cordes telles que ac, parallèles à cette direction et très voisines les unes des autres. Par les extrémités a et c de chacune d'elles, abaissons des perpendiculaires ab et cd sur la corde voisine $a'c'$; nous formerons ainsi une série de rectangles tels que $abcd$.

La figure formée par l'ensemble de ces rectangles est d'autant moins différente de la figure donnée que les cordes ac, $a'c'$, ... sont plus voisines, et, si elles se rapprochent indéfiniment, la somme des aires des rectangles se rapprochera indéfiniment de l'aire de la figure donnée. Or chacun de ces rectangles (§ 128) a son centre de gravité sur le diamètre xy. Donc (§ 121, *Remarque I*) le centre de gravité de la figure formée par l'ensemble des rectangles est sur la même ligne. Comme il en est ainsi, quelque voisines que soient les cordes ac, $a'c'$, cette propriété appartiendra aussi à l'aire donnée, vers laquelle tend indéfiniment celle formée par l'ensemble des bandes rectangulaires.

§ 134.

Centre de gravité de l'aire d'un parallélogramme. — Il résulte de là immédiatement que le centre de gravité de l'aire d'un parallélogramme EFGH (*fig.* 47, *Pl. X*) est son centre de figure; car les deux diamètres AB et CD parallèles aux côtés du parallélogramme et passant par son centre devant tous deux contenir le centre de gravité cherché, celui-ci est leur point d'intersection.

§ 135.

Centre de gravité de l'aire du triangle. — Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est au point d'intersection de ses trois médianes, c'est-à-dire au tiers de chacune d'elles. Chaque médiane, en effet, est un diamètre, puisqu'elle divise en parties égales les cordes parallèles au côté du triangle au milieu duquel elle aboutit.

§ 136.

APPLICATION DE LA MÉTHODE GÉNÉRALE A LA RECHERCHE DU CENTRE DE GRAVITÉ DE L'AIRE D'UN POLYGONE OU D'UNE COURBE QUELCONQUE. — Pour appliquer au centre de gravité des aires planes la méthode du § 127, s'il s'agit de l'aire d'un polygone, on le décomposera en triangles. Au centre de gravité de chaque triangle, on supposera appliquée une force proportionnelle à son aire, toutes ces forces étant parallèles; elles devront d'ailleurs toutes avoir même sens ou des sens différents suivant que l'aire du polygone sera composée de la somme arithmétique ou de la somme algébrique des aires des triangles. Si tous les triangles sont à additionner, toutes les forces appliquées en leurs centres de gravité devront avoir même sens; si quelques-uns sont à additionner et d'autres à retrancher, ce qui peut avoir lieu notamment dans les polygones présentant des angles rentrants, les forces appliquées aux centres de gravité de ces derniers devront avoir un sens contraire à celui des autres. Pour représenter les aires des triangles par des forces ou des longueurs, il suffit d'ailleurs de les réduire (§ 15) à une base commune arbitrairement choisie. Les forces à appliquer aux divers centres de gravité sont égales ou proportionnelles aux hauteurs correspondantes.

§ 137.

Quadrilatère. — Appliquons cette règle à un quadrilatère quelconque ABCD (*fig.* 54, *Pl. XI*). On mènera la diagonale CD. On joindra les sommets opposés A et B au milieu I de cette diagonale.

Les points g et g' placés aux tiers des lignes IA et IB, à partir de I, sont les centres de gravité des triangles ACD et BCD. On devra y appliquer des forces proportionnelles aux aires de ces triangles, c'est-à-dire à leurs hauteurs Aa et Bb, puisqu'ils ont même base CD. Ces hauteurs sont d'ailleurs proportionnelles aux segments AO et OB de la diagonale AB, ou, si l'on veut, aux segments gi et ig' qui sont les tiers des précédents. Donc, pour avoir le centre de gravité cherché, on devra (§ 120) diviser la ligne gg' en parties inversement proportionnelles à gi et ig'. Pour cela, il

suffira de prendre, à partir du point g, une longueur $gG = g'i$; le point G est le centre de gravité cherché.

§ 138.

Trapèze. — Dans le cas du trapèze, la construction précédente peut être un peu simplifiée. Soit (*fig.* 55, *Pl. XI*) un trapèze ABCD. Divisons-le en deux triangles ACD et ABD par la diagonale AD. Menons la médiane DE du triangle ADB; le centre de gravité G_1 de ce triangle est au tiers de DE à partir de E. De même le centre de gravité G_2 du triangle ACD est au tiers de la médiane FA à partir de F. Le centre de gravité du trapèze sera donc sur la ligne G_1G_2; mais la ligne EF est une ligne diamétrale du trapèze : donc (§ 133) le centre de gravité cherché sera aussi sur cette ligne ; il se trouvera donc au point d'intersection G des lignes G_1G_2 et EF.

De là, on peut déduire une autre manière de trouver ce point : prolongez CD d'une longueur DK égale à AB, et BA d'une longueur AH égale à CD; puis menez la ligne HK; cette ligne passera par le point G. En effet, menons les lignes G_1I_1 et G_2I_2 parallèles aux bases du trapèze. Puisque G_1 est au tiers de ED, le point I_1 sera au tiers de EF ; de même le point I_2 sera au tiers de FE, en sorte que

$$I_1E = I_2F = \tfrac{1}{3}EF$$

et, par suite,

$$(b) \qquad = I_2F = I_1I_2.$$

D'un autre côté, les triangles semblables GG_1I_1, GG_2I_2 donnent

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{GI_1}{GI_2} = \frac{G_1I_1}{G_2I_2} = \frac{CD}{AB};$$

d'où

$$\frac{GI_1 + \frac{1}{2}GI_2}{GI_2 + \frac{1}{2}GI_1} = \frac{CD + \frac{1}{2}AB}{AB + \frac{1}{2}CD} = \frac{HE}{KF}$$

ou

$$\frac{2GI_1 + GI_2}{2GI_2 + GI_1} = \frac{HE}{KF}.$$

Or, d'après les relations (b), on a

$$2GI_1 + GI_2 = GE,$$
$$2GI_2 + GI_1 = GF;$$

et, par suite,

$$\frac{GE}{GF} = \frac{HE}{KF},$$

ce qui montre que la ligne KH passe bien par le centre de gravité cherché G.

§ 139.

Secteur formé par une portion de polygone régulier et secteur de cercle. — Soit ABCDE (*fig.* 53, *Pl. XI*) une portion de polygone régulier ayant son centre en O; cherchons le centre de gravité du secteur OABCDE. Pour cela décomposons-le en triangles ayant leur sommet en O. Le centre de gravité du triangle OBC, par exemple, est en *i*, aux deux tiers de la médiane OI. Si l'on construit la portion de polygone régulier *abcde* dont les sommets sont aux deux tiers des rayons aboutissant aux sommets A, B, C, ..., le centre de gravité de chaque triangle OBC sera au milieu du côté correspondant *bc* du contour *abcde*; comme d'ailleurs l'aire de ce triangle est proportionnelle à la longueur *bc*, on voit qu'on obtiendra le centre de gravité cherché en appliquant au milieu *i* de chacun des côtés du contour *abcde* une force proportionnelle à ce côté, toutes ces forces ayant même direction et même sens. Cela revient à dire que *le centre de gravité du secteur* OABCDE *coïncide avec le centre de gravité du périmètre abcde* que nous savons trouver (§ 131).

Ceci étant vrai, quelque nombreux que soient les côtés du polygone ABCDE inscrit dans l'arc de cercle AE, l'est pour cet arc lui-même. Donc : *le centre de gravité de l'aire d'un secteur de cercle coïncide avec le centre de gravité de l'arc, ayant pour rayon les deux tiers du rayon de ce secteur.*

§ 140.

Segment de cercle. — Soit (*fig.* 51, *Pl. XI*) le segment de cercle ABC; son centre de gravité est sur la ligne de symétrie OC.

Soient G_2 et Q_2 le centre de gravité et la surface du secteur OACB; G_1 et Q_1 le centre de gravité et la surface du triangle OAB. Nous savons trouver les points G_1 et G_2. Soient G le centre de

gravité du segment et Q sa surface. On a

$$Q = Q_2 - Q_1.$$

Donc (§ 127) le centre de gravité G est le centre de deux forces parallèles, proportionnelles à Q_1 et Q_2 et de sens contraires; par suite, le point G sera sur le prolongement de G_1G_2 et dans une situation telle que

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{DH}{\text{arc}\,CB},$$

DH étant la perpendiculaire abaissée du milieu D de la corde AB sur le rayon OB.

Donc si, sur une ligne quelconque issue de G_1, on porte

$$G_1u_1 = \text{arc}\,CB,$$

et, sur une parallèle à G_1u_1 issue de G_2, une longueur

$$G_2u_2 = DH,$$

la ligne u_1u_2 rencontrera OC au centre de gravité cherché G.

§ 141.

Anneau compris entre deux arcs de cercles concentriques. — Soit (*fig.* 52, *Pl. XI*) à chercher le centre de gravité de l'anneau ABCD compris entre les arcs de cercle concentriques AB et CD. Il se trouve évidemment (§ 133) sur le rayon OI passant par le milieu des arcs AB et CD, puisque ce rayon est une ligne de symétrie. Soient G_1 et G_2 les centres de gravité des secteurs OAB et OCD, et G le centre de gravité cherché de l'anneau ABCD. Nous savons trouver les points G_1 et G_2.

On a ABCD = sect. OAB — sect. OCD. Donc (§ 127) on peut regarder le centre de gravité cherché comme étant sur la ligne d'action de la résultante de deux forces parallèles et de *sens contraires,* l'une proportionnelle à l'aire du secteur OAB appliquée en son centre de gravité G_1, l'autre proportionnelle à l'aire du secteur OCD appliquée en son centre de gravité G_2. Donc

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{\text{sect.}\,OCD}{\text{sect.}\,OAB} = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{OA}^2},$$

Joignons le point A au point J et menons C i parallèle à AJ ; on aura

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OJ}{Oi} = \frac{OC}{Oi};$$

d'où

$$\overline{OC}^2 = OA \times Oi$$

et, par suite,

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{OA \times Oi}{\overline{OA}^2} = \frac{Oi}{OA},$$

Du point G, sur une ligne quelconque, portons $G_1 u_1 = Oi$, et du point G_2, sur une parallèle à $G_1 u_1$, portons $G_2 u_2 = OA$. Joignons les points u_2 et u_1 ; la droite ainsi obtenue passera évidemment par le point cherché G.

§ 142.

Segment de parabole. — Soit (*fig.* 57, *Pl. XI*) un segment de parabole AIB. Son eentre de gravité se trouve sur le diamètre IX, conjugué à la corde AB (§ 133). Soit G ce point.

Rapportons la parabole au diamètre IX et à la tangente conjuguée IY, et soit

$$y^2 = 2px$$

son équation.

Prenons une zone $\alpha\beta\alpha'\beta'$ ayant une épaisseur dx comptée parallèlement à IX. Soit x l'abscisse de la ligne $\alpha\beta$. On aura

$$\alpha\beta = 2\sqrt{2px}.$$

L'aire AIB sera proportionnelle à

$$2\int dx\sqrt{2px},$$

son moment relatif à IY proportionnel à

$$GI \times 2\int dx\sqrt{2px}.$$

Le moment de la zone $\alpha\beta\alpha'\beta'$ sera proportionnel à

$$x \times dx \times 2\sqrt{2px} = 2x\,dx\sqrt{2px}.$$

Donc le théorème des moments donnera

$$GI \times 2\int dx\sqrt{2px} = \int 2x\,dx\sqrt{2px};$$

ou, en supprimant le facteur commun $2\sqrt{2p}$,

$$GI = \frac{\int x^{\frac{3}{2}}\,dx}{\int x^{\frac{1}{2}}\,dx},$$

les intégrales étant à prendre de I à C, ce qui donne

$$GI = \tfrac{3}{5}\,IC.$$

Centre de gravité des surfaces courbes ou polyédrales.

§ 143.

APPLICATION DE LA MÉTHODE GÉNÉRALE A LA RECHERCHE DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UNE SURFACE COURBE OU POLYÉDRALE. — Nous savons, par ce qui précède, trouver le centre de gravité de chacune des faces planes d'un polyèdre. Si, en ces centres de gravité, on suppose appliquées des forces parallèles et de même sens, proportionnelles aux aires de ces faces, le centre de ces forces parallèles que l'on sait trouver graphiquement (§ 121) sera le centre de gravité cherché.

Si l'on a à chercher le centre de gravité d'une surface courbe plus ou moins irrégulière, on y substituera la surface d'un polyèdre inscrit d'un grand nombre de faces et l'on procédera comme il vient d'être dit.

Appliquons cette marche à quelques exemples.

§ 144.

Surface latérale d'une pyramide ou d'un cône. — *Le centre de gravité de la surface latérale d'une pyramide régulière ou d'un cône de révolution coïncide avec le centre de la section faite dans la pyramide ou le cône, parallèlement à sa base et au tiers de sa hauteur à partir de cette base.*

En effet, la surface latérale d'une pyramide se compose de triangles : pour avoir son centre de gravité, on devra, aux centres de gravité de ces triangles, appliquer des forces parallèles, proportionnelles à leurs aires et chercher le centre de ces forces parallèles;

mais le centre de gravité de chacun de ces triangles est (§ 130) au milieu de la ligne d'intersection que détermine dans ce triangle un plan sécant parallèle à la base de la pyramide et placé au tiers de sa hauteur : le centre de gravité de la pyramide est donc dans ce plan; il est d'ailleurs évidemment sur la ligne qui joint le sommet de la pyramide au centre de sa base, laquelle ligne passe par les centres de toutes les sections parallèles à la base.

Cela étant vrai pour une pyramide à un nombre quelconque de faces, inscrite dans un cône de révolution, est encore vrai pour un tel cône.

§ 145.

Centre de gravité de la surface latérale d'un tronc de pyramide ou de cône à bases parallèles. — *Le centre de gravité de la surface latérale d'un tronc de pyramide régulier ou de cône à bases parallèles coïncide avec le centre de gravité du périmètre d'une section parallèle aux bases et distante de la base inférieure d'une fraction de la hauteur du tronc, représentée par* $\frac{p+2p'}{3(p+p')}$, *p étant le périmètre de la base inférieure, et p' celui de la base supérieure.*

En effet, la surface latérale d'un tronc de pyramide se compose de trapèzes. Aux centres de gravité des aires de ces trapèzes, on devra appliquer des forces qui leur sont proportionnelles et chercher le centre de ces forces parallèles et de même sens. Soient (*fig.* 56, *Pl. XI*) $BB' = b$ et $AA' = a$ les deux bases parallèles de l'un de ces trapèzes, b étant un côté de la base inférieure et a un côté de la base supérieure du tronc; le centre de gravité G de ce trapèze se trouve au milieu d'une parallèle DD' à sa base, divisant (§ 138) sa hauteur ou ses côtés non parallèles en parties, qui sont dans le rapport

$$2a+b:2b+a,$$

en sorte que

$$\frac{D'B'}{D'A'} = \frac{2a+b}{2b+a}$$

ou

$$\frac{A'D'}{A'B'} = \frac{2a+b}{3(a+b)} = \frac{2p'+p}{3(p+p')}.$$

Mais de même le centre de gravité G′ du trapèze, formant la face A′B′A″B″, contiguë à la précédente, dont les bases parallèles sont A′A″ et B′B″, est au milieu d'une ligne parallèle aux bases et issue d'un point D″, tel que

$$\frac{D''B''}{A''B''} = \frac{2p'+p}{3(p+p')}.$$

Cela montre que, si l'on imagine une section parallèle aux bases et distante de la base inférieure d'une fraction $\frac{p+2p'}{3(p+p')}$ de la hauteur du tronc, les centres de gravité des faces de la pyramide sont aux milieux des côtés du polygone d'intersection de ce plan avec la surface latérale du tronc : le centre de gravité cherché se trouve donc dans ce plan; il est d'ailleurs évidemment sur la ligne qui joint les centres des bases de la pyramide, laquelle est une ligne de symétrie qui passe par les centres de toutes les sections parallèles aux bases.

Cela étant vrai pour une pyramide à un nombre quelconque de faces, inscrite dans un tronc de cône, l'est encore pour un tel tronc.

Dans le cas du tronc de cône, on a

$$\frac{p+2p'}{3(p+p')} = \frac{d+2d'}{3(d+d')},$$

en appliquant d et d' les diamètres des cercles des bases.

Remarque. — Si le tronc de pyramide ou de cône se change en un tronc de prisme ou de cylindre, c'est-à-dire si $p = p'$, alors le rapport

$$\frac{p+2p'}{3(p+p')} = \frac{3p}{3\times 2p} = \frac{1}{2},$$

ce qui doit être; car il est facile de voir d'une manière générale que *le centre de gravité de la surface latérale d'un prisme ou d'un cylindre, droit ou oblique, à bases parallèles, coïncide avec le centre de gravité du périmètre de la section passant au milieu de sa hauteur.*

§ 146.

Calotte sphérique et zone sphérique. — *Le centre de gravité d'une zone sphérique se trouve au milieu de la ligne qui joint les centres de ses bases.*

Il se trouve évidemment sur cette ligne qui est une ligne de symétrie, et si l'on imagine la zone divisée par des plans équidistants et parallèles à ses bases, toutes ces zones ont même surface; d'où l'on conclut immédiatement le théorème énoncé.

Centre de gravité des corps.

§ 147.

THÉORÈME. — *S'il existe, à l'intérieur d'un corps, une ligne droite telle qu'une série de sections parallèles à un plan fixe faites dans ce corps aient les centres de gravité de leurs aires sur cette ligne, le centre de gravité du volume du corps s'y trouvera également.*

En effet, soit (*fig.* 49, *Pl. X*) xy une ligne contenant les centres de gravité des aires des sections faites dans un corps, parallèlement à un plan fixe. Menons une série de ces sections telles que ac, $a'c'$, ... très voisines les unes des autres, et par les points du contour de chacune abaissons des perpendiculaires sur la section voisine : nous formerons ainsi une série de cylindres droits, tels que $acbd$; le corps formé par ces cylindres juxtaposés sera d'autant moins différent de celui que nous considérons que les sections ac, $a'c'$, ... seront plus voisines les unes des autres. Or le centre de gravité du volume de chacun des cylindres droits $acbd$ est au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des surfaces de ses bases, c'est-à-dire sur la ligne xy; cela résulte de l'idée même qu'on se fait du centre de gravité d'une surface plane. Donc le centre de gravité du corps formé par l'ensemble des cylindres est aussi sur la ligne xy, et, comme on peut rendre ce corps aussi peu différent qu'on le veut de celui que l'on considère en menant les sections ac, $a'c'$, ... suffisamment voisines les unes

des autres, il s'ensuit que le centre de gravité de ce dernier corps est moins éloigné de xy qu'une quantité appréciable si petite qu'elle soit; cela veut dire qu'il est rigoureusement sur cette ligne.

Remarque. — S'il existe une seconde ligne droite, lieu des centres de gravité d'une série de sections parallèles, elle contient aussi le centre de gravité du corps. D'où ce théorème de Géométrie : *Si à l'intérieur d'une surface il existe plusieurs lignes droites dont chacune soit le lieu des centres de gravité des aires d'une série de sections parallèles faites dans ce corps, toutes ces lignes se coupent nécessairement en un même point.*

§ 148.

Centre de gravité d'un tétraèdre. — *Le centre de gravité d'un tétraèdre est sur la ligne qui joint un quelconque de ses sommets au centre de gravité de la face opposée, et au quart de cette ligne à partir de cette face.*

Soit (*fig.* 58, *Pl. XI*) le tétraèdre ABCD. Joignons le sommet A au centre de gravité g de la face opposée BCD. La ligne Ag est évidemment le lieu des centres de gravité des aires des sections parallèles à BCD, faites dans le tétraèdre. Donc (§ 147) elle contient le centre de gravité de celui-ci. Par la même raison, ce centre de gravité G se trouve sur la ligne Cg' joignant tout autre sommet C du tétraèdre au centre de gravité g' de la face opposée. D'où l'on conclut ce théorème de Géométrie :

Les quatre lignes qui joignent les sommets d'un tétraèdre aux centres de gravité des faces opposées se coupent en un même point.

C'est ce qu'il est facile de voir géométriquement, et alors on reconnaît, en outre, que le point de rencontre G des quatre lignes dont il s'agit est au quart de chacune d'elles à partir de la face à laquelle elle aboutit. Soit, en effet, I le milieu de l'arête BD du tétraèdre; joignons le point I aux deux sommets C et A. Le centre de gravité g du triangle BCD est au tiers de la médiane CI à partir

du point I; le centre de gravité g' du triangle BDA est au tiers de la médiane AI à partir du même point I. Donc les deux lignes Ag et Cg' sont dans un même plan AIC et se coupent en un point G; de plus, puisque

$$\frac{Ig}{gC} = \frac{Ig'}{g'A} = \frac{1}{3},$$

la ligne gg' est parallèle à l'arête AC, et les deux triangles semblables gg'G et ACG donnent

$$\frac{gG}{GA} = \frac{gg'}{AC} = \frac{Ig}{IC} = \frac{1}{3},$$

d'où

$$\frac{gG}{gA} = \frac{1}{4},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire I. — Le centre de gravité d'un tétraèdre est le centre des moyennes distances de ses quatre sommets, c'est-à-dire que sa distance à un plan quelconque est la moyenne arithmétique entre les distances de ses sommets au même plan. En effet, le poids du tétraèdre appliqué en G peut être décomposé en deux forces parallèles et de même sens, l'une appliquée en A et l'autre en g; et, comme $Gg = \frac{1}{3}AG$, si la composante passant en A est Q, celle passant en g sera (§ 120) 3Q; mais celle-ci peut à son tour être décomposée en deux forces appliquées l'une en C, l'autre en I, et, comme $Ig = \frac{1}{2}gC$, la force appliquée en I sera double de celle appliquée en C, c'est-à-dire que celle-ci sera Q et celle appliquée en I sera 2Q et pourra être remplacée par deux forces égales chacune à Q, appliquées en B et D. Donc le poids du tétraèdre se trouvera décomposé en quatre poids Q égaux entre eux, appliqués en ses sommets.

Soient a, b, c, d les distances de ces sommets à un plan quelconque, et ξ la distance au même plan du point G; le théorème des moments appliqué aux poids 4Q du tétraèdre donne

$$4Q\xi = Qa + Qb + Qc + Qd$$

ou

$$\xi = \frac{1}{4}(a + b + c + d).$$

Corollaire II. — De la démonstration qui précède, il résulte

aussi que le centre de gravité d'un triangle est le centre des moyennes distances de ses trois sommets.

Corollaire III. — Le centre de gravité d'un tétraèdre coïncide avec le centre de gravité de l'aire du triangle que détermine, dans le tétraèdre, une section distante d'une de ses faces du quart de la hauteur correspondante.

Corollaire IV. — Le centre de gravité d'un tétraèdre jouit encore de la propriété d'être au milieu de la ligne qui joint les milieux de deux arêtes opposées quelconques du tétraèdre. En effet, joignons le point I, milieu de l'arête BD, au centre de gravité G. La ligne IG, étant dans le plan AIC, ira rencontrer l'arête AC opposée à BD, ainsi que sa parallèle gg'. Soient I′ et i les points de rencontre avec ces deux lignes : il est clair que i sera le milieu de gg' et I′ le milieu de AC; car les triangles semblables Gig et AGI′ donnent

$$\frac{gi}{AI'} = \frac{Gi}{GI'};$$

de même, les triangles $g'i$G et GI′C donnent

$$\frac{g'i}{CI'} = \frac{Gi}{GI'};$$

d'où

$$\frac{gi}{AI'} = \frac{g'i}{CI'} \quad \text{ou} \quad \frac{AI'}{CI'} = \frac{gi}{g'i}. \tag{1}$$

On établirait de même, au moyen des triangles semblables IAI′ et Iig' d'une part, ICI′ et Iig de l'autre,

$$\frac{gi}{CI'} = \frac{g'i}{AI'} \quad \text{ou} \quad \frac{CI'}{AI'} = \frac{gi}{g'i},$$

ou, à cause de (1),

$$\frac{CI'}{AI'} = \frac{AI'}{CI'},$$

ce qui exige que CI′ = AI′.

Ainsi la ligne II′ joint bien les milieux I et I′ de deux arêtes opposées AC et BD. Je dis maintenant que G est le milieu de cette ligne. En effet,

$$\frac{Gi}{G'I} = \frac{ig}{CI'} = \frac{Ig}{IC} = \frac{1}{3}$$

ou

$$G\iota = \frac{1}{3} GI'.$$

D'ailleurs,

$$\frac{I\iota}{iI'} = \frac{Ig}{gC} = \frac{1}{2}$$

ou

$$Ii = \frac{1}{2} iI' = \frac{1}{2} GI' + \frac{1}{2} G\iota = \frac{1}{2} GI' + \frac{1}{6} GI'.$$

Par conséquent,

$$GI = Gi + Ii = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) GI' = GI'.$$

§ 149.

On peut voir, par des considérations mécaniques très simples, que le centre de gravité du tétraèdre est au milieu de la ligne qui joint les milieux de deux arêtes opposées.

Soit le tétraèdre ABCD (*fig.* 59, *Pl. XII*). Coupons-le par des plans parallèles aux arêtes opposées CD et AB. Ces plans détermineront, sur les faces du tétraèdre, des parallélogrammes, tels que $abcd$, $a_1 b_1 c_1 d_1$, dont les côtés sont parallèles à CD et AB. Les centres de ces parallélogrammes sont évidemment sur la ligne II' qui joint les milieux des arêtes CD et AB. Donc (§ 147) le centre de gravité du volume du tétraèdre se trouve sur cette ligne.

De plus, ces parallélogrammes ayant tous même angle, leurs aires sont entre elles comme les produits de leurs côtés, en sorte que

$$\frac{\text{aire } abcd}{\text{aire } a_1b_1c_1d_1} = \frac{ab \times db}{a_1b_1 \times d_1b_1}.$$

Or

$$\frac{ab}{a_1 b_1} = \frac{Cb}{Cb_1},$$

$$\frac{bd}{b_1 d_1} = \frac{Bb}{Bb_1};$$

donc

$$\frac{\text{aire } abcd}{\text{aire } a_1b_1c_1d_1} = \frac{ab \times db}{a_1b_1 \times d_1b_1} = \frac{Cb \times Bb}{Cb_1 \times Bb_1},$$

c'est-à-dire que les aires des parallélogrammes sont entre elles comme les produits des deux segments que leurs plans déterminent sur une arête CB. Donc, si l'on prend deux parallélogrammes tels

que *abcd* et *a'b'c'd'*, également distants des sommets C et B, ils sont équivalents, parce que $Cb = Bb'$ et, par suite, $Bb = Cb'$.

D'où

$$\frac{Cb \times Bb}{Cb' \times Bb'} = 1.$$

Il résulte de là que, si l'on considère deux plaques infiniment minces, d'égale épaisseur, ayant ces parallélogrammes pour bases, ces plaques auront même volume et même poids, et le centre de gravité de l'ensemble des deux sera dans un plan équidistant de l'une et de l'autre, c'est-à-dire équidistant des sommets C et B. Comme il est sur la ligne II', il sera donc au milieu de cette ligne. Il en est de même de toutes les plaques que l'on considérera ainsi deux par deux, et par suite aussi du volume formé par l'ensemble de toutes ces plaques; et, comme ce volume peut être rendu aussi voisin que l'on veut du volume du tétraèdre si les plaques sont prises suffisamment minces, le centre de gravité du tétraèdre se trouvera lui-même au milieu de la ligne II'.

De là, on déduirait ce théorème de Géométrie démontré directement plus haut :

Les quatre lignes qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre se croisent en un même point, qui est le milieu de chacune d'elles.

§ 150.

Pyramides et cônes. — *Le centre de gravité du volume d'une pyramide ou d'un cône à base quelconque coïncide avec le centre de gravité de l'aire d'une section parallèle à la base faite au quart de la hauteur de la pyramide ou du cône, à partir de cette base.*

En effet, menons les diagonales issues de l'un des sommets du polygone de base d'une pyramide, et décomposons celle-ci en tétraèdres au moyen de plans passant par ces diagonales et par le sommet de la pyramide. Le centre de gravité de chacun de ces tétraèdres coïncide (§ 148, *Coroll. II*) avec le centre de gravité du triangle que détermine, dans ce tétraèdre, une section parallèle à

la base de la pyramide placée au quart de sa hauteur, à partir de cette base. De plus, le volume du tétraèdre est proportionnel à l'aire de ce même triangle. Donc, pour avoir le centre de gravité de la pyramide, il suffit, au centre de gravité de chacun de ces triangles, d'appliquer une force proportionnelle à son aire et de chercher le centre de toutes ces forces parallèles; ceci revient à dire qu'il faut chercher le centre de gravité de l'aire du polygone que le plan sécant détermine dans la pyramide.

Ceci étant vrai, quelque nombreuses que soient les faces d'une pyramide inscrite dans un cône quelconque, l'est aussi pour un tel cône.

§ 151.

Tronc de pyramide et tronc de cône à bases parallèles. — Soit (*fig* 60, *Pl. XII*) un tronc de pyramide à bases parallèles ABCDE*abcde*. Prolongeons le tronc de façon à compléter la pyramide. Soit S son sommet; soient G_2 et G_1 les centres de gravité des pyramides SABCDE et S*abcde*; Q_2 et Q_1 leurs volumes. Les points G_2 et G_1 sont sur la ligne qui joint le sommet S aux centres de gravité g_2 et g_1 des bases et au quart des hauteurs Sg_2 et Sg_1, à partir de ces bases.

Le centre de gravité du tronc cherché se trouvera donc aussi sur cette ligne. Si Q est le volume du tronc, on aura

$$Q = Q_2 - Q_1.$$

Donc (§ 127), pour obtenir le centre de gravité G, il suffit, aux centres de gravité G_2 et G_1, d'appliquer des forces proportionnelles à Q_2 et Q_1, parallèles et de *sens contraires,* et de chercher le centre de ces forces parallèles. Le point G sera donc tel (§ 120) que

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\overline{Sa}^3}{\overline{SA}^3}.$$

D'après cela, menons du point S une ligne quelconque SX, et décrivons les arcs de cercle AA' et *aa'* ayant le point S pour centre. Menons les lignes antiparallèles A*a'* et A'*a*; prenons sur SX une longueur quelconque S1; menons 11' parallèle à A*a'*; 1'2 parallèle

à aA', et $22'$ parallèle à Aa. On aura

$$\frac{S1}{S1'} = \frac{Sa'}{SA} = \frac{Sa}{SA},$$

$$\frac{S1'}{S2} = \frac{Sa}{SA'} = \frac{Sa}{SA},$$

$$\frac{S2}{S2'} = \frac{Sa'}{SA} = \frac{Sa}{SA};$$

d'où, en multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs,

$$\frac{S1}{S2'} = \frac{\overline{Sa}^3}{\overline{SA}^3} = \frac{GG_2}{GG_1}.$$

Donc, si, au point G, on mène une ligne de direction arbitraire $G_1 u_1 = S2'$, et au point G_2 une parallèle à la précédente, $G_2 u_2 = S1$, et qu'on joigne les points u_1 et u_2, la ligne $u_1 u_2$ ira rencontrer la ligne $G_1 G_2$ au point cherché G.

Rien absolument n'est changé si, au lieu d'un tronc de pyramide, c'est un tronc de cône qui est donné. On prolongera deux arêtes quelconques du tronc jusqu'à leur rencontre en S, et l'on opérera sur l'une d'elles la construction faite sur SA et Sa.

§ 152.

Polyèdre quelconque. — Tout polyèdre pouvant être décomposé en pyramides ou en tétraèdres, on peut trouver maintenant le centre de gravité du volume d'un polyèdre quelconque.

§ 153.

Secteur sphérique. — *Le centre de gravité du volume d'un secteur sphérique est le centre de gravité de la surface d'une calotte sphérique ayant même centre que le secteur donné et pour rayon les trois quarts du rayon de ce secteur.*

La démonstration est tout à fait semblable à celle relative au secteur de cercle (§ 139).

§ 154.

Portion d'enveloppe sphérique. — Considérons (*fig.* 61, *Pl. XII*) une portion d'enveloppe sphérique, engendrée par la demi-révolution de l'anneau $A_2A_1B_2B_1$ compris entre deux arcs de cercle concentriques et les normales A_2A_1 et B_2B_1 à ces arcs, autour de l'axe OC_2 passant par leurs milieux. La ligne OC_2 est une ligne de symétrie sur laquelle se trouvera le centre de gravité cherché. Soit G ce point. Soient G_2 et G_1 les centres de gravité des secteurs OA_2B_2 et OA_1B_1 que nous savons trouver; Q_2 et Q_1 leurs volumes. Le volume Q de l'enveloppe est

$$Q = Q_2 - Q_1.$$

Pour trouver son centre de gravité G, nous devons (§ 127) appliquer aux points G_2 et G_1 des forces parallèles, proportionnelles à Q_2 et Q_1, de sens contraires, et chercher le centre de ces forces parallèles. Ce point sera sur le prolongement de G_1G_2 et divisera cette ligne (§ 120) de façon que

$$\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\overline{OA_2}^3}{\overline{OA_1}^3}.$$

Menons les lignes A_2C_1 et A_1C_2. Prenons sur OA_2 une longueur arbitraire O1; menons 11′ parallèle à A_1C_2; 1′2 parallèle à C_1A_2, et 22′ parallèle à A_1C_2. On verrait, comme au § 151, que

$$\frac{O2'}{O1} = \frac{\overline{OA_2}^3}{\overline{OA_1}^3} = \frac{GG_1}{GG_2}.$$

Donc, par G_1, on mènera une ligne de direction quelconque $G_1u_1 = O2'$, et par G_2 une parallèle $G_2u_2 = O1$; la ligne u_1u_2 ira couper le rayon OC_2 au centre de gravité cherché G.

§ 155.

Segment de sphère à une base. — Soit (*fig.* 62, *Pl. XII*) un segment de sphère engendré par la demi-révolution du segment de cercle ABC autour du rayon OC passant au milieu de AB. Cette

ligne est une ligne de symétrie, sur laquelle est placé le centre de gravité cherché G.

Soient G_2 et Q_2 le centre de gravité et le volume du secteur sphérique OACB, et G_1 et Q_1 le centre de gravité et le volume du cône OAB. Nous savons trouver les points G_2 et G_1. Le volume Q du segment étant

$$Q = Q_2 - Q_1,$$

nous aurons, comme ci-dessus,

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Or le volume du cône OAB est

$$Q_1 = \frac{1}{3}\pi \overline{DB}^2 \times OD.$$

Soient $h = CD$ la hauteur du segment et r le rayon de la sphère, on aura

$$Q_1 = \frac{1}{3}\pi h(2r - h)(r - h).$$

Le volume Q_2 du secteur est

$$Q_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Donc

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi h(2r-h)(r-h)}{\frac{2}{3}\pi r^2 h} = \frac{(2r-h)(r-h}{2r^2}.$$

Prenons sur la tangente en C une longueur $CF = OD = r - h$; joignons le point F à l'extrémité E du diamètre $CE = 2r$. On aura

$$\frac{DH}{CF} = \frac{ED}{EC}$$

ou

$$\frac{DH}{r-h} = \frac{2r-h}{2r};$$

d'où

$$DH = \frac{(r-h)(2r-h)}{2r}$$

et, par suite,

$$\frac{GG_2}{GG_1} = \frac{DH}{r}.$$

Donc, si l'on prend, sur une ligne quelconque issue de G_1, G_1u_1 égal au rayon de la sphère, et sur une parallèle à cette ligne, issue de G_2, $G_2u_2 = DH$, la ligne u_1u_2 ira couper OC au centre de gravité cherché G.

§ 156.

Segment de sphère à deux bases. — Soit (*fig.* 63, *Pl. XII*) une zone sphérique engendrée par la demi-révolution du segment circulaire $A_1A_2B_1B_2$, compris entre les cordes parallèles A_1B_1, A_2B_2, autour de l'axe OM. On aura

$$\text{vol.}\,A_1A_2B_1B_2$$
$$= \text{sect.}\,OA_1MB_1 - \text{sect.}\,OA_2MB_2 + \text{cône}\,OA_2B_2 - \text{cône}\,OA_1B_1.$$

Nous savons trouver les centres de gravité des quatre corps dans lesquels le volume de la zone se trouve ainsi décomposé. Soient G_1, G_2 les centres de gravité et Q_1, Q_2 les volumes des secteurs OA_1MB_1 et OA_2MB_2; soient de même g_1 et g_2 les centres de gravité, et q_1, q_2 les volumes des cônes, en sorte que

$$\text{vol.}\,A_1A_2B_1B_2 = Q_1 - Q_2 + q_2 - q_1.$$

Le centre de gravité cherché G est (§ 127) le centre de quatre forces parallèles et proportionnelles à

$$Q_1,\ -Q_2,\ q_2 \text{ et } -q_1$$

appliquées respectivement aux points

$$G_1,\ G_2,\ g_2 \text{ et } g_1,$$

les signes *moins*, dans la désignation des forces appliquées en G_2 et g_1, indiquant que ces forces sont de sens contraire à celles appliquées G_1 et g_2.

On a, en appelant r le rayon de la sphère et posant

$$MD_1 = h_1, \quad MD_2 = h_2,$$
$$D_1B_1 = \rho_1, \quad D_2B_2 = \rho_2,$$
$$Q_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 h_1, \qquad Q_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h_2,$$
$$q_1 = \frac{1}{3}\pi\rho_1^2(r - h_1), \quad q_2 = \frac{1}{3}\rho_2^2(r - h_2).$$

Donc les forces parallèles à appliquer en

$$G_1,\ G_2,\ g_2,\ g_1$$

sont respectivement proportionnelles à

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h_1,\ -\frac{2}{3}\pi r^2 h_2,\ \frac{1}{3}\pi\rho_2^2(r-h_2),\ -\frac{1}{3}\pi\rho_1^2(r-h_1)$$

ou à

$$2h_1,\ -2h_2,\ (r-h_2)\frac{\rho_2^2}{r_2},\ (r-h_1)\frac{\rho_1^2}{r_2}.$$

Prenons sur OM une longueur $O\beta_2 = D_2B_2 = \rho_2$, et décrivons l'arc de cercle $\beta_2\beta'_2$ jusqu'à sa rencontre en β'_2 avec OA_1 ; menons les lignes $M\beta'_2$ et $A_1\beta_2$. Par D_2 conduisons une parallèle $D_2k'_2$ à $M\beta'_2$, et par k'_2 une parallèle k'_2k_2 à $A_1\beta_2$. On aura

$$\frac{OD_2}{Ok'_2} = \frac{OM}{O\beta'_2} = \frac{r}{\rho_2},$$
$$\frac{Ok'_2}{Ok_2} = \frac{OA_1}{O\beta_2} = \frac{r}{\rho_2};$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{OD_2}{Ok_2} = \frac{r^2}{\rho_2^2},$$

ou

$$Ok_2 = OD_2\frac{\rho_2^2}{r^2} = (r-h_2)\frac{\rho_2^2}{r^2}.$$

On trouvera de même, en portant sur OM et sur OA les longueurs $O\beta_1 = O\beta'_1 = D_1B_1 = \rho_1$, joignant $M\beta'_1$ et $A_1\beta_1$, et menant D_1k et k'_1k_1, parallèles à ces deux lignes,

$$Ok_1 = (r-h_1)\frac{\rho_1^2}{r^2}.$$

Donc les forces à appliquer aux points

$$G_1,\ G_2,\ g_2 \text{ et } g$$

sont proportionnelles aux lignes

$$2OD_1,\ -2OD_2,\ Ok_2 \text{ et } -Ok_1.$$

Appelons-les

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

et portons-les sur une ligne OX (*fig.* 63), parallèle à A_1B_1 à

partir de O; puis, appelant

1, 2, 3, 4

leurs lignes d'action issues de G_1, G_2, g_2 et g_1, construisons le polygone funiculaire relatif au pôle C; nous déterminerons ainsi la résultante de ces forces, résultante dont l'intersection avec OM est le centre de gravité cherché G.

§ 157.

Segment de paraboloïde. — Soit (*fig.* 57, *Pl. XI*) un segment de paraboloïde ABI. Soit IX le diamètre conjugué à la section BA. Comme IX est le lieu des centres de figure, et par suite des centres de gravité des sections faites, dans le paraboloïde parallèlement à BA, le centre de gravité G se trouvera sur cette ligne (§ 147). Soient x et y les coordonnées d'un point de la parabole BIA, relativement aux axes IX et IY. Les sections parallèles à BA étant toutes semblables entre elles, leurs aires sont comme les carrés des ordonnées de la parabole. Donc le théorème des moments relatifs au plan tangent en I donne

$$\mathrm{IG}\int y^2\,dx = \int xy^2\,dx,$$

et, comme $y^2 = 2px$,

$$\mathrm{IG}\int x\,dx = \int x^2\,dx,$$

les intégrales étant à prendre de $x = 0$ à $x = \mathrm{CI}$.

Donc

$$\mathrm{IG} = \frac{\frac{1}{3}\overline{\mathrm{CI}}^3}{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CI}}^2} = \frac{2}{3}\mathrm{IC}.$$

§ 158.

Centre de gravité d'un corps quelconque. — On inscrira, dans la surface limitant le corps, un polyèdre d'un assez grand nombre de faces pour que ce polyèdre puisse être sensiblement confondu avec le corps, et l'on en cherchera le centre de gravité par la méthode du § 152.

TROISIÈME SECTION.

APPLICATION DE LA STATIQUE GRAPHIQUE A L'ART DES CONSTRUCTIONS.

CHAPITRE XII.

APPLICATION AUX POUTRES DROITES ET PONTS SUSPENDUS PORTANT DES CHARGES FIXES.

§ 159.

REMARQUE PRÉLIMINAIRE. — Dans ce qui va suivre, nous n'emploierons plus des chiffres moulés pour désigner les lignes d'action des forces et des chiffres ordinaires pour représenter leurs grandeurs. Les deux lignes représentatives d'une force seront l'une et l'autre désignées par un même chiffre *ordinaire*. Seulement la figure formée par les lignes d'action d'un système de forces continuera à être désignée par un numéro moulé, et la figure formée par les lignes représentant les grandeurs des forces sera désignée par le numéro similaire écrit en chiffres ordinaires. De plus, dans le texte, nous continuerons à indiquer, par des chiffres moulés, les lignes de la première de ces figures et par des chiffres ordinaires les lignes de la seconde. De cette façon, aucune ambiguïté ne sera possible.

Ainsi, quand nous étudierons, par exemple, le diagramme formé par les *fig.* **65** et 65 de la *Pl. XIII*, et que nous parlerons des lignes

1, 2, 3, ...

de ce diagramme, on saura qu'il s'agit des lignes portant les numéros

1, 2, 3, ...

sur la *fig*. 65; tandis que, quand nous parlerons des lignes

1, 2, 3, ...,

on saura qu'il s'agit des lignes portant ces numéros sur la *fig*. 65.

§ 160.

POUTRES DROITES DE HAUTEUR CONSTANTE, PORTANT DES CHARGES VERTICALES UNIFORMES OU QUELCONQUES SUR LE TABLIER. — Considérons le type de poutre reposant sur deux appuis, représenté par la *fig*. 65 (*Pl. XIII*) et portant les charges verticales ayant pour lignes d'action

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

On doit d'abord chercher les réactions des appuis. Dans le cas particulier où toutes les charges seraient égales, ces réactions seraient chacune égales à la demi-somme des charges. Soient généralement 9 et 10 leurs lignes d'action. Le polygone des forces se réduit à une ligne droite qui est tracée en doubles traits sur la *fig*. 65. De ce polygone on connaît les côtés

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

On peut donc construire le polygone funiculaire de ces forces; on en arrêtera les côtés extrêmes aux droites 9 et 10. On fermera ce polygone et le rayon polaire parallèle à la droite qui le ferme déterminera, sur le polygone des forces, le point 9.10 et, par suite, les réactions 9 et 10.

Ayant ces réactions, les tensions des barres s'obtiennent (§ 96 *bis*) par la construction d'une figure réciproque.

On tracera d'abord la réciproque du nœud (10, 11, 12). C'est un triangle dont on connaît le côté 10. La barre principale 11 étant comprise entre les forces 10 et 1, sa réciproque part (96 *bis*) du sommet 10.1 du polygone des forces, tandis que, la barre principale 12 étant comprise entre les forces 10 et 9, sa réciproque part du sommet 10.9 de ce polygone. De ce sommet partiront les réciproques de toutes les barres principales supérieures, puisque toutes sont comprises entre les forces 10 et 9, et, comme elles sont en ligne droite, leurs réciproques seront elles-mêmes sur une seule droite.

Donc, par (10,1), on mène une parallèle à 11, et par (10,9) une parallèle à 12; 12 est comprimé et 11 tendu.

Passons au nœud (1, 11, 13, 14). Sa réciproque est un quadrilatère dont on connaît les côtés 1 et 11. Pour avoir 13, on remarque que 13 fait partie d'un polygone fermé (triangle), avec 11 et 12. Donc, par le point (11, 12), on mène une parallèle à 13, et par le sommet 1.2 du polygone des forces une parallèle à la barre principale 14; 13 est comprimé et 14 est tendu.

Passons au nœud (12, 13, 15, 16); on connaît les côtés 12 et 13 de son quadrilatère réciproque. Par (13, 14) on mène une parallèle à 15 (puisque 13, 14, 15 forment un triangle); quant à la réciproque de 16, nous savons qu'elle part du sommet 9.10 du polygone des forces; 16 est comprimé et 15 tendu.

En poursuivant de même, on obtiendra tout le diagramme.

Remarque I. — Les diagrammes 65 et 65 montrent ce qui suit :

1° Les barres supérieures sont toutes comprimées; les barres inférieures, toutes tendues.

Le barres inclinées sont alternativement tendues et comprimées, sauf celles 23 et 25 qui sont toutes deux tendues. Ces deux barres sont celles entre lesquelles tomberait la résultante statique des charges appliquées à la poutre.

2° Les tensions ou pressions des barres horizontales vont en croissant depuis les extrémités de la pièce jusqu'au point d'application de la résultante statique des charges.

3° Les tensions ou compressions des barres inclinées vont au contraire en diminuant depuis les extrémités jusqu'à ce point d'application.

Remarque II. — Les *fig.* 66, 66 donnent l'épure d'une poutre chargée uniformément. Les compressions, ou tensions des barres horizontales, vont en augmentant et celles des barres inclinées en diminuant, des extrémités au milieu de la pièce. Les pressions des deux barres 25 et 27 du milieu sont *nulles*.

La méthode de Culmann montre de suite qu'il doit en être ainsi. Car une section faite dans les barres 24, 25, 26 montre que les tensions de ces barres doivent équilibrer les forces 10,

1, 2, 3, 4. Le polygone de ces cinq forces se ferme *fig.* 66; donc elles forment un couple, et, comme un couple ne peut être équilibré que par un couple, les tensions de 24 et 26, qui sont parallèles, seront égales et de sens opposés et formeront le couple d'équilibre, tandis que la tension de la barre inclinée 25 sera nulle.

§ 161.

POUTRES DE HAUTEUR CONSTANTE NE PORTANT QU'UNE CHARGE CONCENTRÉE EN UN POINT DU TABLIER. — Les *fig.* 67 et 67 (*Pl. XIII*) donnent le diagramme d'une poutre de hauteur constante portant une charge concentrée en un point quelconque de son tablier, et les *fig.* 68, 68 (*Pl. XIV*) donnent le même diagramme, lorsque la charge est au milieu. Dans ce dernier cas, les réactions des appuis 2 et 3 sont chacune la moitié de la charge 1; dans le premier, elles sont données par le polygone funiculaire tracé sur le diagramme.

On déduit encore de ces diagrammes :

1° Que les barres supérieures sont toutes comprimées, les barres inférieures tendues. Ces pressions ou tensions vont en augmentant des extrémités de la pièce jusqu'au point d'application de la charge.

2° Les barres inclinées sont alternativement tendues et comprimées, sauf les deux contiguës à la charge, lesquelles sont toutes deux tendues. Ces pressions ou tensions vont en diminuant depuis les extrémités de la pièce jusqu'au point d'application de la charge.

Remarque. — Les constructions précédentes ne supposent en rien que les étrésillons et contre-étrésillons soient symétriques. Elles s'appliquent, quelles que soient les inclinaisons de ces pièces, et en particulier quand certaines d'entre elles sont verticales. Nous retrouverons ce cas, qui se présente fréquemment dans la pratique, à l'occasion des ponts suspendus rigides.

§ 162.

POUTRE DROITE DE HAUTEUR VARIABLE PORTANT DES CHARGES VERTICALES QUELCONQUES. — Soit (*fig.* 70, *Pl. XIV*) une poutre de hauteur

variable reposant sur deux appuis. Elle est formée de poinçons verticaux, d'étrésillons et contre-étrésillons symétriquement placés par rapport au milieu de la pièce. Elle est soumise aux forces verticales

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

Nous construirons les deux réactions verticales 1 et 9, comme il a été fait précédemment.

Ces forces connues, d'un point a (*fig.* 70), portons bout à bout les forces à partir de la première en suivant (§ 96 *bis*) le pourtour de la charpente. Nous aurons le polygone

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16

qui se fermera, c'est-à-dire que nous reviendrons nécessairement au point a.

Cela posé, nous construisons le triangle réciproque du nœud (1, 17, 18). A cet effet, suivant la méthode générale du § 96 *bis*, par le sommet 1.2 du polygone des forces nous menons une parallèle à la barre principale 18, et par le sommet 1.16, une parallèle à la barre principale 17.

Nous passons ensuite au nœud (16, 17, 19, 20) dont la figure réciproque est un quadrilatère. Nous connaissons les côtés 16 et 17 de ce quadrilatère.

La réciproque de la barre principale 20 comprise entre les forces 16 et 15 part du sommet 16.15 du polygone des forces et la réciproque de 19 concourt avec les lignes 17 et 18 comme formant un triangle avec 17 et 18.

Passons ensuite au nœud (2, 18, 19, 21, 22), qui est, lui, formé de cinq lignes et a pour réciproque un pentagone. On connaît les trois côtés 2, 18 et 19 de ce pentagone. La réciproque de la barre principale 22 part du sommet 2.3 du polygone des forces, et la réciproque de 21 passe par le point de concours de 19 et 20.

On passe ensuite au nœud (15, 20, 21, 23, 24) dont on connaît toutes les lignes réciproques, sauf celles des deux dernières. Pour les obtenir, par (14, 15), on mènera une parallèle à 24, et par (21, 22) une parallèle à 23.

On continuera ainsi jusqu'au nœud (4, 26, 27, 29, 30). Si de celui-ci on passait au nœud (13, 28, 29, 31, 33, 34), on ne pourrait pas le construire. Cela tient à ce qu'il contient une ligne de

plus que tous les autres. On ne connaît les réciproques que des trois premières des six lignes qui le composent, et le problème consistant à compléter le polygone serait indéterminé.

On construira donc d'abord la figure réciproque du nœud (5,30, 31, 32), qui, lui, contient au contraire une ligne de *moins* que les précédents et admet pour réciproque un quadrilatère dont on connaît les deux côtés, 5 et 30. Pour avoir les deux autres, par (29, 30) on mènera une parallèle à 31, et par (5, 6) une parallèle à 32.

Alors on pourra passer au nœud à six côtés (13, 28, 29, 31, 33, 34) dont on connaîtra toutes les lignes réciproques, sauf les deux dernières, et l'on poursuivra les constructions sans difficultés sur la seconde moitié de la pièce.

Si les charges sont symétriques, on pourra évidemment se dispenser de cette partie des opérations.

§ 163.

PONTS SUSPENDUS RIGIDES. — Soit (*fig.* 71, *Pl. XV*) une chaîne de pont suspendu réunie à son tablier, non par de simples montants verticaux, mais au moyen de tringles inclinées qui fassent, du tout, un système rigide. (Cela n'empêchera pas qu'il soit bon d'établir la chaîne en forme de polygone funiculaire, comme si elle était déformable.)

On donne les forces verticales agissant sur la chaîne

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

et celles qui agissent sur le tablier

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

On connaît les tensions suivant les lignes extrêmes 9 et 17 du polygone funiculaire formant la chaine, par le tracé même de ce polygone.

On voit qu'ici ces tensions, qui sont les analogues de ce qui, dans les ponts à poutres droites, constitue les réactions des appuis, sont inclinées. Le polygone des forces ne sera donc plus, comme au paragraphe précédent, une simple ligne verticale.

Pour le former, on portera (*fig.* 71), sur une ligne verticale et bout à bout, les forces 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; au bout de 8 on portera la force inclinée 9; puis au bout de 9, les forces verticales 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, et enfin la ligne 17 fermera le polygone des forces.

Pour tracer le quadrilatère réciproque du nœud (**1**, **17**, **18**, **19**), dont les deux premiers côtés sont connus, par le sommet 1.2 du polygone des forces, on mènera une parallèle à la barre principale **19**, et par celui 16.17, une parallèle à **18**.

On passe ensuite à la réciproque du nœud (**16**, **18**, **20**, **21**) dont on connaît les deux lignes 16 et 18. Les lignes **18**, **19**, **20** forment un triangle; donc par (18, 19) on mènera une parallèle à **20**, et par (15, 16) une parallèle à **21**, et ainsi de suite.

§ 164.

AUTRE EXEMPLE DE PONT SUSPENDU RIGIDE. — On voit (*fig.* **72**, 72, *Pl. XV*) un autre exemple de pont suspendu rigide, dans lequel les montants verticaux qui soutiennent le tablier sont renforcés par des étrésillons symétriquement placés par rapport au milieu.

On suppose, pour montrer la forme que prend, dans cette nouvelle hypothèse, le diagramme réciproque, que les charges verticales ne portent que sur le tablier. Le polygone des forces se réduit alors à un triangle.

§ 165.

PONT SUSPENDU ORDINAIRE. — La *fig.* **73**, 73 (*Pl. XV*) représente un pont suspendu non rigide dont le tablier est simplement soutenu par des barres verticales. La chaîne est un polygone funiculaire dont le pôle est le point de concours **O** des lignes de la *fig.* 73. Le polygone des forces est indiqué en lignes doubles.

CHAPITRE XIII.

APPLICATION AUX ARCS APPUYÉS AVEC OU SANS ENCASTREMENT. ÉTUDE PUREMENT STATIQUE ET SOLUTION DE PREMIÈRE APPROXIMATION.

§ 166.

RECHERCHE DES TENSIONS QUAND LES RÉACTIONS DES APPUIS SONT SUPPOSÉES CONNUES. — Supposons d'abord que, par un moyen quelconque, on ait réussi à trouver les réactions des appuis et considérons l'arc avec son tympan (*fig.* 74, *Pl. XVI*) (¹).

Il est soumis :

1° Aux forces verticales 1, 2, 3, . . . , 12, agissant sur le tablier;

2° A celles 14, 15, 16, . . . , 26, agissant sur l'arc;

3° Aux réactions des culées 27 et 13. Le polygone des forces est représenté, comme toujours, par des doubles lignes (*fig.* 74).

1° On construira le quadrilatère réciproque du nœud (26, 27, 28, 29) dont on connaît les deux côtés 26 et 27. Suivant la règle du § 96 *bis*, par (25, 26) on mènera une parallèle à 29, et par (27, 1) une parallèle à 28.

2° On passera ensuite au nœud (1, 28, 30, 31); la réciproque de ce nœud est un quadrilatère dont on connaît les côtés 1 et 28. Par (28, 29) on mènera une parallèle 30, et par (1, 2) une parallèle à 31.

La réciproque du nœud (25, 29, 30, 32, 33) est un pentagone dont on connaît les trois côtés 25, 29, 30.

Par (30, 31) on mènera une parallèle à 32; par (24, 25) une parallèle à 33. De là on passera au nœud (2, 31, 32, 34, 35), et ainsi de suite.

(¹) Type emprunté à M. Fleeming Jenkin.

Il est à peine besoin de faire ressortir à quels calculs inextricables on serait amené si l'on voulait résoudre, par la Statique ordinaire, le problème qui fait l'objet de ce paragraphe.

Remarque. — Le pont d'Arcole, sur la Seine, à Paris, est fait suivant le type que représente la *fig.* 73, sauf quelques barres additionnelles qui évidemment, dans la pensée des auteurs de ce bel Ouvrage, sont moins destinées à contribuer à la résistance générale qu'à empêcher les barres principales de fléchir.

§ 167.

VALEURS DE PREMIÈRE APPROXIMATION DE LA POUSSÉE D'UN ARC. — Le tracé qui précède suppose connues les réactions des appuis. La recherche des réactions des appuis d'un arc réticulaire ou non fera l'objet d'un des problèmes les plus importants de la seconde Partie de cet Ouvrage. Nous allons donner ici à cet égard quelques règles plutôt empiriques et sur la valeur desquelles il ne faudrait pas se faire illusion.

a **Arc simplement appuyé.** — Dans ce cas, on peut déterminer de premières valeurs approchées pour la poussée, par l'un des procédés suivants :

1° En supposant une charnière au sommet de l'arc, par exemple, en supprimant la barre 51 (*fig.* 74, *Pl. XVI*), qui est surabondante, ce qui équivaut à supposer une charnière en *a*.

On peut alors trouver graphiquement les réactions des appuis (§ 75) et, par suite, les tensions de toutes les barres autres que celle supprimée, puis leurs sections d'après les principes établis au § 106. On constituerait de la sorte un arc d'égale résistance dans lequel les variations de température ne produiraient pas de tensions et le résultat serait rigoureux si, en exécution, on supprimait *effectivement* la barre 51, ce qui serait réalisable ; car le système ainsi formé ne serait pas déformable, mais strictement indéformable.

Mais admettons qu'on veuille maintenir la barre 51 ; on pourra lui donner une section arbitraire, puisqu'elle est superflue. On lui donnera naturellement une section égale ou sensiblement égale à

celles qu'on aura trouvées pour les deux barres qui lui sont adjacentes.

La construction étant disposée de façon à résister même sans cette barre additionnelle, on pourrait dire qu'elle résistera à plus forte raison avec son appoint. Cela est vraisemblable ; mais la présence de cette nouvelle barre modifiera plus ou moins profondément la répartition des tensions et la grandeur des poussées, suivant la section qu'on lui aura donnée (à ce point de vue, la section la plus faible serait la meilleure ; c'est celle qui troublerait le moins les résultats exacts obtenus dans l'hypothèse où cette barre n'existerait pas). On peut rigoureusement étudier son influence et conclure de cette étude les modifications à apporter, s'il y a lieu, aux sections obtenues pour les diverses barres. Mais cette étude exige la connaissance des déformations élastiques de l'arc ; elle sera faite dans la seconde Partie de cet Ouvrage.

2° On peut encore supposer la charnière idéale au milieu de la hauteur à la clef ab, et déterminer les poussées (§ 75), puis les tensions et les sections de toutes les barres (y compris celle 51) par la méthode qui vient d'être exposée.

Mais ici les résultats ne peuvent, en aucun cas, être regardés comme rigoureux, puisqu'ils supposent la présence d'une charnière qui n'existe pas dans la réalité. On pourrait encore, comme dans le cas précédent, dire que l'arc, étant calculé de façon à tenir même avec une charnière, résistera à plus forte raison si la charnière n'existe pas. Mais il arrivera que les tensions véritables se répartiront dans la réalité autrement que ne l'indique le calcul basé sur une fiction, et si la suppression de la charnière allège certaines pièces, d'autres pourront s'en trouver plus chargées, ce qui donnerait lieu à des mécomptes, de sorte qu'il est toujours convenable de ne pas s'en tenir à cette première approximation déduite de considérations purement statiques et de les vérifier par une étude exacte du problème d'élasticité, comme il sera indiqué plus loin.

3° Si la charge verticale que porte l'arc est uniformément répartie suivant sa corde, on pourra, dans un calcul de première approximation de la poussée, assimiler celui-ci à un arc parabolique de même flèche et de même portée, puis calculer la poussée par la formule très simple du § 86 et en déduire des valeurs approchées pour les tensions et sections de toutes les barres.

4° Si la charge était normale à l'arc et uniforme, on pourrait de même l'assimiler à un arc circulaire et calculer la poussée à titre de première approximation par la formule du § 81.

5° Quelle que soit la charge *supposée donnée*, on peut construire le polygone ou la courbe funiculaire répondant à cette charge, passant par les deux points d'appui de l'arc et ayant sensiblement la flèche de cet arc (§ 45) et prendre approximativement la poussée de ce polygone ou de cette courbe funiculaire pour celle de l'arc lui-même. (Cette marche ne diffère pas au fond de celle 2°.)

6° Mais la charge que l'on a à considérer se compose d'une partie connue, à savoir : le poids de la chaussée, des véhicules, etc., que l'arc aura à porter et d'une partie inconnue, à savoir le poids propre de l'arc lui-même, dont les dimensions sont précisément les inconnues que l'on cherche à déterminer.

Le plus souvent, on attribue à ce poids inconnu une valeur, par aperçu, d'après les ouvrages de même nature déjà établis.

Si l'on ne veut pas procéder de la sorte, on peut trouver la courbe funiculaire répondant à la réunion de la charge donnée (toutes les fois qu'elle est uniforme, verticale ou normale) et du poids propre inconnu de l'arc et déterminer à la fois la poussée de cette courbe et le poids de l'arc, par la condition qu'il soit d'égale résistance, d'après la méthode analytique exposée dans la Note II ci-après.

§ 168.

CAS D'UN ARC ENCASTRÉ [redacted]. — Supposons un arc (*fig.* 74, *Pl. XVI*) posé sur tourillon fixe en B et encastré suivant AC, c'est-à-dire que non seulement le point A est fixe, mais la direction AC est elle-même invariable, le point C étant assujetti à demeurer sur cette direction.

Alors il y a, en A, une réaction inconnue en grandeur et direction, et, en C, une réaction normale à la ligne AC que le point C est assujetti à suivre. La résultante de ces deux forces sera donc inconnue en grandeur et direction et son point d'application lui-même, sur AC, sera inconnu.

Il n'y a guère qu'un moyen d'en obtenir une valeur pouvant servir

de point de départ pour une première approximation : c'est de supprimer deux barres ou de supposer deux charnières dans le corps de l'arc ou plus généralement de se donner deux points, dans le corps de l'arc, où l'on désire que passe la courbe des pressions. Celle-ci devant passer par le point B est alors déterminée. L'ayant tracée suivant les principes précédemment exposés, on aura la résultante r des réactions qui s'exercent en A et C. On décomposera cette force en deux : l'une suivant la normale à AC menée par le point C, l'autre passant par le point A ; on aura ainsi les réactions inconnues en A et C et, par suite, on pourra, à l'aide d'une figure réciproque (§ 96 *bis*), trouver les tensions des barres.

De même, si l'arc était encastré aux deux bouts, il faudrait se donner trois points de la courbe des pressions ou supprimer trois barres pour pouvoir trouver le polygone des pressions (§ 45) et, par suite, trouver les tensions des barres à titre de première approximation.

§ 169.

EXPRESSION DES TENSIONS D'UN ARC SIMPLEMENT APPUYÉ EN FONCTION DE LA POUSSÉE. — Les composantes verticales des réactions des appuis d'un arc reposant sur deux charnières fixes peuvent être déterminées graphiquement (§ 60); les deux composantes horizontales, en général, ne peuvent être trouvées qu'en ayant égard à la forme et à l'élasticité de l'arc. La Statique apprend seulement qu'elles sont égales et de sens opposés et leur valeur commune se nomme, comme nous le savons, la *poussée de l'arc*. Il est très utile, comme nous le verrons par la suite, de pouvoir étudier comment varie la tension de chaque barre avec la poussée.

Ce résultat peut être obtenu graphiquement. A cet effet, supposons d'abord la poussée nulle, ce qui équivaut à traiter l'arc comme s'il posait sur deux appuis horizontaux ne pouvant donner naissance qu'à des réactions verticales. On déterminera ces réactions et les tensions que supporteraient les barres dans ces conditions. C'est un problème pareil à tous ceux relatifs à des poutres droites posées sur deux appuis qui ont été résolus dans ce qui précède. Désignons par t_i^0 la tension ou pression mesurée sur l'épure ainsi obtenue, pour la barre n° i, les tensions étant comptées positivement et les pressions négativement.

Supposons, à présent, que toutes les charges et, par suite, les réactions verticales soient supprimées et qu'on applique aux deux extrémités de l'arc deux forces l'une et l'autre égales à l'unité de force, dirigées toutes deux suivant la corde et de sens opposés.

Ces deux forces étant données et étant les seules agissantes, on peut trouver les tensions ou pressions qu'elles déterminent.

A cet effet, sur la *fig.* 74 *bis, Pl. XVI*, est représenté en doubles lignes le polygone *ab* de ces deux forces. Il est clair que toutes les barres principales inférieures forment (*fig.* 74), avec la corde AB de l'arc, un polygone fermé et toutes les barres horizontales supérieures, ainsi que les deux barres inclinées qui les relient à l'arc forment, avec la corde, un autre polygone fermé. Donc (§ 96 *bis*) toutes les premières devront partir de l'une des extrémités de la double ligne (par exemple de celle de gauche), de manière à former un nœud *a*, et toutes les dernières, de l'autre extrémité, formant ainsi un second nœud *b*. Les autres lignes se placent ensuite sans difficulté. On n'a tracé, sur la figure, que la moitié des tensions, l'arc se trouvant symétrique.

Désignons par λ_i la tension ou pression de la barre portant le n° *i* ainsi obtenue par l'épure, le nombre λ_i étant pris positivement dans le premier cas et négativement dans le second (¹).

Si la poussée est égale à Q unités de force, il est clair que la tension qu'elle produira sur la barre n° *i*, au lieu d'être λ_i, sera $\lambda_i Q$. Par suite, la tension totale t_i de cette barre due aux actions simultanées des charges et réactions verticales d'une part et à la poussée de l'autre sera

$$t_i = t_i^0 + \lambda_i Q, \qquad (1)$$

expression linéaire relativement à la constante indéterminée Q, dont les coefficients sont donnés en grandeur et en signe graphiquement.

§ 170.

ARC ENCASTRÉ A L'UNE DE SES EXTRÉMITÉS ET LIBREMENT APPUYÉ A L'AUTRE. — Soient (*fig.* 33, p. 254) A et B les deux extrémités

---

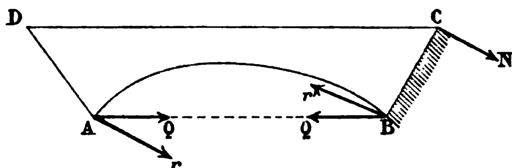
(¹) Si l'épure faite en prenant les deux forces agissantes égales à l'unité de

d'un arc, l'extrémité A étant simplement appuyée, c'est-à-dire fixe; l'extrémité B est également fixe; mais, en outre, l'extrémité C de la barre BC est assujettie à demeurer sur la ligne donnée BC. Il en résulte qu'il s'introduira ici une indéterminée de plus que dans le cas précédent, à savoir la réaction normale de la culée en un point C, réaction que nous appellerons N.

Il s'agit de trouver graphiquement la tension d'une barre quelconque en fonction des deux constantes indéterminées Q et N.

Nous déterminerons, d'abord, comme ci-dessus, pour chaque barre, les deux termes de l'équation (1), c'est-à-dire les tensions dues aux charges et réactions verticales, ainsi qu'à la poussée horizontale Q.

Fig. 33.



Pour trouver ensuite l'influence de la réaction N que nous compterons positive dans un sens convenu, par exemple dans le sens indiqué sur la figure et négativement en sens contraire, appliquons au point C suivant CN une force $+1$. Déterminons en A et B deux forces r et r' parallèles à CN et faisant équilibre à une force $+1$ appliquée suivant CN. Ces forces sont parfaitement déterminées et faciles à trouver graphiquement (§ 42); puis, par la construction d'une figure réciproque, on aura les tensions que les trois forces en équilibre 1, r et r' produisent sur les barres de l'arc donné, supposé réticulaire. Soit s_i la tension positive ou négative ainsi produite sur la barre n° i et mesurée sur l'épure.

Si, suivant CN, au lieu d'une force 1, on applique une force N, il est clair que les réactions correspondantes seront Nr et Nr' et les tensions des barres $s_i \times N$.

Donc, la tension totale t_i d'une barre sera ici

$$(2) \qquad t_i = t_i^0 + \lambda_i \times Q + s_i \times N,$$

---

force était trop petite, on les prendrait égales à n fois cette unité; puis, pour obtenir λ_i, on diviserait les longueurs obtenues, sur l'épure, par le nombre n.

équation linéaire où les coefficients sont connus graphiquement et qui fournit les tensions dès qu'on connaîtra les deux réactions N et Q.

§ 171.

ARC ENCASTRÉ A SES DEUX EXTRÉMITÉS. — Si l'arc considéré est encastré non seulement suivant BC, mais aussi suivant AC, on devra considérer en D une réaction N′ analogue à celle N. En désignant par s'_i les coefficients correspondants analogues à s_i, on aura, pour la tension t_i,

(3) $$t_i = t_i^0 + \lambda_i \times Q + s_i \times N + s'_i \times N'.$$

Si l'arc est symétrique, et si j est le numéro de la barre symétrique de celle portant le n° i, on aura

$$s_i = s'_j \quad \text{et} \quad s_j = s'_i.$$

Si, en outre, la charge est symétrique, alors N = N′ et

(4) $$t_i = t_i^0 + \lambda_i \times Q + (s_i + s_j)N.$$

Il n'y a plus que les deux indéterminées N et Q. Dans ce cas, on détermine directement les coefficients $s_i + s_j$ en supposant à la fois des réactions $+1$ en C et en D. Ces deux forces symétriques seront équilibrées par deux forces verticales faciles à déterminer (§ 42) appliquées en A et B. On n'aura à faire l'épure que pour la moitié de l'arc.

CHAPITRE XIV.

APPLICATION AUX PONTS TOURNANTS ET AUX GRUES TOURNANTES.

§ 172.

GRUE TOURNANTE. — La *fig.* 76 (*Pl. XVIII*) représente une grue tournante dont le dessin, sauf le pivot, est tiré de l'Ouvrage de M. Cremona. La grue est mobile autour de l'axe vertical A*i* et retenue par le tirant 12.

Les forces données qui agissent sur la grue sont les forces verticales

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

représentées sur le polygone des forces (*fig.* 76) par

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

On déterminera le triangle réciproque du nœud 5. De là on passera au nœud (13, 16, 15), et ainsi de suite jusqu'au nœud 8. De celui-ci on passera à 9 et enfin, en dernier lieu, on arrivera à celui *i*, où les deux seules tensions inconnues sont 12 et 11.

La pression verticale 11 est équilibrée par la réaction AZ du sol.

Comme vérification on peut construire le polygone funiculaire relatif à un pôle o, ce qui donnera la résultante $R = ab$ des neuf forces données. Cette résultante doit être équilibrée par les tensions ou pressions 10, 11, 12, ce qui permettrait de trouver directement ces forces. A cet effet, on prolongerait 10 jusqu'à sa rencontre en C avec la résultante R. On chercherait d'abord deux forces dirigées suivant 10 et suivant *i*C équilibrant R. Pour cela, par l'extrémité *b* du polygone des forces on mènerait 10 parallèle à 10 et, par l'origine *a*, on mènerait *af* parallèle à *i*C.

Puis on décomposerait la force *af*, dont la ligne d'action est *i*C, suivant 11 et 12. Les doubles lignes de la figure indiquent ces opérations.

On peut aussi, dans la grue, supprimer le tirant 12 et considérer le pivot *i*A appuyé sur le sol en A comme maintenu entre des bagues circulaires *cc'* et *ee'*. Les appuis ont lieu en A, *c*, *e* et donnent naissance à trois réactions X, Y, Z qui devront faire équilibre à la résultante R des forces directement appliquées.

On les déterminera graphiquement suivant le procédé du § 57.

Quant aux tensions ou pressions des barres du système, autres que le pivot 11, on les déterminera comme ci-dessus. Il y a lieu d'observer qu'en *i* la résultante des tensions 24, 25, 27 ne sera pas dirigée suivant le pivot. Celui-ci ne subira pas une simple compression verticale, mais aussi une action horizontale qui tendra à le faire *fléchir*.

Il devra pouvoir résister à cette flexion. Nous étudierons, dans la seconde Partie de cet Ouvrage, ce genre d'action.

§ 173.

PONT TOURNANT. — La *fig.* 75, *Pl. XVII,* représente un pont tournant autour de l'axe vertical *xy*. La partie placée à gauche de cette ligne est la *volée;* la partie de droite est la *culasse* destinée uniquement à faire contre-poids à la volée.

On se donne les forces verticales

1, 2, 3, ..., 9, 10 (¹)

agissant sur la volée. Il faut d'abord déterminer les forces

11, 12, 13, 14, 15, 16,

égales entre elles, à appliquer à la culasse pour que le système soit en équilibre, c'est-à-dire pour que la résultante de toutes les forces agissant tant sur la volée que sur la culasse coïncide avec *xy*.

Pour cela, portons bout à bout (*fig. a*) des longueurs d'une grandeur commune quelconque

11, 12, 13, 14, 15, 16.

Ces lignes représenteront, à une échelle indéterminée, les forces

(¹) Pour ne pas compliquer la figure, on suppose les forces condensées sur les nœuds 1, 2, 3, ..., au lieu de les supposer réparties sur tous les nœuds.

inconnues

11, 12, 13, 14, 15, 16,

qui sont supposées égales entre elles. En construisant le polygone funiculaire relatif au pôle 0, on obtient la position de la résultante R de ces forces.

Construisons maintenant un polygone funiculaire relatif à un pôle 0′ (*fig.* 75) de R et des forces données agissant sur la volée. En partant d'un point de xy, on devra, comme au § 52, revenir en ce point. On en déduit la grandeur de R. Chacune des six forces appliquées sur la volée sera $\frac{1}{6}$ de R, et la réaction sur l'appui xy sera une force ascendante 17 égale à la somme de toutes les forces agissant sur l'ensemble de la figure.

Les barres extrêmes α, β, γ, δ ont évidemment des tensions nulles.

Si une force verticale était appliquée à la barre α, elle représenterait la tension de cette barre, et la tension de β n'en serait pas moins nulle; de même, si une force verticale était appliquée suivant la barre γ, elle représenterait la tension de cette barre, et la tension de δ serait nulle.

Il n'y a donc pas à s'occuper de ces quatre barres α, β, γ, δ.

Cela posé, on peut construire la réciproque du nœud (6, 18, 19). On mènera pour cela, par (6, 7), une parallèle à 19 et par (5, 6) une parallèle à 18.

On construira ensuite la réciproque du nœud (18, 20, 21); on a la réciproque de 18. Pour avoir 20, on mènera, par (18, 19), une parallèle à 20; et, pour avoir 21, on mènera par (5, 6) une parallèle à 21.

De là on passera au nœud (19, 20, 22, 23). On connaît les réciproques de 19 et 20. Pour avoir 22 et 23, on mènera par (6, 7) une parallèle à 23 et par (20, 21) une parallèle à 22.

On passera ensuite au nœud (21, 22, 24, 25) et ainsi de suite.

§ 174.

CAS DES CROIX DE SAINT-ANDRÉ. — Le beau pont tournant établi par M. Oudry à l'entrée du port de Brest a les mêmes dimensions géométriques que le système que nous venons d'étudier; mais il est formé de croix de Saint-André.

La Statique graphique, pas plus que la Statique ordinaire, ne permet de trouver rigoureusement les tensions d'un système de croix de Saint-André. Pour les obtenir d'une façon rigoureuse, il faut faire usage de la théorie mathématique de l'élasticité ou de celle de la Résistance des matériaux, ainsi qu'il sera indiqué dans la deuxième Partie de cet Ouvrage. Mais habituellement on regarde un système en croix de Saint-André comme agissant de la même manière que deux systèmes triangulés juxtaposés ayant : l'un, la forme de la *fig.* 75; l'autre, celle de cette même figure où les étrésillons seraient remplacés par des contre-étrésillons. Ces deux systèmes peuvent tous deux être traités par les procédés graphiques (¹).

(¹) Nous démontrerons qu'il est plus avantageux d'employer des systèmes triangulés que des systèmes à croix de Saint-André, et qu'en général, dans toutes les constructions, les systèmes les meilleurs et les plus économiques sont ceux strictement indéformables, c'est-à-dire ceux qui peuvent être traités par les procédés de la Statique graphique.

CHAPITRE XV.

APPLICATION AUX DIVERSES ESPÈCES DE CHARPENTES POUR TOITURES.

§ 175.

CONSIDÉRATIONS SUR LES CHARGES QUE SUPPORTENT LES CHARPENTES POUR TOITURES. — Données sur les charges dues : 1° au poids propre d'une charpente et de la toiture; 2° au poids de la neige; 3° à la pression du vent. — Les charpentes en bois ou en métal sont en général destinées à porter, soit les couvertures des édifices, soit les voûtes en construction jusqu'à ce que, étant *fermées,* elles se soutiennent par elles-mêmes. Dans ce dernier cas, elles prennent le nom de *cintres.*

Les charpentes supportant les toitures ont à subir trois sortes de charges :

1° Leur poids propre et celui de la couverture des édifices;
2° Le poids des neiges qui peuvent accidentellement y séjourner;
3° La pression du vent.

Voici, sur ces trois espèces d'efforts, quelques indications expérimentales :

1° *Poids propre ou permanent* (1).

A. *Charpentes en bois.*

N°s d'ordre.	NATURE DE LA COUVERTURE.	CHARGE par mètre carré.	OBSERVATIONS.
1	Couverture simple en tuiles..........	100kg	
2	» double..................	125	
3	» en ardoises..............	75	
4	» en asphalte..............	60 à 100	Suivant la nature des lambourdes.
5	» en goudron..............	30	
6	» en tôle de zinc ou de fer...	40	

B. *Charpentes métalliques.*

N°s d'ordre.	NATURE DE LA COUVERTURE.	CHARGE par mètre carré.	OBSERVATIONS.
1	Ardoises sur cornières..............	50kg	
2	Tôle de fer plane sur cornières......	25	
3	» ondulée sur cornières....	22	
4	Tôle de zinc ondulée sur cornières...	24	

2° *Charge due à la neige.*

La plus grande hauteur des chutes de neige dans l'Europe centrale est d'environ $0^m,625$. La densité de la neige qui tombe étant $\frac{1}{8}$ environ de celle de l'eau, la plus grande charge due à la neige équivaut à celle d'un volume d'eau de $\frac{0^m,625}{8} = 0^m,078$ de hauteur. Elle est donc de 78^{kg} par mètre carré de surface horizontale couverte. Cette pression, si a est la portée de la charpente et h sa flèche ou hauteur, sera réduite, si on la compte (*fig.* 77,

(1) Données empruntées à M. Karl von Ott.

Pl. XVIII) suivant la surface inclinée AB du toit, dans le rapport $\frac{a}{2\sqrt{\frac{a^2}{4}+h^2}}$, c'est-à-dire que, par mètre carré de couverture inclinée, elle sera de $\frac{78\times a}{2\sqrt{\frac{a^2}{4}+h^2}} = \frac{78}{\sqrt{1+\frac{4h^2}{a^2}}}$ kilogrammes. On trouve les résultats suivants :

$\frac{h}{a}$.	CHARGE DE NEIGE par mètre carré de toiture.
$\frac{1}{2}$	55kg
$\frac{1}{3}$	65
$\frac{1}{4}$	70
$\frac{1}{5}$	73
$\frac{1}{6}$	74
$\frac{1}{7}$	75
$\frac{1}{8}$	75.5
$\frac{1}{9}$	76
$\frac{1}{10}$	77

3° *Pression du vent.*

Lorsque le vent souffle normalement à une surface avec une vitesse V, la pression normale p qu'il exerce sur 1mq de cette surface est

$$p = 0{,}113\,V^2,$$

p étant exprimé en kilogrammes et V en mètres.

Soit, d'après cela (*fig.* 78, *Pl. XVIII*), AB un versant de toit ayant une inclinaison α.

Le vent fait généralement un angle de 10° avec l'horizontale.

Si v est sa vitesse normale à AB

$$v = V\sin(\alpha + 10^\circ),$$

et la pression normale qu'il exerce par mètre carré sera

$$p = 0{,}113\,V^2\sin^2(\alpha + 10).$$

On peut admettre, pour la plus grande vitesse du vent $V = 31^m,6$, d'où $V^2 = 1000$ environ, et la formule précédente devient

$$p = 113 \sin^2(\alpha + 10),$$

ou α est donné par l'expression $\tang \alpha = \frac{2h}{a}$.

Cette force doit être composée avec les forces verticales résultant du poids de la toiture et avec la charge verticale produite par a neige.

On peut, si l'on veut, la décomposer en une force dirigée suivant AB et une force verticale

$$q = \frac{113 \sin^2(\alpha + 10^\circ)}{\cos \alpha},$$

laquelle s'ajoutera aux deux précédentes. On trouve

$\frac{h}{a}$.	q.
	kg
$\frac{1}{2}$	107,20
$\frac{1}{3}$	64,75
$\frac{1}{4}$	44,65
$\frac{1}{5}$	33,90
$\frac{1}{6}$	27,10
$\frac{1}{7}$	22,45
$\frac{1}{8}$	19,30
$\frac{1}{9}$	17,00
$\frac{1}{10}$	15,02

et, en ajoutant les trois charges verticales, on trouve :

Charge totale s'exerçant suivant la verticale sur un mètre carré de toiture et provenant du poids propre de la toiture, de celui de la neige et de la composante verticale q de la pression du vent.

NATURE DE LA COUVERTURE.	$\frac{h}{a}$.									OBSERVATIONS.
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	
Forme en bois (en kilogrammes).										
Couverture simple en tuiles...	260	230	215	″	″	″	″	″	″	
Id. double Id. ...	285	255	240	″	″	″	″	″	″	
Id. en ardoises........	235	205	180	180	″	″	″	″	″	
Id. en asphalte	235 à 260	205 à 230	180 à 215	180 à 205	175 à 200	170 à 195	170 à 195	165 à 190	165 à 190	Suivant la nature des lambourdes.
Id. en goudron........	190	160	145	135	130	125	125	120	120	
Id. tôle de zinc ou de fer.	200	170	155	145	140	135	135	130	130	
Forme métallique (en kilogrammes).										
Ardoises sur cornières	212	180	165	175	151	148	145	143	142	
Tôle de fer plane sur cornières.	187	155	140	132	126	123	120	118	117	
Id. ondulée Id.	184	152	137	129	123	120	117	115	114	
Id. de zinc ondulée Id.	186	154	139	131	125	122	119	117	116	

Une fois qu'on a trouvé, par les règles qui précèdent, la charge totale qui s'exerce par mètre carré, sur une toiture, en multipliant cette charge par l'espacement des fermes, on aura celle qui s'exerce par mètre courant de ferme; on en déduira les forces à appliquer en chaque sommet ou nœud, en multipliant la charge par mètre courant de ferme, par la demi-somme des distances du nœud considéré aux deux nœuds voisins.

On trouvera d'ailleurs les réactions des appuis par les procédés exposés au Chapitre VI, et il ne restera qu'à déterminer les forces dites *intérieures,* c'est-à-dire les tensions des diverses pièces de la charpente.

Nous allons résoudre la question pour les divers types de charpentes usités.

§ 176.

PREMIER TYPE. — Considérons un premier type (*fig.* 79, *Pl. XVIII*) formé de deux arbalétriers, deux sous-arbalétriers se croisant et un poinçon.

Soient 1, 2, 3 les charges et 4 et 5 les réactions des appuis (1); ces forces sont supposées verticales et représentées sur le polygone des forces (*fig.* 79) par les lignes doubles 1, 2, 3, 4, 5.

On construira le triangle réciproque du nœud (5, 6, 7). A cet effet et d'après les règles générales du § 96 *bis*, par le sommet 5.1 du polygone des forces on mènera une parallèle à la barre principale 6 et par celui 5.4, une parallèle à la barre principale 7.

On passera au nœud (1, 6, 9, 8). On connaît les lignes réciproques de 1 et 6. Par le sommet (1, 2) on mènera une parallèle à la barre principale 9, et par (6, 7) une parallèle à 8 (car 6, 7, 8 formant un polygone fermé, 6, 7, 8 forment un nœud).

On passera ensuite au nœud (2, 9, 11, 10). On connaît les réciproques des lignes 2 et 9. Par (2, 3) on mènera une parallèle à 10; par (8, 9) une parallèle à 11.

On pourra ensuite construire la réciproque du nœud à cinq

(1) En réalité, la charge est répartie sur toute la surface de la toiture. Chaque ferme supporte la charge comprise entre elle et le milieu de l'espace qui la sépare des deux fermes voisines. On connaît donc les charges réparties sur les arbalétriers AB et BC. Nous avons le droit de les reporter sur les nœuds (§ 95): la recherche des tensions des pièces n'en sera pas modifiée. Ainsi, l'on décomposera la résultante des forces agissant sur la partie A*a* en deux forces parallèles qu'on supposera appliquées en A et *a*; de même, on décomposera la résultante des forces appliquées sur la partie *a*B en deux qu'on supposera appliquées en *a* et B et ainsi de suite. Si la charge est uniformément répartie sur toute la longueur ABC, chaque nœud supportera la charge totale comprise entre lui et les milieux des distances qui le séparent des nœuds voisins, de sorte que les nœuds extrêmes A et B ne supportent, dans ce cas, que la moitié des charges des autres nœuds.

Ces charges sur les nœuds extrêmes fournissent naturellement des pressions sur les appuis qui s'ajoutent aux pressions produites par les autres charges; mais elles n'interviennent pas dans la recherche des tensions des barres et, à ce dernier point de vue, il n'y a à considérer que les forces 1, 2, 3 appliquées aux nœuds intermédiaires.

Les observations qui précèdent s'étendent naturellement aux autres types de charpente qui font l'objet de ce Chapitre.

côtés (7, 8, 14, 11, 12). C'est un pentagone dont on connaît les trois côtés 7, 8 et 14. Par (10, 14) on mène une parallèle à 11 ; par (4, 5), une parallèle à la barre principale 12.

§ 177.

DEUXIÈME TYPE (allemand ou suisse). — La *fig.* 82, 82 donne un autre type usité en Allemagne et en Suisse.

Les charges sont 1, 2, 3; les réactions des appuis 4 et 5. Ces cinq forces sont représentées par la double ligne formant le polygone des forces.

On construit le triangle réciproque du nœud (5, 6, 7). Pour cela, par (5, 1) on mène une parallèle 6, et par (5, 4) une parallèle à 7.

De là on passe au nœud (6, 1, 8, 9); de là, au nœud (9, 10, 2, 11): puis au nœud à cinq lignes (7, 8, 10, 12, 14). Le tracé est le même que celui de la figure précédente.

§ 178.

TROISIÈME TYPE. — La *fig.* 80, 80 (*Pl. XVIII*) donne un type de charpente très simple et très élégant usité en France et en Angleterre.

La charge est concentrée en 1; les réactions des appuis sont 2 et 3. Ce type ne s'applique que si l'on donne aux arbalétriers assez de section pour qu'ils résistent à la flexion provenant de ce que la charge est en réalité répartie sur toute leur longueur, sans point d'appui intermédiaire.

La double ligne 1, 2, 3 donne le tracé du polygone des forces. Par (3, 1) on mène une parallèle à 4; par (3, 2) une parallèle à 5. On passe de là au nœud (5, 6, 7). Par (4, 5) on mène une parallèle à 6; par (3, 2) une parallèle à 7.

Puis on passe au nœud (1, 4, 6, 8, 10) de la réciproque duquel on connaît tous les côtés, sauf les deux derniers. Par (6, 7) on mène une parallèle à 8; par (1, 2) une parallèle à 10.

§ 179.

QUATRIÈME TYPE (anglais). — La *fig.* 84, 84 (*Pl. XIX*) représente un type applicable à de grandes portées et particulièrement usité en Angleterre.

Les charges sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ; les réactions des appuis, 8 et 9. Toutes ces lignes sont indiquées en grandeur sur la double ligne formant polygone des forces de la *fig.* 84. Par (9, 1) on mène une parallèle à 10 ; par (9, 8) une parallèle à 11. On aura ainsi le triangle réciproque du nœud (9, 10, 11).

Par (1, 2), on mène une parallèle à 13 ; par (10, 11), une parallèle à 12, ce qui donnera la réciproque du nœud (1, 10, 12, 13) : de là on passera au nœud (11, 12, 14, 15) ; puis à celui (2, 13, 14, 16, 17), et ainsi de suite.

Quand on aura tracé la figure réciproque du nœud (3, 17, 18, 20, 21), on devra passer au nœud (4, 21, 22, 23), et ce n'est qu'ensuite qu'on passera à celui (19, 20, 22, 24, 25) qui contient un côté de plus que le précédent.

§ 180.

CINQUIÈME TYPE (Polonceau). — La *fig.* 81, 81 (*Pl. XVIII*) représente le type usité en France pour les grandes charpentes comme celles des gares de chemin de fer.

Sur la ligne double verticale formant polygone des forces (*fig.* 81) sont portées les grandeurs des charges 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et les réactions verticales 8 et 9.

On construira successivement les figures réciproques des nœuds (9, 10, 11), (1, 10, 12, 13), (11, 12, 14, 15).

Mais ensuite, soit que l'on passe au nœud (2, 13, 14, 16, 18, 17), soit à celui (15, 16, 19, 23), on aura toujours trois lignes inconnues et le tracé des polygones réciproques de ces nœuds est indéterminé.

Il y a lieu dès lors de se demander si la figure n'est pas de celles dont la Statique ne permet pas de trouver les tensions. En comptant le nombre n de ses sommets et le nombre m de ses côtés, on trouve

$$n = 15, \quad m = 27.$$

d'où

$$m = 2n - 3.$$

La figure est donc strictement indéformable et, par suite (§ **72**), la Statique doit suffire à trouver les tensions de ses barres, puisqu'on connaît les réactions des appuis.

Pour résoudre le problème, faisons une section xy un peu à gauche du sommet de la ferme. Elle coupera les trois barres **20**, **22**, **23**. La partie de gauche devra être en équilibre sous l'action des forces

$$9, 1, 2, 3$$

qui y agissent et de trois forces fictives tenant lieu des tensions des barres coupées et dirigées suivant ces barres. Donc le problème de la détermination de ces tensions consiste à trouver trois forces dirigées suivant des lignes données non concourantes et faisant équilibre à des forces données. Nous avons résolu ce problème général au § 57. On le résoudra donc, et alors toute difficulté, dans la construction de la *fig.* 81, disparaîtra, et cela quelles que soient les charges, quand bien même elles ne seraient ni verticales, ni symétriques par rapport à la verticale passant par le sommet de la ferme.

§ 181.

SIXIÈME TYPE. — La *fig.* 83 (*Pl. XIX*), empruntée à l'Ouvrage de M. Cremona, indique une charpente portant à sa partie supérieure une lanterne. Il en résulte que le sommet de la charpente est libre et ne supporte que la charge verticale **1**.

Les charges données **1**, **2**, **3**, **4**, **5** sont tenues en équilibre par les réactions des appuis **6** et **7**. Ces réactions se déterminent par les procédés ordinaires, c'est-à-dire par le tracé d'un polygone funiculaire. Ce polygone est indiqué sur la figure. Le tracé de la figure réciproque 83 n'offre d'ailleurs aucune difficulté.

CHAPITRE XVI.

APPLICATION AUX CINTRES DES VOUTES ET A DES CHARPENTES DIVERSES.

§ 182.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LE FROTTEMENT. — Considérons (*fig.* 85, *Pl. XIX*) un corps (A) reposant sans adhérence sur un plan xy. Nous avons vu (§ 53) que la réaction de chacun des points d'appui du plan sera normale à ce plan, en sorte que la résultante des réactions de tous les points d'appui, quel qu'en soit le nombre, sera aussi normale à xy.

Ces réactions sont d'ailleurs toutes dirigées dans le même sens, dans un sens tel qu'elles s'opposent à ce que le plan soit traversé par le corps. Leur résultante sera donc dirigée dans le même sens et comprise entre les points d'appui.

Pour que le corps (A) puisse être en équilibre, il faut que la résultante R des forces qui agissent sur lui soit égale et contraire à celle des réactions du plan. Cette force devra donc : 1° être normale au plan xy; 2° tendre à appuyer le corps contre le plan : 3° son point d'intersection avec le plan devra se trouver à l'intérieur du périmètre formé par les points d'appui.

D'après cela, si la résultante R des forces agissant sur le corps (A), au lieu d'être dirigée suivant une normale au plan xy, a une direction oblique R', le corps (A) glissera sur le plan.

Cela suppose, toutefois, que les surfaces en contact sont d'un poli *parfait*. En réalité, il n'en est pas ainsi. L'expérience prouve : 1° que si les corps en contact sont des solides naturels, le glissement ne s'effectue que si l'inclinaison φ' de R' sur la normale atteint ou dépasse une certaine valeur φ; 2° que cette valeur est indépendante de la grandeur de R', indépendante de l'étendue des surfaces en contact; elle ne dépend que de la nature de ces surfaces et se nomme l'*angle du frottement de l'une des surfaces sur l'autre*.

De ce que le corps (A) demeure en équilibre tant que la résultante R′ des forces qui agissent sur lui fait, avec la normale, un angle φ' moindre que l'angle du frottement φ, il résulte que le plan xy fait alors naître une réaction R″ exactement égale et contraire à R′. Ainsi, *si un corps naturel s'appuie sur la surface d'un autre corps naturel, celle-ci peut lui opposer une résistance oblique dont l'inclinaison sur la normale peut prendre toutes les valeurs comprises entre zéro et un certain angle φ appelé l'angle de frottement*. La composante de la réaction parallèle à la surface est le *frottement;* la composante normale à la surface conserve le nom de *réaction normale*. Le rapport du frottement à la réaction normale est évidemment égal à la tangente trigonométrique de l'inclinaison de la réaction sur la normale. Ce rapport peut varier depuis o jusqu'à tang φ; cette dernière quantité est ce que l'on nomme le *coefficient de frottement* des deux surfaces en contact; nous le désignerons habituellement par la lettre f, en sorte que $f = \tang \varphi$; quand le corps (A) est sur le point de glisser, si N est la pression normale qu'il exerce sur xy, le frottement que fera naître cette pression sera ainsi égal à fN.

§ 183.

RECHERCHE DE L'ACTION EXERCÉE PAR UNE VOUTE EN COURS DE CONSTRUCTION SUR SON CINTRE. — Les voûtes se construisent en posant sur cintre les voussoirs, à partir des deux naissances à la fois, jusqu'à la clef. On pose ensuite le voussoir de clef qu'on chasse comme un coin entre les voussoirs voisins, de façon à le serrer le plus possible: la voûte est alors terminée; elle se tient d'elle-même et l'on peut enlever les cintres; mais, tant que la clef n'est pas posée, elle est exclusivement portée par les cintres.

Le problème que nous nous proposons de résoudre est celui-ci :

Quelles sont les pressions exercées par les divers voussoirs sur le cintre au moment où l'on va poser la clef ou, plus généralement, à un moment quelconque de la construction d'une voûte, par exemple, lorsqu'on a construit la partie $xx'yy'$ (*fig.* 86, *Pl. XIX*)?

Considérons un voussoir quelconque *abcd* et cherchons l'action que ce voussoir exerce sur le cintre. Chaque voussoir repose sur le cintre par l'intermédiaire d'un couchis *k* passant en son milieu.

Nous pouvons regarder l'action cherchée comme passant par le centre de ce couchis. Cette action est d'ailleurs normale à l'intrados; elle est donc dirigée suivant la ligne médiane *g*X du voussoir. Nous en connaissons ainsi la position, et c'est sa grandeur seulement que nous avons à déterminer.

Nous pouvons concevoir enlevée la partie de la voûte placée au-dessus du joint *cd*, pourvu que nous remplacions l'action qu'elle exerce sur ce joint par une force fictive *q* qui lui soit égale. Supposons, pour un instant, cette force connue en grandeur et en position; je dis qu'on en pourra déduire : 1° la force analogue q' relative au joint *ab*, c'est-à-dire l'action exercée sur ce joint par la partie de la voûte située au-dessus de lui; 2° l'action cherchée X de la voûte sur le cintre au point *k*.

En effet, composons l'action supposée connue *q* avec le poids *p* du voussoir; soit *r* la résultante de ces deux forces et *o* le point d'intersection de cette résultante avec la ligne *g*X suivant laquelle est dirigée l'action cherchée X.

Il peut se présenter deux cas : la partie de la voûte placée au-dessus du joint *ab* peut tendre à se détacher de la partie placée au-dessous, de deux manières, soit en glissant le long du joint *ab*, soit en tournant autour de l'arête d'intrados *b*. Dans la première hypothèse, l'action inconnue q' exercée par $abyy'$ sur le joint *ab* serait connue en direction; car elle ferait, avec la normale à *ab*, un angle égal à l'angle du frottement de la pierre sur la pierre (§ **182**), angle que l'on admet, d'après l'expérience, être généralement de 15° pour les voûtes en maçonnerie (¹). Dans la seconde hypothèse, l'action *q* ne serait pas connue en direction, mais on connaîtrait un point de sa ligne d'action; car cette force passerait nécessairement par le point *b*.

D'après cela, voici la marche à suivre pour avoir à la fois les forces q' et X. On décomposera la force *r* en deux : l'une suivant la ligne *o*X dont la position est connue, l'autre suivant la ligne oq' passant par *o* et formant un angle de 15° avec la normale au joint *ab*. Si cette ligne oq' coupe le joint *ab* entre les points *a* et *b*, la

(¹) Nous n'avons pas ici à tenir compte de l'adhérence des mortiers, puisqu'ils n'ont pas encore fait prise au moment où nous étudions les actions mécaniques qui se développent dans la voûte.

composante de r dirigée suivant cette ligne sera l'action cherchée q' sur ce joint, et la composante suivant oX sera l'action exercée en k sur le cintre. Dans ce cas, on sera bien certain que c'est par glissement que la partie de la voûte située au-dessus de ab tend à se détacher du reste.

Si, au contraire, la ligne oq' coupait la ligne ab dans le prolongement de la portion ab, alors on serait, au contraire, assuré que ce n'est pas par glissement, mais par rotation autour du point b, que le mouvement de la portion $abyy'$ de la voûte tendrait à se produire; on devrait donc décomposer la force r en deux : l'une suivant oX et l'autre suivant ob. La première des composantes donnerait l'action sur le cintre, la seconde, l'action q'' sur le joint ab.

Ainsi, dans tous les cas, étant connue l'action q exercée sur un joint cd, on en peut conclure : 1° l'action analogue (q' ou q'') exercée sur le joint suivant, ainsi que l'action exercée sur le cintre par le voussoir compris entre ces deux joints.

Or, en partant du dernier voussoir posé $mnyy'$, l'action exercée sur le joint yy' est $q = o$. Elle est donc connue. On pourra par suite trouver : 1° l'action exercée sur le cintre par le dernier voussoir; 2° l'action exercée sur le joint mn.

Connaissant cette dernière, on en peut déduire l'action exercée sur le cintre par l'avant-dernier voussoir, ainsi que l'action exercée sur le joint suivant $m'n'$, et, en continuant ainsi de proche en proche, on aura l'action exercée sur le cintre au droit de chacun des voussoirs de la voûte.

Il est à peine besoin d'ajouter que toutes ces recherches se font graphiquement avec la plus grande facilité, au moyen du polygone des forces et du polygone funiculaire. On portera bout à bout les forces p et q; puis, par l'une des extrémités du contour ainsi obtenu, on mènera une parallèle à oX; par l'autre, une parallèle à oq' si cette ligne tombe entre a et b et à oq'' dans le cas contraire; on aura ainsi en grandeur les forces cherchées X et q' (ou q'') sur le polygone des forces. La première est d'ailleurs connue en position : la construction d'un polygone funiculaire quelconque donne la position de la seconde.

§ 184.

RECHERCHE DES TENSIONS DANS LES CHARPENTES FORMANT CINTRE. — Maintenant que nous savons trouver les charges qu'une voûte exerce sur son cintre, étudions les pressions ou tensions que ces charges font naître dans les diverses pièces composant le cintre.

Premier type. — La *fig.* 87, 87 (*Pl. XIX*) représente un cintre de voûte en plein cintre. Les charges données ou plutôt obtenues par le procédé du paragraphe précédent sont

1, 2, 3, 4, 5;

les réactions des appuis sont 6 et 7; ces diverses forces sont représentées sur le polygone des forces par

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

On construit la réciproque du nœud (7, 8, α). On voit facilement que la réciproque de α est nulle, c'est-à-dire que, théoriquement, cette barre ne supporte pas de tension, elle sert simplement à s'opposer au *déversement* du système. La tension de 8 est égale et opposée à la réaction de l'appui 7. On passe au nœud (8, 1, 9, 10); on connaît 8 et 1, et l'on obtient 10 en menant par (1, 2) une parallèle à 10, et 9 en menant par (7, 6) une parallèle à 9. De là on passe au nœud (2, 11, 12, 10).

On connaît 2 et 10; on trouve 12 en menant par (2, 3) une parallèle à 12, et 11 en menant, par (9, 10), une parallèle à 11 et ainsi de suite.

§ 185.

Type pour voûte en anse de panier ou en arc de cercle. — Les *fig.* 88, 88 (*Pl. XX*) représentent un type pour pont en arc de cercle ou en anse de panier.

La figure réciproque se construit sans difficulté.

§ 186.

Type pour voûte en arc très surbaissé. — Les *fig.* 91, 91 (*Pl. XX*) donnent un type applicable à une voûte en arc de cercle très surbaissé.

§ 187.

Types divers. — Les *fig.* 89, 90, 92 de la *Pl. XX* représentent trois autres types de charpente pouvant servir, soit pour toitures, soit pour cintres. Elles sont empruntées à M. Fleeming Jenkin.

Les *fig.* 89, 90, 92 en sont les réciproques que l'on construit sans difficulté; les procédés sont toujours les mêmes. Cette uniformité dans les procédés constitue un des plus précieux avantages de la Statique graphique. Une fois qu'on a construit un certain nombre de figures réciproques, on les construit toutes sans la moindre difficulté.

Les exemples que nous avons donnés sont assez nombreux et les explications générales du § 196 *bis* assez circonstanciées pour que le lecteur ne puisse pas rencontrer de difficulté dans la pratique.

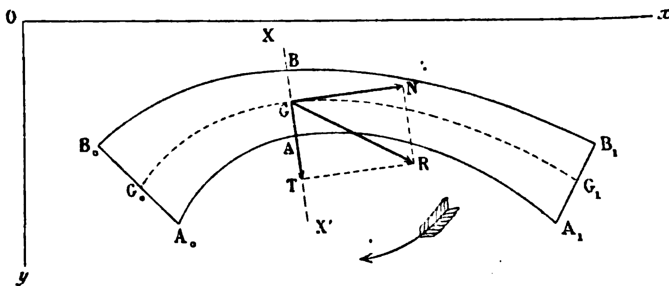
CHAPITRE XVII.

THÉORIE, CONSTRUCTION ET EMPLOI GÉNÉRAL DES MOMENTS DE FLEXION ET EFFORTS TRANCHANTS.

§ 188.

EFFORT TRANCHANT; COMPRESSION DE LA FIBRE MOYENNE. MOMENT ET COUPLE DE FLEXION. Soit (*fig.* 34) $A_0B_0A_1B_1$ un corps quelconque

Fig. 34.



(poutre, arc, etc.) libre ou non, symétrique par rapport à un plan et en équilibre sous l'action de forces extérieures toutes (y compris les réactions des appuis si elles existent) situées dans ce plan.

Concevons qu'à l'intérieur de ce corps et dans le plan de symétrie on trace une courbe G_0G_1, puis qu'on fasse, dans le corps, des sections telles que X'X, normales à cette courbe. En général, le corps est tel que la ligne G_0G_1 soit le lieu des centres de gravité des sections qui lui sont normales et elle prend alors le nom de *fibre moyenne* de la pièce. Nous lui donnerons ce nom, pour abréger le langage, tout en observant que les théorèmes de pure Statique qui vont suivre sont vrais, quelle que soit la courbe G_0G_1 tracée à l'intérieur du corps.

Soit AB la trace de la section sur le plan de la fibre moyenne; AB

sera la normale à cette ligne au point G où elle est coupée par la section. Cette section divise la pièce en deux parties. Quand nous parlerons des forces élastiques ayant leurs points d'application dans la section, nous entendrons celles exercées par la partie de gauche A_0B_0AB du corps sur celle de droite ABA_1B_1.

Concevons qu'on transporte toutes ces forces au point G.

Soient R la résultante de cette translation et M le moment du couple résultant correspondant. La force R est dans le plan de symétrie; soient T et N ses composantes suivant la ligne AB et la normale à la section ou la tangente à la fibre moyenne.

La force T ou somme des composantes tangentielles des forces élastiques est ce que nous avons déjà appelé l'*effort tranchant.*

La force N ou somme des composantes normales des forces élastiques se nomme la *compression* ou *tension* de la fibre moyenne.

Le couple résultant de la translation des forces élastiques au point G où la ligne AB coupe la fibre moyenne se nomme le *couple de flexion* relatif à ce point.

Le moment M de ce couple, c'est-à-dire la somme des moments des forces élastiques par rapport au point G se nomme le *moment fléchissant* ou *moment de flexion.*

Les composantes tangentielle et normale d'une force élastique se nomment souvent, par abréviation, *force élastique tangentielle ou normale.*

§ 189.

CONVENTIONS SUR LES SIGNES. — Il importe de bien préciser les signes des grandeurs que nous venons de définir.

Soit s l'arc G_0G compté de gauche à droite.

Nous prendrons le sens positif des s pour le sens positif de la normale à AB ou de la tangente à l'arc s. Il en résulte que nous regardons les forces élastiques normales comme positives quand elles représentent des *compressions;* c'est pourquoi nous appellerons N la *compression de la fibre moyenne.*

Lorsque nous rapporterons la position de la fibre moyenne à des axes de coordonnées qui seront rectangulaires, nous prendrons comme sens positif de la ligne AB ou de la normale à la fibre moyenne un sens tel que la normale parallèle à l'axe des y (c'est-

à-dire la normale au sommet de la fibre moyenne si l'axe des y est vertical) ait pour sens positif le sens des y positifs.

L'effort tranchant T sera positif ou négatif suivant qu'il sera ou non dirigé dans le sens de la normale positive.

Les moments (en particulier le moment de flexion M) seront, en général et sauf avis contraire, comptés positivement s'ils tendent à tourner leurs bras de levier dans le sens qui amènerait le demi-axe positif des x sur le demi-axe positif des y, comme l'indique la flèche.

Quand nous ne ferons pas usage de coordonnées, l'effort tranchant sera compté positivement dans un sens tel que, dans la section verticale de la pièce, il soit descendant.

Dans ce cas aussi les moments (en particulier les moments de flexion M) seront comptés positivement de gauche à droite.

§ 190.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX. — Ceci posé, considérons les forces extérieures, y compris, s'il y a lieu, les réactions des appuis, qui agissent entre la section AB et l'extrémité gauche de la poutre; transportons-les au point G et soient R′ leur résultante de translation, T′, N′ les composantes de cette force suivant la ligne AB et la normale à cette ligne; M′ le moment du couple résultant de cette translation.

Nous savons (§ 63) que les forces extérieures, y compris les réactions des appuis, qui agissent entre l'extrémité gauche de la pièce et une section quelconque AB, ont même résultante ou même couple résultant que les forces élastiques qui agissent dans cette section.

Ces deux systèmes de forces, qu'ils admettent ou non une résultante, sont donc équivalents et ont, par suite (§ 117, Rem. II), même résultante de translation et même moment résultant, c'est-à-dire que

$$T' = T, \quad N' = N, \quad M' = M.$$

Ainsi :

THÉORÈME I. — 1° *L'effort tranchant dans une section quelconque* X′X *d'une pièce à fibre moyenne plane, symétrique par rapport au plan de cette fibre et soumise à des forces quel-*

conques situées dans ce plan, peut se définir indifféremment la somme des forces élastiques tangentielles exercée dans la section X′X *ou la somme des projections sur cette section des forces extérieures (y compris les réactions des appuis) qui agissent à sa gauche.*

2° *La compression normale peut se définir soit la somme des forces élastiques normales, soit la somme des projections sur la normale à la section, des forces extérieures dont il vient d'être parlé.*

3° *Le moment de flexion dans la section considérée peut se définir soit la somme des moments, par rapport au point* G *où elle coupe la fibre moyenne, des forces élastiques qui y agissent, soit la somme des moments, relativement au point* G, *de ces mêmes forces extérieures.*

Corollaire I. — *Dans les poutres droites (ou pièces à fibres moyennes rectilignes) horizontales soumises à des charges verticales et reposant sur des appuis ne pouvant fournir que des réactions verticales, la compression de la fibre moyenne est partout nulle.*

Pour de telles pièces on n'a à considérer, dans chaque section, que le moment de flexion et l'effort tranchant.

Corollaire II. — *Si, dans une pièce quelconque, on considère deux sections infiniment voisines (fig.* 35, p. 279) *comprenant entre elles une force* F *de grandeur finie, normale à la fibre moyenne, les moments de flexion dans ces deux sections ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite, ainsi que la compression de la fibre moyenne; mais les efforts tranchants y diffèrent de toute la grandeur de la force* F.

(Si la force F est tangente à la fibre moyenne, l'effort tranchant et le moment de flexion dans les deux sections ne diffèrent qu'infiniment peu, et c'est la compression de la fibre moyenne qui se modifie brusquement de toute la grandeur de la force F.)

En effet, soient AB, A′B′ deux sections infiniment voisines comprenant entre elles la force F de grandeur finie, normale à la fibre moyenne.

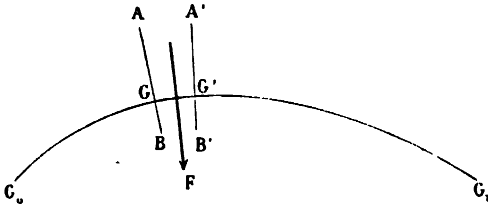
Le moment de flexion au point G est la somme des moments par rapport à ce point de toutes les forces agissant entre lui et l'extrémité de gauche G_0 de la pièce.

Le moment de flexion au point G′ se compose : 1° de la somme des moments de ces mêmes forces relativement au point G′, somme qui ne diffère qu'infiniment peu de la précédente ; 2° du moment relativement au point G′ de la force F, moment qui est lui-même infiniment petit.

On voit de même que la force F, quoique de grandeur finie, ne modifie qu'infiniment peu la compression de la fibre moyenne en G′, puisque sa projection sur la tangente à cette courbe en G′ est infiniment petite.

Mais, sur A′B′, elle se projette en vraie grandeur, de sorte que l'effort tranchant en G′ où elle intervient diffère de l'effort tranchant en G, où elle n'intervient pas, de toute la grandeur de cette force.

Fig. 35.



On démontrerait de même la proposition relative au cas où la force F est tangente à la fibre moyenne.

Corollaire III. — *Dans une poutre droite horizontale soumise à des charges verticales et posée sur des appuis ne donnant lieu qu'à des réactions verticales, les moments de flexion de deux sections infiniment voisines comprenant entre elles soit une force finie directement appliquée, soit un appui simple, ne diffèrent qu'infiniment peu, tandis que les efforts tranchants diffèrent de toute la grandeur de la force directement appliquée ou de la réaction de l'appui.*

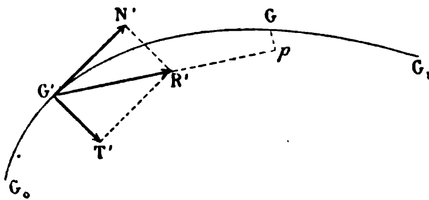
On peut donc parler du moment de flexion *sur un appui*, comme étant la limite de celui qui existe dans une section infini-

ment voisine prise soit à sa droite, soit à sa gauche ; tandis que l'effort tranchant doit être considéré dans l'une ou l'autre de deux pareilles sections suivant le but qu'on se propose.

THÉORÈME II. — *Quelles que soient les charges que subit une pièce à fibre moyenne plane, ces charges étant dans le plan de la fibre qui est plan de symétrie de la pièce et quels que soient le nombre et la nature des appuis, le moment de flexion* M *en un point quelconque* G *de la pièce peut être obtenu en ajoutant au moment de flexion* M′ *relatif à un point fixe* G′ *arbitrairement choisi à gauche de* G, *la somme des moments relativement à* G : 1° *de toutes les forces extérieures agissant entre* G′ *et* G ; 2° *de l'effort tranchant et de la compression de la fibre moyenne au point* G′.

En effet, le moment de flexion au point G (*fig.* 36) se com-

Fig. 36.



pose de la somme des moments relativement à ce point : 1° de toutes les forces, y compris les réactions des appuis, agissant entre lui et le point G′ ; 2° de toutes celles agissant entre le point G′ et l'extrémité gauche G_0 de la pièce.

Mais on ne change pas la somme des moments de ces dernières forces en les remplaçant par leur résultante de translation en G′ et le couple résultant correspondant. Or cette résultante R′ a pour composantes suivant la normale et la tangente à la fibre moyenne les forces N′ et T′, et le couple résultant a pour moment M′. Donc la somme de moments des forces 2° se compose de celle T′ et N′ et de celle des deux forces du couple de flexion en G′, laquelle est (§ 114) constante et égale à M′, quel que soit le point G.

THÉORÈME II *bis*. — *Le moment de flexion en un point* G *d'une pièce quelconque est, à une fonction linéaire près des coordon-*

nées de ce point, la somme des moments, relativement à ce point, des forces extérieures comprises entre lui et un point fixe G' *arbitrairement choisi à sa gauche.*

En effet, pour avoir le moment de flexion en G, il faut, d'après le théorème qui vient d'être établi, ajouter à la somme des moments, relativement à ce point, des forces comprises entre G' et G : 1° le moment fléchissant M' au point G', c'est-à-dire une quantité constante ou indépendante de la position du point G; 2° la somme des moments relativement à G des forces N' et T' ou le moment de leur résultante R'. Or, cette ligne R' est fixe, quel que soit le point G. Son moment est égal au produit de R' par la distance Gp. Et la distance d'un point G à une droite fixe R' est une fonction linéaire des coordonnées de ce point.

Théorème III. — *L'effort tranchant, dans une section* BGA (*fig.* 37, p. 282), *d'une pièce quelconque dont la fibre moyenne droite ou courbe est* G_0G_1, *est égal, en valeur absolue, à la dérivée du moment de flexion en ce point, prise relativement à l'arc* $s = G_0G$, *de la fibre moyenne comptée depuis l'extrémité gauche* G_0.

Cette dérivée doit être prise en signe contraire si (§ 189) l'on prend comme sens positif de la normale à la fibre moyenne le sens BA, tel que la normale parallèle à l'axe des y ait le sens des y positifs.

Le moment de flexion M en un point G est (théorème I) la somme des moments relativement à ce point de toutes les forces, y compris les réactions des appuis qui agissent entre G_0 et G.

Soit (*fig.* 37) c le point d'application de l'une quelconque de ces forces, qu'elle soit donnée ou que ce soit une réaction d'appui.

Rapportons le système à deux axes rectangulaires quelconques Ox, Oy. Soient α, β les coordonnées du point c pris à la gauche de AB, A et B les composantes parallèles aux axes de la force qui agit en c.

Si x et y sont les coordonnées du point G, le moment de la force appliquée en c ou la somme des moments de ses composantes A et B relativement au point G est, si le sens des moments positifs est

celui de la flèche allant de Ox vers Oy,

$$A(y-\beta)-B(x-\alpha),$$

et le moment M est la somme des moments de toutes les forces analogues agissant à gauche de la section AB.

Appelons $\sum_g$ cette somme

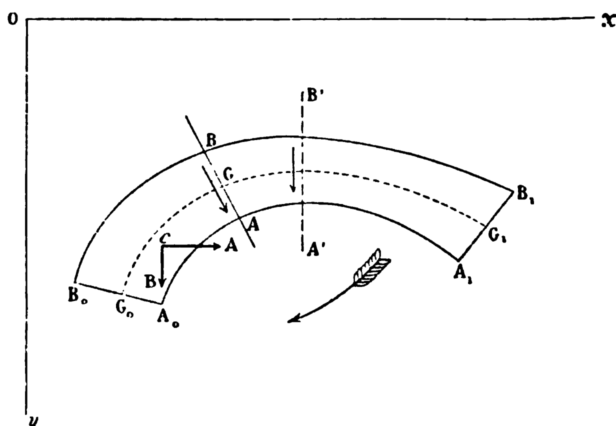
$$M=\sum_g[A(y-\beta)-B(x-\alpha)];$$

d'où

$$(a)\qquad -\frac{dM}{ds}=\sum_g\left(-A\frac{dy}{ds}+B\frac{dx}{ds}\right).$$

Or $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ sont les cosinus des angles que la tangente en G fait

Fig. 37.



avec les axes de coordonnées.

Les cosinus des angles que la normale BA fait respectivement avec ces mêmes axes sont

$$\pm\frac{dy}{ds},\quad \mp\frac{dx}{ds},$$

en prenant les signes supérieurs ou inférieurs suivant le sens positif qu'on attribue à la normale. Si on lui attribue le sens tel que, quand BA vient en B'A' parallèlement à l'axe des y, le sens positif soit

celui des y positifs, cela veut dire que pour $\frac{dy}{ds} = 0$ le cosinus de l'angle de la normale avec l'axe des y est $+1$, ce qui exige qu'on prenne les signes inférieurs.

Donc

$$-A\frac{dy}{ds} + B\frac{dx}{ds}$$

est la projection, sur BA, de la force appliquée en c, et le second membre de l'équation (a) est la somme des projections, sur cette ligne, de toutes les forces agissant à gauche de la section BA, c'est-à-dire l'effort tranchant que nous appelons T, en sorte que

$$T = -\frac{dM}{ds}. \tag{1}$$

Corollaire I. — *Aux points où le moment de flexion d'une pièce quelconque est maximum ou minimum, l'effort tranchant est nul et réciproquement.*

Corollaire II. — *Lorsque le moment de flexion d'une pièce est constant en tous ses points, l'effort tranchant est partout nul, et* vice versa.

A. — *Application aux poutres droites.*

§ 191.

Théorème IV. — *Quelles que soient les charges qui agissent sur une poutre droite et quels que soient le nombre et la nature des appuis, le moment de flexion en un point quelconque* G *d'une ravée peut s'obtenir en ajoutant au moment de flexion, en un point* G′ *arbitrairement choisi à sa gauche dans la même travée, la somme des moments relativement à* G : 1° *des forces* données *agissant entre* G′ *et* G ; 2° *de l'effort tranchant en* G.

En effet, appliquons le théorème II à deux points G et G′ (*fig.* 38, p. 284) appartenant à une même travée, de sorte qu'entre ces points n'agissent que des forces connues. D'ailleurs la compression N′ de la fibre moyenne, même si elle existe, passe par le point G et fournit, par suite, un moment nul. Donc, si G′x est l'axe des

x, G′ l'origine des abscisses, x l'abscisse du point G et m a somme des moments, relativement à G, des forces données qui agissent entre G et G′, on aura

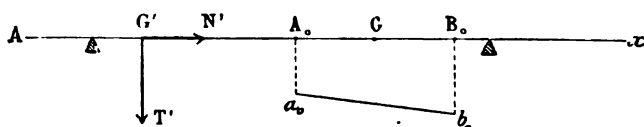
$$M = M' + m - T'x$$

ou

$$(2) \qquad M = m - T'x + M'.$$

Corollaire I. — *Quels que soient le nombre et la nature des appuis d'une poutre droite, le moment de flexion en un point d'une travée quelconque est, à une fonction linéaire près de l'abscisse de ce point, égal à la somme des moments relativement à ce point des forces données qui agissent entre lui et un point fixe* G′ *arbitrairement choisi à sa gauche, dans la même travée.*

Fig. 38.



On connaît donc *a priori* les moments en tous les points d'une travée à deux constantes près. Ces constantes changent d'une travée à l'autre.

Pour une poutre à n travées, il s'introduit donc $2n$ constantes indéterminées et que la théorie de l'élasticité permet, en général, seule de déterminer.

Corollaire II. — *Quels que soient le nombre et la nature des appuis d'une poutre, quelles que soient les charges qu'elle supporte, s'il existe soit une portion de travée, soit une travée entière* A_0B_0 *vide ou dépourvue de toute charge (même de celle due à son propre poids), le moment de flexion y est représenté par l'ordonnée d'une portion de droite.*

En effet, dans ce cas, en prenant le point G′ en A_0, on a $m = 0$ et la formule (2) donne

$$M = M' - T'x,$$

c'est-à-dire que le moment de flexion en tout point G compris entre

A_0 et B_0 est une fonction linéaire de l'abscisse de ce point. Si donc en chaque point G on construit une ordonnée qui, à une échelle convenue, représente le moment de flexion M, le lieu des extrémités de ces ordonnées sera une portion de droite $a_0 b_0$, de sorte que, si l'on connaît les moments $A_0 a_0$ et $B_0 b_0$ en A_0 et B_0, on les connaîtra dans toute la partie $A_0 B_0$.

Corollaire III. — *Quels que soient le nombre et la nature des appuis d'une poutre, quelles que soient les charges qu'elle supporte, s'il existe soit une portion de travée, soit une travée entière supportant une charge uniformément répartie à raison de* p^{kg} *par unité de longueur, le moment de flexion en tout point* G *compris entre* A_0 *et* B_0 *est l'ordonnée d'une parabole à axe vertical dont le paramètre est* $-\frac{2}{p}$, *dont la forme est, par suite, connue et indépendante des charges et appuis du surplus de la poutre, sa position seule dépendant de ces éléments.*

En effet, dans la formule (2) et la *fig.* 38 (p. 284) en prenant le point G′ en A_0, m est la somme des moments, relativement à G, des charges directement appliquées entre A_0 et G. Prenons le point A_0 pour origine des abscisses. Alors la charge totale entre A_0 et G est égale à $p \times A_0 G = px$; elle est appliquée au milieu de $A_0 G$ et a, par suite, pour bras de levier $\frac{x}{2}$; son moment, qui est égal à la somme des moments des charges elles-mêmes, est donc, en valeur absolue, $\frac{px^2}{2}$. Si elle est descendante, ainsi que l'axe des y, ce moment est négatif, les moments positifs comptés de gauche à droite. Ainsi

$$m = -\frac{px^2}{2};$$

d'où

$$M = -\frac{px^2}{2} - T'x + M', \tag{3}$$

équation d'une parabole à axe vertical, de forme déterminée et dont la position seule varie avec les coefficients T′ et M′.

Théorème V. — *L'effort tranchant compté positivement de haut en bas dans une section d'une poutre horizontale à appuis*

en nombre quelconque est égale à la dérivée, prise en signe contraire, du moment fléchissant par rapport à l'abscisse de la section.

Ce théorème est un cas particulier du théorème III.

Ainsi, T et M étant l'effort tranchant et le moment de flexion dans une section d'abscisse x, on a

$$(4) \qquad T = -\frac{dM}{dx}.$$

Corollaire I. — *L'effort tranchant en un point d'une poutre est le coefficient angulaire pris en signe contraire de la tangente en ce point, à la ligne représentative des moments de flexion.*

Si, en effet, M est représenté, à une échelle convenue, par une ordonnée, le coefficient angulaire changé de signe de la tangente à la ligne lieu des extrémités de ces ordonnées représente l'effort tranchant.

Il y a toutefois une remarque à faire à ce sujet : pour obtenir le coefficient angulaire d'une droite, il suffit de diviser l'une quelconque des ordonnées de la droite par l'abscisse correspondante comptée depuis le point où la droite coupe l'axe des abscisses. Ici on devra mesurer l'abscisse à l'échelle adoptée pour les abscisses ou la longueur de la poutre et l'ordonnée à l'échelle adoptée pour représenter les moments de flexion.

Corollaire II. — *L'effort tranchant dans une portion vide d'une poutre est constant; l'effort tranchant dans une portion de poutre portant une charge uniforme p est l'ordonnée d'une droite de coefficient angulaire p, dont la direction est donc indépendante des appuis et charges du surplus de la poutre, la position de cette droite dépendant seule de ces éléments.*

§ 192.

Théorème VI. — 1° *Le moment de flexion en un point d'une travée d'une poutre à appuis en nombre quelconque, sous l'influence de charges quelconques, est, à une fonction linéaire*

près de l'abscisse de ce point, le même que si cette travée était séparée du reste de la poutre et posée sur appuis simples à ses deux extrémités.

2° *L'effort tranchant en un point de la travée est, à une constante près, le même que si la travée était ainsi séparée du reste de la poutre.*

Soient M le moment de flexion véritable en un point G d'une travée et μ le moment de flexion qu'y produirait la charge, quelle qu'elle soit, qui y règne, si la travée existait seule. Soit enfin m la somme des moments, relativement au point G, des charges directement appliquées entre ce point et l'extrémité gauche de la travée. En appliquant la formule (2) successivement à la poutre réelle et à celle obtenue en séparant la travée de ses voisines et prenant le point G' infiniment près de l'appui gauche, on voit que les deux fonctions M et μ ne diffèrent l'une et l'autre de m que par une fonction linéaire. Donc elles ne diffèrent entre elles que par une telle fonction.

Ainsi

$$M = \mu + Ax + B, \tag{5}$$

A et B étant deux quantités constantes pour tous les points d'une travée, mais changeant d'une travée à l'autre.

On tire de là

$$-\frac{dM}{dx} = -\frac{d\mu}{dx} + A,$$

ce qui, en vertu de (4), démontre la seconde partie de la proposition.

§ 193.

EXPRESSION ANALYTIQUE DU MOMENT DE FLEXION DANS UNE POUTRE A DEUX APPUIS SIMPLES. — On voit, par ce qui précède, que le moment de flexion et l'effort tranchant des poutres à deux appuis simples jouent un rôle particulièrement important dans la théorie des poutres en général. Il nous sera utile, pour cette raison, de les connaître non seulement graphiquement, mais aussi analytiquement.

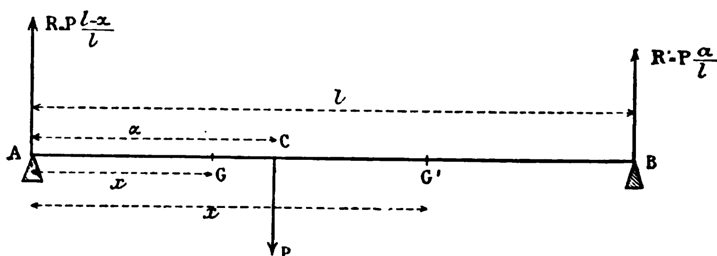
1° **Charge unique.** — Supposons d'abord (*fig.* 39, p. 287) une telle poutre AB soumise à l'action d'une seule charge P, ayant pour abscisse AC $= \alpha$. Nous compterons, à moins d'indications contraires, les abscisses depuis l'appui gauche de la poutre.

Les réactions R et R′ qu'elle fait naître devant lui faire équilibre, la somme des moments de ces trois forces relativement à un point quelconque est nulle. Si nous prenons les moments successivement par rapport aux appuis B et A, il vient, en appelant $l =$ AB la longueur de la poutre,

$$R = \frac{P(l-\alpha)}{l}, \quad R' = \frac{P\alpha}{l}.$$

Cherchons le moment de flexion μ relativement à un point G d'abscisse x, que nous supposons d'abord placé entre A et C. Par définition même, on a

Fig. 39.



$$\mu = Rx = P(l-\alpha)\frac{x}{l}.$$

Si le point G est en G′ entre C et B, le moment de flexion y sera, par définition, la somme des moments des deux forces R et P; mais, comme la somme des moments des trois forces en équilibre R, P et R′ est nulle, on peut encore dire que le moment de flexion en G′ est égal au moment, relativement à ce point, de la force R′ changé de signe, soit

$$\mu = R'(l-x) = P\alpha\frac{l-x}{l}.$$

Ainsi :

Pour $x < \alpha$,

$$\mu = P(l-\alpha)\frac{x}{l}; \tag{6}$$

Pour $x > \alpha$,

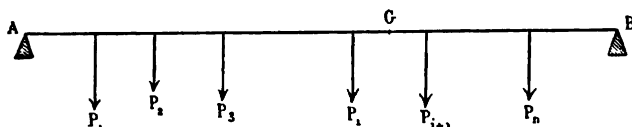
$$(6') \qquad \mu = P\alpha \frac{l-x}{l}.$$

Pour $x = \alpha$ l'une et l'autre formule conviennent également.

2° **Charges isolées en nombre quelconque.** — Supposons maintenant (*fig.* 40) un nombre quelconque de forces P_1, P_2, P_3, P_4, ..., P_i, P_{i+1}, ..., P_n d'abscisses α_1, α_2, α_3, ..., α_i, α_{i+1}, ..., α_n et cherchons le moment de flexion μ relatif à un point quelconque G d'abscisse x.

Appelons P l'une quelconque des forces et α son abscisse.

Fig. 40.



Les forces P_1, P_2, ..., P_i placées à gauche de G, c'est-à-dire pour lesquelles $\alpha < x$, fournissent chacune un moment de flexion donné par l'expression (6'); les autres fournissent chacune un moment de flexion donné par l'équation (6).

Donc on aura, quelle que soit la position du point G,

$$\mu = \sum_g P\alpha \frac{l-x}{l} + \sum_d P(l-\alpha)\frac{x}{l},$$

$\sum_g$ indiquant une sommation qui s'étend à toutes les forces placées à gauche du point G et $\sum_d$ une sommation s'étendant à toutes celles qui sont à sa droite.

Ce qui change d'un terme à l'autre de ces sommes, ce sont les forces P et leurs abscisses α, mais non x et l.

On peut donc écrire

$$(7) \qquad \mu = \frac{l-x}{l}\sum_g P\alpha + \frac{x}{l}\sum_d P(l-\alpha),$$

expression facile à retenir.

S'il existe une force au point G, on peut indifféremment la con-

sidérer comme infiniment peu à gauche ou infiniment peu à droite de ce point, ou comme partiellement dans le premier cas, partiellement dans le second. Il est évident *a priori* que cela n'altère qu'infiniment peu, c'est-à-dire que cela n'altère pas la valeur du moment de flexion ; c'est ce que la formule montre ; car un terme de $\sum\limits_g$ est $\frac{l-x}{l}$ Pα et un terme de $\sum\limits_d$ est $\frac{x}{l}$ P $(l-\alpha)$. Or, pour $\alpha = x$, les deux expressions sont identiques.

Appelons Σ une somme s'étendant à la travée entière, en sorte que

$$\sum = \sum_g + \sum_d.$$

On peut encore écrire, en réunissant les termes en x,

$$\mu = \sum_g \mathrm{P}\alpha + x\left(\sum_d \mathrm{P} - \frac{1}{l}\sum \mathrm{P}\alpha\right); \tag{8}$$

d'où, pour l'effort tranchant que nous appellerons τ, on aura, à cause de l'équation (4) du § 191,

$$\tau = -\frac{d\mu}{dx}$$

ou

$$\tau = \frac{1}{l}\sum \mathrm{P}\alpha - \sum_d \mathrm{P}. \tag{9}$$

3° **Charges continues quelconques.** — Si, au lieu de charges isolées, on a des charges continues de telle sorte que, sur un élément $d\alpha$ de la poutre pris à partir du point d'abscisse α, il règne une charge $p\,d\alpha$, p étant une fonction donnée quelconque de α, il faudra, dans les formules ci-dessus, faire $\mathrm{P} = p\,d\alpha$ et les sommations $\sum\limits_g$, $\sum\limits_d$, $\sum$ se changeront respectivement en $\int_0^x$, $\int_x^l$, $\int_0^l$, de sorte qu'il vient, à la place des formules (7), (8) et (9),

$$\mu = \frac{l-x}{l}\int_0^x p\alpha\,d\alpha + \frac{x}{l}\int_x^l p(l-\alpha)\,d\alpha, \tag{7'}$$

$$\mu = \int_0^x p\alpha\,d\alpha + x\left(\int_x^l p\,d\alpha - \frac{1}{l}\int_0^l p\alpha\,d\alpha\right), \tag{8'}$$

$$\tau = \frac{1}{l}\int_0^l p\alpha\,d\alpha - \int_x^l p\,d\alpha. \tag{9'}$$

4° **Charge uniforme sur toute la poutre.** — Si la charge est uniforme, p est constant; les intégrations peuvent s'effectuer. Mais, dans ce cas, le résultat est évident *a priori*. Nous savons (§ 191) que μ est une fonction du second degré dont le terme en x^2 est $-\frac{px^2}{2}$. D'ailleurs μ doit s'annuler pour $x = 0$ et $x = l$. Donc la fonction du second degré est, à un facteur constant près, $x(l - x)$ et, puisque le terme en x^2a $-\frac{p}{2}$ pour coefficient, on a nécessairement

$$(10) \qquad \mu = \frac{p}{2} x(l - x);$$

d'où

$$(11) \qquad \tau = -\frac{d\mu}{dx} = p\left(x - \frac{l}{2}\right).$$

Si l'origine des coordonnées était au milieu de la travée, on trouverait de même

$$(10') \qquad \mu = \frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right),$$

$$(11') \qquad \tau = px.$$

5° **Charge uniforme sur une partie de la poutre.** — Supposons que la charge p ne règne que sur une longueur λ; soit α_0 l'abscisse du milieu de cette longueur. La réaction sur l'appui de gauche, produite par la charge totale $p\lambda$, est, comme au 1° ci-dessus,

$$(12) \qquad R = p\lambda \frac{l - \alpha_0}{l};$$

celle sur l'appui de droite est

$$(12') \qquad R' = p\lambda \frac{\alpha_0}{l}.$$

Donc, entre l'appui de gauche et le commencement de la charge, soit de $x = 0$ à $x = \alpha_0 - \frac{\lambda}{2}$,

$$(13) \qquad \mu = Rx = p\lambda \frac{l - \alpha_0}{l} x.$$

Dans la longueur λ, soit de $x = \alpha_0 - \frac{\lambda}{2}$ à $x = \alpha_0 + \frac{\lambda}{2}$,

$$\mu = Rx - \frac{1}{2} p \left(x - \alpha_0 + \frac{\lambda}{2}\right)^2$$

ou

$$(13_1) \qquad \mu = p\lambda \frac{l-\alpha_0}{l} x - \frac{1}{2} p \left(x - \alpha_0 + \frac{\lambda}{2}\right)^2.$$

Entre l'extrémité de droite de la charge et l'appui de droite, soit de $x = \alpha_0 + \frac{\lambda}{2}$ à $x = l$,

$$(13_2) \qquad \mu = R'(l-x) = p\lambda \frac{\alpha_0}{l}(l-x).$$

Les efforts tranchants correspondants seraient

$$(14) \qquad \begin{cases} \tau = -p\lambda \dfrac{l-\alpha_0}{l}, \\ \tau = -p\lambda \dfrac{l-\alpha_0}{l} + p\left(x - \alpha_0 + \dfrac{\lambda}{2}\right), \\ \tau = \quad p\lambda \dfrac{\alpha_0}{l}. \end{cases}$$

6° **Charge d'eau ou de terre.** — Supposons une charge régnant sur une longueur λ (égale ou inférieure à celle de la poutre) à partir de l'appui gauche.

Au droit de cet appui, elle a la valeur p_0; à son autre extrémité, soit pour $\alpha = \lambda$, elle a la valeur p_1. Entre ces deux points, elle varie linéairement, de sorte que son expression, pour toute abscisse α inférieure à λ, est

$$p = p_0 + (p_1 - p_0)\frac{\alpha}{\lambda}.$$

Pour toute valeur de α supérieure à λ, on a $p = 0$.

Cette charge peut être considérée comme la superposition :

1° D'une charge uniforme p_0 régnant de $\alpha = 0$ à $\alpha = \lambda$;

2° D'une charge dont la ligne de charge (§ 25) serait une droite partant de l'appui gauche et ayant une ordonnée égale à $p_1 - p_0$ au point $\alpha = \lambda$.

Le moment de flexion en un point d'abscisse x, dû à la première, est, d'après les formules (13_1) et (13_2) où l'on doit faire $\alpha_0 = \frac{\lambda}{2}$:

1° Pour $x < \lambda$:

$$\mu = p_0\lambda\left(1 - \frac{\lambda}{2l}\right)x - \frac{p_0 x^2}{2};$$

2° Pour $x > \lambda$:

$$\mu = p_0 \frac{\lambda^2}{2l}(l-x).$$

La seconde a, pour résultante, l'aire du triangle qui lui sert de surface de charge, soit

$$(p_1 - p_0)\frac{\lambda}{2},$$

et passe par le centre de gravité de ce triangle, soit à une distance $\frac{2\lambda}{3}$ de l'appui de gauche. Donc, les réactions qu'elle fait naître sur les appuis de gauche et de droite sont respectivement

$$R = (p_1 - p_0)\frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{2\lambda}{3l}\right), \quad R' = (p_1 - p_0)\frac{\lambda^2}{3l}.$$

Ceci posé :

1° Le moment de flexion qu'elle détermine en un point G d'abscisse $x < \lambda$ se compose des moments relativement à ce point, de la réaction R et de la résultante des charges agissant à sa gauche, soit sur une longueur x. Ces charges sont représentées par un triangle ayant pour base l'abscisse x et pour hauteur l'ordonnée de la ligne de charge répondant à cette abscisse, soit

$$(p_1 - p_0)\frac{x}{\lambda}.$$

Leur résultante est l'aire de ce triangle, soit

$$(p_1 - p_0)\frac{x^2}{2\lambda};$$

elle passe en son centre de gravité, dont l'abscisse est $\frac{2}{3}x$; sa distance au point G est donc $\frac{1}{3}x$ et son moment, relativement à ce point,

$$-(p_1 - p_0)\frac{x^2}{2\lambda} \times \frac{x}{3} = -(p_1 - p_0)\frac{x^3}{6\lambda}.$$

Par suite,

$$\mu = Rx - (p_1 - p_0)\frac{x^3}{6\lambda}$$

ou

$$\mu = (p_1 - p_0)\left[\frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{2\lambda}{3l}\right)x - \frac{x^3}{6\lambda}\right].$$

2° Pour $x > \lambda$,

$$\mu = R'(l - x) = (p_1 - p_0)\frac{\lambda^2}{3l}(l - x).$$

En ajoutant les valeurs de μ dues à la charge p_0 et à celle dont on vient de s'occuper, on aura définitivement :

1° Pour $x < \lambda$,

$$(14)\quad \mu = p_0\lambda\left(1 - \frac{\lambda}{2l}\right)x - \frac{p_0 x^2}{2} + (p_1 - p_0)\left[\frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{2\lambda}{3l}\right)x - \frac{x^3}{6\lambda}\right];$$

2° Pour $x > \lambda$,

$$(14')\quad \mu = \left[p_0\frac{\lambda^2}{2l} + (p_1 - p_0)\frac{\lambda^2}{3l}\right](l - x).$$

Si la charge règne sur toute la longueur de la poutre, on a $\lambda = l$ et, en un point quelconque d'abscisse x, il faut appliquer l'équation (14) qui devient

$$(16)\quad \mu = \frac{x(l-x)}{2}\left[p_0 + \frac{p_1 - p_0}{3}\left(1 + \frac{x}{l}\right)\right]$$

et

$$(17)\quad \tau = p_0\left(x - \frac{l}{2}\right) + \frac{p_1 - p_0}{2}\left(\frac{x^2}{l} - \frac{l}{3}\right).$$

7° **Aiguilles d'un barrage.** — Si l'appui inférieur de l'aiguille est pris pour origine, si h est la hauteur de l'eau au-dessus du seuil de l'aiguille, on a, en kilogrammes,

$$p_0 = 1000\,h\,\varepsilon,\quad p_1 = 0,$$

ε étant la largeur de l'aiguille, et

$$(18)\quad \begin{cases} \mu = p_0\dfrac{x(l-x)}{3}\left(1 - \dfrac{x}{2l}\right), \\ \tau = p_0\left(-\dfrac{x^2}{2l} + x - \dfrac{l}{3}\right). \end{cases}$$

Le moment maximum a lieu pour $\tau = 0$ soit pour

$$x^2 - 2lx + \tfrac{2}{3}l^2 = 0,$$

d'où

$$x = l\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0{,}43\,l.$$

8° **Cas général.** — Si l'on a à la fois des charges isolées et des charges continues quelconques, on prendra pour μ la somme des seconds membres des équations (7) et (7') ou (8) et (8') et pour τ la somme des expressions (9) et (9').

Si l'on a des charges isolées quelconques et une charge uniforme, on ajoutera pour μ les expressions (7) et (10) et pour τ celles (9) et (11).

Remarque. — Les formules qui précèdent, en particulier, celles (7), (8), (9) subsistent si la poutre se prolonge au delà de ses appuis, pourvu que les abscisses α des charges placées à gauche de A (*fig.* 40, p. 289) soient comptées négativement.

§ 194.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES MOMENTS DE FLEXION ET EFFORTS TRANCHANTS DANS LES POUTRES DROITES. — THÉORÈME VII. — *Le moment de flexion dans une section d'une poutre horizontale posée sur deux appuis simples et soumise à des charges verticales quelconques est égal au produit de la distance polaire d'un polygone funiculaire quelconque relatif à ces charges, par l'ordonnée que cette section détermine entre le polygone dont les côtés extrêmes sont prolongés jusqu'aux verticales des appuis et la corde correspondante.*

Soient (*fig.* 93, *Pl. XXI*) les forces verticales

1, 2, 3, 4, 5, 6

représentées (*fig.* 93) par

1, 2, 3, 4, 5, 6

et agissant sur la poutre horizontale AB posée sur les appuis A et B sans encastrement.

Construisons le polygone funiculaire $8'1'2'3'4'5'6'7'$ relatif au pôle quelconque O et limité aux verticales des appuis en $7'$ et $8'$.

Si nous menons la corde $7'\,8'$ et le rayon polaire correspondant $O\omega$, les longueurs $b\omega = 7$ et $\omega a = 8$ sont les grandeurs des réactions 7 et 8 qu'exercent les appuis B et A.

Considérons la section quelconque $\alpha g \beta$ qui détermine entre le polygone et la corde l'ordonnée ab ; je dis que le moment de flexion en g est le produit ab $\times\, d$, d étant la distance polaire, l'un des facteurs, celui que l'on veut, étant mesuré à l'échelle des forces et l'autre à l'échelle des longueurs.

En effet, prolongeons le côté $2'\,1'$ coupé par la verticale de g jusqu'à sa rencontre en I avec la corde.

Le point I appartient à la résultante R des forces, y compris les réactions des appuis, qui agissent à gauche de g. Cette force est d'ailleurs $R = \omega C$ ou la somme des forces 8 et 1.

Le moment de flexion cherché est

$$R \times Ii,$$

Ii étant la distance du point I à ab, ou

$$\omega C \times Ii.$$

Or, les triangles Iab et $o\omega C$ étant semblables, leurs bases sont entre elles comme leurs hauteurs; on a

$$\frac{ab}{\omega C} = \frac{Ii}{d}$$

ou

$$\omega C \times Ii = ab \times d,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans le premier membre, l'un des facteurs étant mesuré à l'échelle des forces, l'autre à l'échelle des longueurs, il doit en être de même des deux facteurs du second membre.

Corollaire I. — *L'effort tranchant en g est, par définition, représenté, sur le polygone des forces, par la longueur* ωC *comprise entre le rayon polaire* 1.2 *qui répond au côté* 1'.2', *du polygone funiculaire coupé par la verticale du point g et l'origine* ω *déterminée par le rayon parallèle à la corde, de sorte que, si l'on représente les efforts tranchants par les ordonnées comptées depuis l'horizontale* $\omega\omega'$, *on obtient la ligne en escalier de la fig.* 93.

Remarque. — Les constructions qui précèdent s'appliquent encore si la poutre se prolonge au delà de ses appuis et porte des charges sur ses prolongements.

§ 195.

Théorème VIII. — *Étant donnée une poutre à appuis en nombre quelconque, avec ou sans encastrement, portant des charges verticales quelconques, si l'on trace :*

1° *Un polygone funiculaire quelconque relatif aux charges données qui agissent dans une travée ;*

2° *Une droite convenablement choisie dans le plan,*

Le moment de flexion, dans une section quelconque de la travée, est égal au produit de l'ordonnée correspondante à cette section, comprise entre la droite et le polygone, par la distance polaire de celui-ci.

Cette droite se nomme la droite de fermeture *du polygone.*

Supposons que la poutre AB, considérée au paragraphe précédent (*fig.* 93, *Pl. XXI*), soit une travée d'une poutre quelconque.

Soient M le moment de flexion en g et μ ce que serait ce moment si la travée AB était isolée et posée sur les appuis simples A et B. On a (§ 192)

$$M = \mu + Ax + B,$$

A et B étant deux constantes et x l'abscisse du point g comptée sur la droite AB; mais la forme linéaire $Ax + B$ subsiste évidemment si l'on compte les abscisses sur une autre droite.

Comptons-les sur la corde 7′ 8′ du polygone funiculaire.

En vertu du théorème VII, si l'on appelle z l'ordonnée ab comptée depuis cette corde, on a

$$\mu = z \times d,$$

d étant la distance polaire du polygone funiculaire. Donc

$$M = z \times d + Ax + B$$

ou

$$M = d\left(z + \frac{A}{d}x + \frac{B}{d}\right)$$

Construisons la droite

$$y = -\frac{A}{d}x - \frac{B}{d},$$

l'ordonnée y étant toujours comptée depuis la corde 7′ 8′. Soit 7″ 8″ cette droite. Alors

$$M = d(z - y) = d \times \text{ca}.$$

Remarque I. — Les ordonnées ca comptées depuis la ligne de fermeture doivent être portées de haut en bas si les moments sont positifs et de bas en haut dans le cas contraire. C'est, en effet, la convention que nous avons faite implicitement pour les ordonnées ba de la poutre à appuis simples, puisque pour celle-ci tous les moments de flexion sont positifs (car, près de l'appui gauche, le moment de la réaction prédomine, et il tend à tourner son bras de levier de gauche à droite; donc il est positif et, comme le moment de flexion ne s'annule pas jusqu'à l'appui opposé, il reste toujours

positif). Or les ordonnées ba comptées depuis la corde ont été portées de haut en bas, ainsi que les ordonnées bc de la droite de fermeture ; il faut donc qu'il en soit de même de celles ca.

On voit qu'ici le moment de flexion s'annule aux points γ et γ' où la ligne de fermeture coupe le polygone. Entre ces points il est positif et, entre chacun d'eux et l'appui voisin, il est négatif.

Remarque II. — Les moments de flexion sur les appuis sont représentés par les produits des ordonnées $8''8'$, $7''7'$ par la distance polaire et sont négatifs. Donc, réciproquement, ayant tracé un polygone funiculaire $8'\gamma\gamma'7'$ avec une distance polaire d, pour avoir la ligne de fermeture, il suffit, de ses points d'intersection $8'$ et $7'$ avec les verticales des appuis, de mener des ordonnées $8'\,8''$, $7'\,7''$ égales aux quotients changés de signe des moments de flexion sur ces appuis par la distance polaire et de joindre les extrémités de ces deux ordonnées.

§ 196.

Théorème IX. — *Étant donnée une poutre à appuis quelconques, soumise à des charges verticales, sur chaque appui on porte une ordonnée égale au quotient du moment de flexion sur cet appui par une longueur quelconque d, cette ordonnée mesurée à l'échelle des forces et la longueur d mesurée à l'échelle des longueurs, les ordonnées positives portées dans un sens (par exemple de haut en bas) et les ordonnées négatives de bas en haut.*

Si, par les extrémités des ordonnées relatives aux deux appuis consécutifs de chaque travée on fait passer un polygone funiculaire de distance polaire d des charges données qui agissent sur cette travée, en chaque point le produit de la distance polaire par l'ordonnée du polygone représente le moment de flexion en ce point.

En effet, si l'on reporte les ordonnées ac à partir de la ligne AB considérée comme axe des abscisses, ces ordonnées multipliées par d fournissent toujours les moments de flexion. Mais on obtient ainsi (§ 43 *bis*) un polygone funiculaire de même distance polaire d que le premier. Or ce polygone est déterminé par deux de ses points, par les extrémités des ordonnées sur les appuis.

B. *Application aux arcs.*

§ 197.

THÉORÈME X. — *Étant donné un arc posé sur appuis de niveau ou non, simples ou encastrés et soumis à des charges verticales quelconques, si l'on construit le polygone des pressions* (§ 69), *en chaque point le produit de la distance polaire de ce polygone par la portion d'ordonnée correspondante comprise entre lui et l'arc donné* (*les ordonnées étant comptées depuis l'arc positivement dans le sens ascendant si l'arc est* supporté, *négativement s'il est* suspendu) *représente le moment de flexion en ce point.* (*Dans ce produit l'un des facteurs est mesuré à l'échelle des longueurs, l'autre à l'échelle des forces.*)

En effet, soit (*fig.* 100, *Pl. XXII*) C_0C_1 la fibre moyenne d'un arc posé sur deux appuis A_0B_0 et A_1B_1 avec ou sans encastrement et soumis à des charges verticales

1, 2, 3, 4, 5, 6

représentées sur le polygone des forces (*fig.* 100) par les côtés

1, 2, 3, 4, 5, 6.

Soit C_0r_0 la réaction de l'appui de gauche, C_0 étant le centre de pression de la section extrême de gauche. (Si l'arc est posé sur un simple tourillon G_0, les points C_0 et G_0 coïncideront.)

Menons par l'origine a du polygone des forces la ligne aO égale, parallèle et de sens opposé à la réaction C_0r_0 et construisons le polygone funiculaire des charges données ayant le point O pour pôle. Soit $C_0.1.2.3.4.5.6.C_1$ ce polygone, qui est, comme nous le savons (§ 69), le polygone des pressions de l'arc.

Soit GC une section verticale quelconque; le côté 3.4 qui coupe cette section est la ligne d'action de la résultante r de toutes les forces, y compris la réaction r_0 de l'appui gauche, agissant entre cet appui et le point G, et la grandeur de cette résultante est représentée sur le polygone des forces par le rayon polaire correspondant 3.4 ou Oc.

Donc, le moment de flexion en G n'est autre que le moment

par rapport à ce point de la force r (puisque le moment de cette résultante r est égal à la somme des moments de ses composantes, c'est-à-dire des forces agissant entre le point G et l'appui gauche).

Décomposons la force r en deux autres, l'une Cq_0 horizontale, l'autre Ch verticale. Ces composantes sont représentées sur le polygone des forces par les longueurs Oi et ic dont la première est la distance polaire du polygone et représente la poussée horizontale de l'arc, poussée que nous appellerons q_0. Elle est la même pour toutes les sections GC; la composante verticale Ch varie seule.

Le moment de r par rapport au point G se réduit au moment de cette force constante q_0, puisque le moment de Ch est nul, cette force passant par le point G.

Ainsi, si M est le moment de flexion au point G, on a

$$M = q_0 \times GC,$$

le facteur q_0 mesuré à l'échelle des forces et celui GC à l'échelle des longueurs ou inversement.

D'ailleurs, le moment de q_0 est positif si le point C est au-dessus de G, c'est-à-dire que les ordonnées comptées depuis l'arc sont positives au-dessus de l'arc et négatives au-dessous.

Si l'arc était suspendu, ce serait l'inverse.

§ 198.

LE POLYGONE DES PRESSIONS DÉFINI COMME POLYGONE DES MOMENTS DE FLEXION. — On peut, d'après cela, donner une nouvelle définition du polygone des pressions. Soient G_0g_0 et G_1g_1 les ordonnées verticales menées par les extrémités de la fibre moyenne jusqu'à leurs rencontres en g_0 et g_1 avec le polygone des pressions. Si M_0 et M_1 sont les moments de flexion aux points G_0 et G_1, on aura

$$M_0 = q_0 \times G_0g_0,$$
$$M_1 = q_0 \times G_1g_1.$$

Donc, pour avoir le polygone des pressions, il suffit : 1° par les extrémités G_0 et G_1 de la fibre moyenne, de mener des ordonnées verticales égales aux quotients des moments de flexion en ces points par la poussée de l'arc, ces ordonnées mesurées à l'échelle des longueurs et, si l'arc est supporté, dirigées de bas en haut ou de haut

en bas, suivant que les moments M_0 et M_1 sont positifs ou négatifs ; 2° de construire le polygone funiculaire des forces données de distance polaire q_0 (q_0 mesuré à l'échelle des forces) et passant par les points g_0 et g_1 (Probl. IV, § 45).

§ 199.

Cette considération permet de généraliser utilement, au point de vue pratique, le théorème X. En effet, les ordonnées comprises entre l'arc et le polygone des pressions sont, en général, très petites, et il peut être utile de les avoir, sur l'épure, amplifiées dans une certaine mesure. Concevons qu'on mène la corde G_0G_1 de l'arc, puis qu'on amplifie dans le rapport $n : 1$ les ordonnées de l'arc et celles du polygone funiculaire comptées depuis cette corde.

Les ordonnées comprises entre l'arc et le polygone seront amplifiées dans le même rapport.

Mais le nouveau polygone ainsi obtenu est encore (§ 43 *bis*) un polygone funiculaire des forces données, ayant une distance polaire n fois plus petite que celle du polygone des pressions. Cette dernière étant q_0, la nouvelle sera

$$d = \frac{q_0}{n}.$$

De là, le théorème suivant :

Théorème XI. — *Si, par les extrémités* G_0 *et* G_1 *de la fibre moyenne d'un arc, on élève des verticales égales aux quotients* $\frac{M_0}{d}, \frac{M_1}{d}$ *des moments de flexion, en ces points, par une longueur arbitraire* d, *ces ordonnées étant mesurées à l'échelle des forces, ascendantes ou descendantes suivant que* M_0 *et* M_1 *sont positifs ou négatifs (si l'arc est supporté, c'est l'inverse s'il est suspendu), et que, par les extrémités de ces ordonnées on fasse passer le polygone funiculaire de distance polaire* d *des charges données, tournant sa concavité dans le même sens que l'arc donné* (Probl. IV du § 45), *puis qu'on amplifie les ordonnées verticales de cet arc comptées depuis sa corde, dans le rapport* $q_0 : d$ *de sa poussée horizontale à la distance polaire* d, *les portions d'ordonnées comprises entre le nouvel arc obtenu et le*

polygone funiculaire représentent les quotients $\frac{M}{d}$ *des moments de flexion aux divers points de l'arc par la distance polaire* d, *en sorte que, si* z *est l'une de ces ordonnées, on a*

$$M = d \times z.$$

Dans ce produit, l'un des facteurs est à mesurer à l'échelle des forces, l'autre à l'échelle des longueurs.

Corollaire. — *Pour que le moment de flexion d'une pièce soit nul partout, il est nécessaire que sa fibre moyenne coïncide avec l'un des polygones funiculaires des charges données qui la sollicitent.*

Remarque I. — Si l'arc G_0G_1 se réduit à une poutre droite, c'est-à-dire à sa corde, alors les ordonnées de l'arc comptées depuis sa corde sont nulles; si on les amplifie dans le rapport $q_0 : d$, elles restent toujours nulles, d'où résulte le théorème VI comme cas particulier de celui-ci. Ainsi le théorème qui fait l'objet du précédent paragraphe, et qui se démontre bien simplement, résume, à lui seul, toute cette théorie, qu'il s'agisse des arcs ou des poutres droites.

Dans le cas des arcs, les ordonnées positives sont comptées dans un sens déterminé suivant que l'arc présente sa concavité vers le haut ou vers le bas. Si l'arc se réduit à une droite, ce sens est arbitraire et nous avons adopté les ordonnées descendantes pour représenter les moments de flexion positifs.

Il est à peine besoin de dire que, si l'arc était à un nombre quelconque de travées solidaires, la proposition subsisterait, rien dans la démonstration ne particularisant les réactions des appuis.

§ 200.

On aurait pu déduire le théorème XI du suivant :

Théorème XII. — *Le moment de flexion en un point d'un arc quelconque soumis à des charges verticales est, à une fonction linéaire près des coordonnées de ce point, égal au moment de flexion* μ *au point situé sur la même verticale que* G, *d'une*

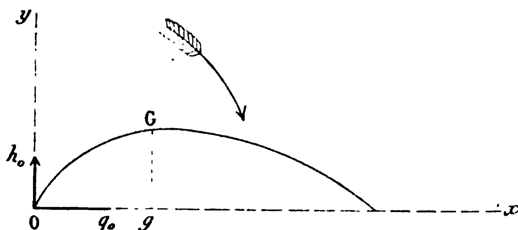
poutre droite de même portée, soumises aux mêmes charges et simplement appuyée à ses extrémités.

Si l'axe des y est vertical ascendant, le coefficient de y dans cette fonction linéaire est la poussée q_0 de l'arc changé de signe.

En effet, soit (*fig.* 41) m la somme des moments, relativement à G, des charges *données* agissant entre ce point et l'extrémité gauche de l'arc. Soient h_0 et q_0 les composantes horizontale et verticale de la réaction de l'appui G_0, et M_0 le moment de flexion en ce point; si G_0x et G_0y sont les axes, le dernier étant vertical ascendant et les moments positifs étant comptés de gauche à droite suivant la flèche, le moment de flexion en $G(x, y)$ sera (§ 190, Th. II *bis*)

$$M = m + M_0 - q_0y + h_0x.$$

Fig. 41.



Mais, pour une poutre dirigée suivant G_0x, le moment de flexion μ en g serait de la forme

$$\mu = m + A_0 + B_0x,$$

A_0 et B_0 étant deux constantes.

De ces deux équations on conclut

$$M = \mu + A + Bx - q_0y,$$

A et B étant deux nouvelles constantes.

Ceci étant, concevons qu'on construise un polygone funiculaire des charges données de distance polaire d, limité aux verticales des appuis, nous aurons

$$\mu = z \times d,$$

z étant l'ordonnée comprise entre ce polygone et sa corde. Donc

$$M = d\left(z + \frac{A}{d} + \frac{B}{d}x - \frac{q_0}{d}y\right).$$

Construisons la droite de fermeture

$$z' = -\frac{A}{d} - \frac{B}{d}x;$$

amplifions les ordonnées y de l'arc dans le rapport $\frac{q_0}{d}$ et soit

$$y' = \frac{q_0}{d}y$$

l'ordonnée de l'arc amplifié. On aura

$$M = d(z - z' - y').$$

$z - z'$ sont les ordonnées du polygone funiculaire comptées depuis la droite de fermeture.

Portons ces ordonnées $z - z'$ à partir de G_0x, nous aurons (§ 43 *bis*) un nouveau polygone qui sera encore un polygone funiculaire de distance polaire d.

Soit $z'' = z - z'$ l'ordonnée de l'un de ses points. On aura

$$M = d(z'' - y),$$

qui n'est autre que l'expression du théorème XI.

§ 201.

CONSTRUCTION DES EFFORTS TRANCHANTS DANS LES PIÈCES COURBES. — Nous savons que l'effort tranchant est la dérivée prise en signe contraire du moment de flexion par rapport à l'arc de la fibre moyenne.

Soit (*fig.* 100 *bis, Pl. XXII*) G_0G_1 la fibre moyenne d'un arc soumis à des forces données

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots.$$

Soit 01.2.3.4 le polygone des pressions.

Considérons un point G de la fibre moyenne et proposons-nous de construire l'effort tranchant en ce point.

Menons la verticale Gg entre la fibre moyenne et le polygone des pressions, ainsi que celle $G'g'$ relative au point infiniment voisin G'. Soit

$$GG' = ds.$$

Prolongeons le côté 3.4 jusqu'à sa rencontre en S avec la tan-

gente à la fibre moyenne menée par le point G et menons $g\gamma$ parallèle à GG′ jusqu'à sa rencontre en γ avec l'ordonnée $G'g'$.

On aura

$$g'\gamma = dM \quad \text{et} \quad g\gamma = GG' = ds.$$

Les triangles semblables $gg'\gamma$ et gGS donnent

$$\frac{g'\gamma}{g\gamma} = \frac{gG}{GS}.$$

Mais (§ 195)

$$M = q_0 \times Gg, \quad M + dM = q_0 \times G'g';$$

d'où

$$dM = q_0 \times g'\gamma \quad \text{et} \quad \frac{dM}{ds} = q_0 \times \frac{g'\gamma}{g\gamma} \quad \text{ou} \quad \frac{dM}{ds} = q_0 \times \frac{gG}{GS}$$

ou, au signe près,

$$T = q_0 \times \frac{gG}{GS}.$$

Ainsi il suffit, *pour avoir l'effort tranchant, de construire une quatrième proportionnelle aux trois longueurs* q_0, gG *et* GS. *Cette ligne représentant un effort tranchant ou une force devra naturellement être mesurée à l'échelle des forces.*

On voit d'ailleurs sur la figure si $\frac{g'\gamma}{g\gamma}$ est positif ou négatif, c'est-à-dire si le point S tombe à gauche ou à droite de Gg; l'effort tranchant est de signe contraire à ce rapport.

Remarque. — Supposons que la ligne G_0G_1, au lieu d'être la fibre moyenne elle-même, soit une ligne déduite de la fibre moyenne par amplification dans un rapport quelconque $\frac{d}{q_0}$ des ordonnées verticales comptées depuis la corde G_0G_1, et que le polygone **0.1.2.3.4...**, au lieu d'être le polygone des pressions, c'est-à-dire un polygone funiculaire dont la distance polaire est la poussée horizontale q_0, soit le polygone funiculaire de distance polaire d dont il est parlé au théorème XI. Alors, l'effort tranchant sera une quatrième proportionnelle aux trois longueurs d, gG, GS.

§ 202.

EXTENSION DE LA CONSIDÉRATION DES MOMENTS DE FLEXION. — Supposons (*fig.* 100, *Pl. XXII*) qu'on fasse dans la pièce $A_0B_0A_1B_1$,

quelle qu'elle soit, une section xy verticale ou non; soient 3 et 4 les forces dont les points d'application sont limitrophes de cette section, en sorte (§ 69) que le côté 3.4 du polygone des pressions représente la ligne d'action de la résultante r de toutes les forces agissant à gauche de cette section. Si l'on veut construire la somme des moments de toutes ces forces (ou, ce qui revient au même, le moment de leur résultante r) non plus par rapport à un point G de la fibre moyenne, mais par rapport à un point quelconque H du plan, il suffit de mener une verticale HH' jusqu'à sa rencontre en H' avec le côté 3.4 prolongé du polygone des pressions, et le moment cherché est le produit $HH' \times q_0$.

Pour le démontrer, il suffit de transporter le point d'application de r en H' et de remplacer ensuite la force r' ainsi obtenue par ses composantes verticale et horizontale. Le moment de la première est nul; la seconde est q_0 et son moment est bien le produit $q_0 \times HH'$. Cette extension de la notion des moments fléchissants va nous être utile dans leur application aux systèmes réticulaires.

C. *Application aux systèmes réticulaires.*

§ 203.

DÉFINITION DU SOMMET OPPOSÉ A UNE BARRE. — Dans un système réticulaire (*fig.* 64, *Pl. XIII*), chaque barre principale ou de *pourtour* fait partie d'un seul triangle et nous appellerons naturellement *sommet* ou *nœud opposé* à cette barre le sommet de ce triangle opposé à la barre considérée. Ainsi, d est le nœud opposé à la barre principale gh; h, le nœud opposé à la barre principale dc.

Chaque étrésillon fait partie de deux triangles. Ainsi jc fait partie des deux triangles jcb, jch; prolongeons les barres principales cb et hj partant des deux extrémités c et j de l'étrésillon considéré et appartenant respectivement aux deux triangles dont il fait partie. Nous appellerons leur point de rencontre s (qui peut être à l'infini, si les deux barres principales qui le déterminent sont parallèles) le sommet opposé à cet étrésillon.

Le sommet opposé à l'étrésillon bj est formé par la rencontre des deux barres principales cb et ja; le sommet opposé à hd est

formé par le point d'intersection des deux barres principales *cd* et *hg*.

§ 204.

THÉORÈME DE RITTER. — *Pour avoir la force élastique (pression ou tension) d'une barre appartenant à un système réticulaire, faites une section plane coupant cette barre et les deux barres passant par le sommet qui lui est opposé; déterminez soit graphiquement, soit par le calcul, la somme des moments relativement à ce sommet de toutes les forces (y compris les réactions des appuis) agissant d'un côté de la section, par exemple à sa gauche; divisez cette somme par la distance du sommet à la barre.*

Toutefois, pour que le théorème soit général, il convient de faire, sur le sens des grandeurs qui y entrent, les conventions qui seront spécifiées au paragraphe suivant.

Supposons, par exemple, qu'on veuille trouver la tension ou pression de la barre principale *cd*.

Coupons par une section *xy* qui rencontre cette barre et deux quelconques des barres passant par le sommet opposé *h*, par exemple celles *hg* et *hd*.

Nous savons que les forces extérieures agissant à gauche de la section sont équivalentes aux forces élastiques exercées par cette partie de gauche sur celle de droite. Donc, ces deux systèmes de forces ont même somme de projections sur un axe et même somme de moments relativement à un point quelconque du plan.

Or ici les forces élastiques sont au nombre de trois seulement, à savoir : les tensions ou pressions des barres coupées. Soit t la tension ou pression inconnue de la barre *cd*, cette force étant considérée comme positive si c'est une tension et comme négative si c'est une pression; désignons par h sa distance à son sommet opposé.

Égalons les sommes des moments des deux systèmes de forces dont nous venons de parler, par rapport au sommet h opposé à la barre *cd*; les deux barres coupées *dh* et *gh*, passant l'une et l'autre par le point h, les moments par rapport à ce point de leurs tensions sont nuls; le moment de la tension t que nous cherchons

est

$$-t \times h;$$

car, si t est une tension appliquée au point où la barre est coupée, elle se dirigera vers le point c et tendra à tourner son bras de levier de droite à gauche ; son moment sera donc négatif et, comme t est positif dans ce cas, il faut faire précéder le produit du signe —.

Le même signe convient si t est une pression ; car alors le moment est positif et, comme t est négatif, le moment sera encore

$$-t \times h.$$

Désignons par M la somme des moments relativement au sommet h de toutes les forces extérieures agissant à gauche de xy, on aura

$$\mathrm{M} = -t \times h,$$

d'où

$$t = -\frac{\mathrm{M}}{h}.$$

S'il s'agissait de la barre principale inférieure hg, en prenant les moments relativement au sommet opposé d, on trouverait, en désignant toujours par t la tension inconnue, par h la distance de la barre considérée au sommet qui lui est opposé et par M la somme des moments des forces placées à gauche de la section relativement à ce sommet,

$$t = +\frac{\mathrm{M}}{h}.$$

Enfin, si l'on prend les moments relativement au sommet opposé à l'étrésillon hd, c'est-à-dire au point d'intersection (non figuré) des lignes dc et hg, en désignant toujours par h la distance de ce point à la barre hd et par M la somme des moments des forces extérieures relativement à ce point, on trouvera

$$t = \pm\frac{\mathrm{M}}{h},$$

le signe + convenant si le point de concours des barres dc et gh se trouve à gauche de hd et le signe — s'il se trouve à droite.

§ 205.

REMARQUES SUR LES SIGNES. — Pour éviter les ambiguïtés de signes, convenons, le sens positif des moments étant celui du mouvement des aiguilles d'une montre :

1° De regarder les tensions comme positives.

2° De donner aussi un signe à la distance h de chaque sommet à la barre opposée, à savoir le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que le sommet opposé à une barre est placé au-dessus ou au-dessous de cette barre.

Moyennant cette convention, on vérifie sans difficulté qu'on trouve toujours

$$(a) \qquad t = \frac{M}{h}.$$

Si le sens positif des moments était changé, on devrait changer aussi la convention sur les signes des hauteurs h et la formule subsisterait.

§ 206.

CAS DE BARRES PRINCIPALES PARALLÈLES. — Si les barres cd et hg étaient parallèles, le sommet opposé passant à l'infini, h deviendrait infini lorsqu'il s'agit de l'étrésillon hd, ainsi que M.

On pourrait facilement trouver la vraie valeur du quotient $\frac{M}{h}$, mais il est plus simple de résoudre directement la question. Supposons que la section xy soit, dans ce cas, dirigée perpendiculairement à la direction commune des deux barres parallèles et soit T l'effort tranchant suivant cette section. Projetons les forces sur la section. Les tensions des barres parallèles donnent des projections nulles : l'effort tranchant T dans la section xy n'est alors autre que la tension suivant l'étrésillon *hd estimée* suivant xy, ce qui permet de déterminer, graphiquement ou par le calcul, cette tension dès que l'effort tranchant est connu.

§ 207.

CAS DES PIÈCES DE HAUTEUR CONSTANTE. — Dans une pièce de hauteur constante, toutes les barres principales sont parallèles ; on n'aura à

considérer que des sections transversales ou normales aux barres principales, et alors il résulte des considérations qui précèdent cette proposition :

Théorème. — *Dans une pièce réticulaire droite ou courbe de hauteur constante :*

1° *La tension ou pression d'une barre principale est égale au quotient du moment fléchissant relatif au sommet opposé à cette barre par la hauteur constante de la pièce.*

2° *La tension ou pression d'un étrésillon estimée suivant une section transversale coupant cet étrésillon est égale à l'effort tranchant dans cette section.*

§ 208.

CAS DES PIÈCES PLEINES OU ÉVIDÉES (SOLUTION APPROCHÉE). — Ce qui fait que, dans un système réticulaire simple, la connaissance des moments de flexion et efforts tranchants suffit à déterminer rigoureusement et directement la tension d'une barre quelconque, c'est qu'un tel système n'est jamais coupé en plus de trois points par des sections convenablement choisies. Si l'on a des systèmes articulés à lignes surabondantes où les sections coupent plus de trois barres, la connaissance des moments de flexion, des efforts tranchants et de la compression de la fibre moyenne ne fournit plus, entre les tensions des barres coupées, le nombre de relations voulu pour les déterminer; la Statique les laisse partiellement indéterminées.

A plus forte raison en est-il ainsi dans les pièces pleines où une section rencontre une infinité de points de la pièce.

Nous verrons, dans la seconde Partie de cet Ouvrage, que, dans le premier cas, le problème peut toujours être résolu *rigoureusement* selon les principes de la théorie mathématique de l'élasticité; mais le second ne peut l'être en général qu'à l'aide d'une hypothèse de la Résistance des matériaux que nous avons déjà mentionnée au § 6 sous la désignation de loi du trapèze. Et cette hypothèse peut aussi être utilement appliquée aux systèmes articulés à lignes surabondantes, comme fournissant une solution approchée plus simple que la solution rigoureuse.

Nous désignerons toujours par les lettres M, T, N le moment de flexion, l'effort tranchant et la compression de la fibre moyenne.

Soit (*fig*. 44, p. 313) G_0G_1 la fibre moyenne d'une pièce quelconque soumise à des forces situées dans le plan de cette ligne qui est le plan de symétrie de la pièce.

Faisons une section transversale en un point G; soit AB sa trace sur le plan de symétrie.

Représentons la forme de la section rabattue sur le plan de la figure en A'B', la ligne A'B' = AB étant axe de symétrie et contenant, par suite, le centre de gravité G' de la section, lequel est en réalité, au point G.

Si, en chaque point de la section AB, on élève une ordonnée normale à son plan et égale à la tension ou pression normale qu'elle supporte rapportée à l'unité de surface, le lieu des extrémités de ces lignes sera une surface que la théorie de l'élasticité peut seule faire connaître.

Mais, si les dimensions de la section, c'est-à-dire les dimensions transversales de la pièce, sont petites par rapport à sa longueur, on pourra, et c'est ce que l'on fait en Résistance des matériaux, confondre sensiblement cette portion de surface avec un plan.

Ce plan est symétrique par rapport au plan de la fibre moyenne. Soit pq sa trace sur le plan de la fibre moyenne. Soit ab un élément de la ligne AB; ab est la projection sur le plan de la figure d'une bande superficielle $cdc'd' = dS$ de la section. Tous les points de cette bande supportent une même tension (ou une même pression) normale n représentée par l'ordonnée $i\varepsilon$. La pression totale que supporte cette aire dS est donc égale à $i\varepsilon \times dS$.

Soit u la distance du point i au centre de gravité G de la surface, distance comptée positivement dans le sens de la normale positive, c'est-à-dire ici (§ 189) celui qui est tel que le sens positif d'une normale verticale soit descendant.

La tension normale $n = i\varepsilon$, rapportée à l'unité de surface, étant l'ordonnée d'une droite répondant à l'abscisse u, est une fonction linéaire de u, en sorte qu'on peut écrire

$$n = i\varepsilon = Au + B,$$

A et B étant deux constantes inconnues.

Ces deux constantes sont faciles à déterminer en fonction du moment de flexion M relatif au point G et de la compression N de la fibre moyenne en ce point.

Il suffit, pour cela, de se rappeler que M, qui est la somme des moments relativement au point G des forces extérieures agissant à gauche de la section AB, est aussi (§ 190) la somme des moments relativement à ce point des forces *élastiques* qui agissent dans la section, et que de même N, qui est la somme des projections sur la normale à la section des forces extérieures dont il vient d'être parlé, est aussi la somme des projections, sur cette ligne, des forces élastiques. La résultante des actions normales n sur la bande superficielle dS étant

$$n\,dS = (Au + B)\,dS,$$

la compresssion N de la fibre moyenne ou résultante des forces $n\,d$S est

$$N = \int n\,dS = \int (Au + B)\,dS,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments dS de la section AB, ou

$$N = A\int u\,dS + B\int dS.$$

Or $\int dS$ représente l'aire S de la section. D'ailleurs $\int u\,dS = 0$, puisque le point G est le centre de gravité de la section (§ 124 et 126). Donc

$$N = BS, \quad B = \frac{N}{S}.$$

Ce rapport $\frac{N}{S}$ se nomme la compression *moyenne* de la section S.

De même le sens positif des moments étant de gauche à droite et les forces N et n étant comptées positivement quand ce sont des compressions, en sorte que la force $n\,d$S est comptée positivement de i vers ε, on a

$$M = -\int n\,dS \times u = -\int (Au + B)\,u\,dS$$

ou

$$M = -A\int u^2\,dS - B\int u\,dS,$$

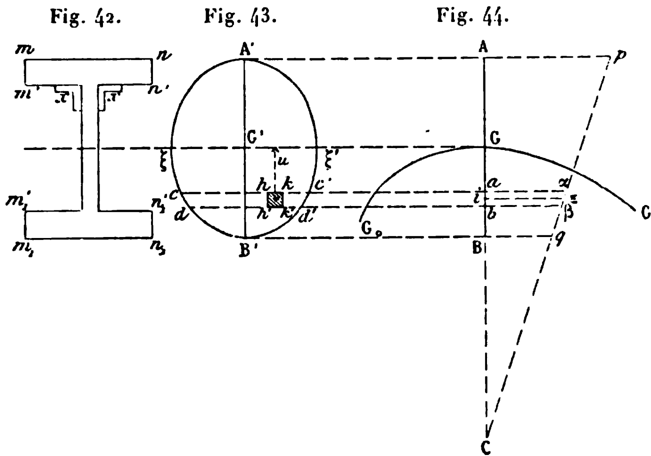
ou enfin, à cause de $\int u\,dS = 0$,

$$M = -A\int u^2\,dS.$$

Menons par le point G' une ligne $\xi\xi'$ perpendiculaire à A'B',

c'est-à-dire, dans l'espace, une perpendiculaire au plan de la fibre moyenne, issue du centre de gravité G.

L'intégrale qui entre dans le second nombre représente la somme des produits des aires $hkh'k'$ de tous les éléments infiniment petits qui composent la section par les carrés de leurs distances u à l'axe $\xi\xi'$. Cette somme, qui est indépendante des forces agissantes et dépend uniquement de la forme géométrique de la section, se nomme le *moment d'inertie* de cette section par rapport à l'axe $\xi\xi'$ dont la trace, sur le plan de symétrie, est le centre de gravité G de la



section. Cette quantité très importante dans les problèmes de Résistance sera étudiée au Chapitre XXI. Désignons-la par I, en sorte que

$$M = -AI \quad \text{ou} \quad A = -\frac{M}{I}.$$

Par suite, la pression ou tension normale n en chaque point de la section AB est donnée par la formule

$$(12) \qquad n = -\frac{M}{I}u + \frac{N}{S}$$

en fonction : 1° du moment de flexion M, de la compression de la fibre moyenne N qui sont des quantités variables avec les forces extérieures; 2° de l'aire S et du moment d'inertie I de la section relativement à l'axe projeté en G qui ne dépendent que de la forme de la pièce.

§ 209.

DISCUSSION DE LA FORMULE QUI DONNE LA PRESSION NORMALE. — 1° On peut écrire la formule (12)

$$n = \frac{M}{I}\left(-u + \frac{NI}{MS}\right).$$

L'homogénéité de la formule exige que $\frac{NI}{MS}$ soit, comme u, une longueur. Soit

$$\frac{NI}{MS} = u_0$$

et désignons par C le point de AB défini par la distance u_0 ; on aura

$$n = \frac{M}{I}(u - u_0) = -\frac{M}{I}u',$$

en désignant par u' la distance du point où la pression est n au point fixe C, u' étant compté positivement dans le même sens que u. Ainsi *les pressions normales de chaque section varient proportionnellement à leurs distances à un point fixe* C. Le lieu des points C pour les diverses sections se nomme *la fibre neutre* de la pièce. Cette ligne ne fait pas nécessairement partie de la pièce ; le point C, qui n'est autre que l'intersection de pq avec AB, peut être en dehors de la pièce.

2° Dans le cas particulier où la compression N de la fibre moyenne est nulle, comme il arrive dans les poutres droites horizontales soumises uniquement à des charges verticales, on a

$$(13) \qquad n = -\frac{M}{I}u.$$

On dit, dans ce cas, que la pièce est soumise à une *flexion simple*, c'est-à-dire à une flexion non accompagnée de compression ou extension de la fibre moyenne.

Les forces élastiques normales varient alors proportionnellement à leur distance à la fibre moyenne; en d'autres termes, la fibre neutre et la fibre moyenne coïncident.

3° Si, au contraire, le moment de flexion M est nul dans toutes les sections, ce qui exige (§ 199) comme condition nécessaire que la fibre moyenne coïncide avec l'une des courbes funiculaires rela-

tives aux charges données qui agissent sur la pièce, on a

$$n = \frac{N}{S}; \tag{14}$$

on dit, dans ce cas, que la pièce est soumise à une *extension simple* ou à une *compression simple* suivant que N est négatif ou positif.

Les forces élastiques sont alors constantes dans toute l'étendue d'une section.

4° Le cas général est celui où aucune des quantités M et N n'est nulle et où ces quantités sont de même ordre de grandeur. Alors, quoique $N \gtrless 0$, le terme $\frac{N}{S}$ est faible par rapport au terme $\frac{M}{I}u$. En effet, les dimensions transversales de la pièce sont supposées très petites. Or, si l'une de ces dimensions est prise comme quantité très petite du premier ordre, l'aire S sera du second ordre; le moment d'inertie I est, par définition, de l'ordre de S multiplié par le carré d'une longueur comparable aux dimensions de la section, c'est-à-dire une quantité très petite du quatrième ordre; donc $\frac{I}{u}$ est très petit du troisième ordre.

Par suite,

$$\frac{Mu}{I} = \frac{M}{\frac{I}{u}}$$

est une quantité beaucoup plus grande que $\frac{N}{S}$, puisque les numérateurs M et N sont supposés de même ordre, tandis que le dénominateur $\frac{I}{u}$ est beaucoup plus petit que celui S.

C'est ce qui fait que dans une première approximation on néglige souvent le terme $\frac{N}{S}$, et alors la formule (13) s'applique à toutes les pièces.

5° Cela ne serait plus vrai si les forces extérieures étaient telles qu'elles fournissent une compression normale N *incomparablement plus grande* que le moment de flexion M. Dans ce cas, qui se présente exceptionnellement dans la pratique, qui peut pourtant s'y présenter, les deux termes de la formule (12) seront de même ordre de grandeur.

Cela arriverait, par exemple, pour une poutre horizontale soumise non seulement à des charges verticales, mais encore à deux forces égales et opposées appliquées à ses deux extrémités, ces dernières forces étant incomparablement plus grandes que les premières.

En résumé :

a. Si $N = 0$, on a rigoureusement la formule (13); si $N \gtrless 0$ est de même ordre de grandeur que M, on peut substituer cette même formule (13) à celle (12), à titre d'approximation.

b. Si $M = 0$ (fibre moyenne funiculaire), on a la formule (14).

c. Si $M \gtrless 0$ et $N \gtrless 0$ et que N soit très grand, il faut toujours employer la formule complète (12).

Remarque. — Si l'on préfère compter positivement les forces normales n et N quand elles représentent les tensions et qu'on les désigne dans ce cas par n' et N', en sorte que $n' = -n$ et $N' = -N$, la formule générale (12) devient

$$n' = \frac{Mu}{I} + \frac{N'}{S}.$$

Ainsi on peut écrire cette formule

$$(14) \qquad n = \frac{N}{S} \pm \frac{Mu}{I},$$

le signe + convenant au cas où l'on regarde les tensions comme positives, le signe — au cas où l'on regarde les pressions comme positives.

Dans les deux cas, u est compté positivement suivant les conventions du § 189.

Les moments sont comptés positifs de gauche à droite.

§ 210.

FORME DE LA SECTION D'UNE PIÈCE. — On voit que, pour des forces données, c'est-à-dire des valeurs données de M et N et pour une section donnée S, c'est-à-dire pour une dépense donnée de matière, la tension ou pression normale qu'elle supporte en un

point est d'autant plus faible et, par suite, la pièce se fatigue d'autant moins que le moment d'inertie I est plus grand. Ainsi, la matière sera d'autant mieux employée, toutes choses égales d'ailleurs, que I est plus grand.

Or, pour obtenir le plus grand moment d'inertie possible, il faut éloigner la matière le plus possible de l'axe $\xi\xi'$ ou du centre de gravité de la pièce. C'est ce qui fait qu'au lieu d'employer des sections comme celles de la *fig.* 43, on en emploie comme celles de la *fig.* 42, dites en forme de double T.

Les parties $mn\ m'n'$ et $m_1 n_1\ m'_1 n'_1$ se nomment les *nervures* ou *tables* supérieure ou inférieure du double T; la partie verticale et étroite en est l'*âme*. Les pièces telles que x sont des *cornières* destinées à relier entre elles l'âme et chacune des nervures.

§ 211.

EFFORT TRANCHANT. — On admet, en général, en Résistance des matériaux, que les forces élastiques tangentielles peuvent être considérées comme uniformément réparties dans toute l'étendue d'une section.

Cela n'est pas exact et, une fois admise l'hypothèse (d'autant plus exacte que les dimensions transversales sont plus faibles) faite au § 208 sous le nom de *loi du trapèze,* pour ce qui concerne les forces élastiques normales, la répartition des forces élastiques tangentielles s'ensuit, ainsi que nous le montrons plus loin (Note III).

En admettant l'hypothèse de la répartition uniforme, ce qui n'a pas un grand inconvénient parce que l'effort tranchant T a, en général, une faible influence, comparée à celle du moment de flexion, alors la force élastique tangentielle rapportée à l'unité de surface en chaque point d'une section d'aire S est $\frac{T}{S}$.

§ 212.

PIÈCES D'ÉGALE RÉSISTANCE. AVANTAGES DES SYSTÈMES ARTICULÉS SANS LIGNES SURABONDANTES. — Supposons d'abord une pièce courbe telle que sa fibre moyenne coïncide avec l'une des courbes funiculaires des charges qu'elle supporte ou une barre droite qui ne supporte

que deux forces égales et opposées aux deux extrémités de sa fibre moyenne. Pour de telles pièces le moment de flexion M est partout nul. Par suite, l'effort tranchant est aussi nul (§ 190, Th. III). En tous les points d'une pareille section règne comme le montre la formule (12), la même force élastique $\frac{N}{S}$.

Si l'on dispose de la section de façon que ce rapport soit le même dans toutes les sections, on aura ce qu'on nomme une *pièce d'égale résistance,* ainsi que nous l'avons déjà indiqué pour de simples barres (§ 106).

La fatigue que subit la pièce se répartit également entre toutes ses parties; ce sont les conditions les plus favorables possibles. celles qui donnent le meilleur emploi de la matière.

Avec les systèmes articulés sans *lignes surabondantes,* après avoir déterminé les tensions t (ou pressions N) de toutes les barres, on peut toujours disposer leurs sections de façon que toutes supportent la même force élastique (tension ou pression) par unité de surface. On peut donc ainsi, sous les charges les plus complexes, obtenir des systèmes d'égale résistance (§ 106).

Il en est tout autrement lorsque les pièces fléchissent, c'est-à-dire lorsque le moment de flexion M n'est pas nul.

Alors, soit qu'on emploie la formule (12) ou celle (13), on cherchera dans chaque section le point qui supporte la plus grande force élastique normale. Il faudra, pour cela, donner à u ses deux valeurs extrêmes, l'une positive, l'autre négative, et prendre la plus grande des deux valeurs absolues ainsi obtenues pour la force élastique n. Cela aura donc lieu pour celui des deux points A ou B (*fig.* 44, p. 313) le plus éloigné de la fibre neutre, comme le montre la formule (13).

Cette valeur maxima de n étant obtenue pour chaque section, on peut disposer des moments d'inertie I des diverses sections de façon qu'elle soit la même pour toutes les sections. On peut ensuite, si on le juge utile, disposer de l'aire S, de façon que l'effort tranchant par unité de surface $\frac{T}{S}$ soit constant ou peu variable d'une section à l'autre.

On dit encore qu'une pièce ainsi constituée est d'égale résistance. Mais elle est loin, cette fois, de mériter ce nom comme dans

le cas précédent. Car ici il n'y a que les points les plus tendus ou les plus pressés de chaque section qui supportent la même fatigue dans tout le corps de la pièce. Les autres points supportent des actions élastiques moindres et, comme on est forcé de s'arranger de façon que les premiers ne supportent que les actions compatibles avec la conservation de la matière ([1]), tous les autres points supportent des actions moindres et la matière y est, par suite, insuffisamment ou incomplètement utilisée.

Ainsi, le seul emploi parfait de la matière a lieu pour les pièces droites ou courbes qui ne fléchissent pas. Et, lorsqu'on ne peut pas disposer une pièce de façon qu'elle remplisse cette condition, c'est-à-dire de façon que sa fibre moyenne soit une courbe funiculaire, il faut recourir à des systèmes formés de telles pièces, réunies entre elles par de simples articulations et ne présentant pas de lignes surabondantes.

([1]) *Voir*, pour la marche à suivre à cet égard dans la pratique, la Note I.

CHAPITRE XVIII.

MOMENTS FLÉCHISSANTS PRODUITS PAR LE PASSAGE D'UN CONVOI SUR UNE POUTRE A DEUX APPUIS SIMPLES.

§ 213.

OBJET DE CE CHAPITRE. — Une poutre à deux appuis simples porte une charge permanente, généralement uniforme, mais que nous supposerons d'abord quelconque.

On suppose qu'elle livre passage à un convoi dont les charges seront regardées comme des forces isolées concentrées aux points d'appui des roues; on admettra, en premier lieu, que les roues portent directement sur la poutre que l'on étudie (poutre longitudinale) sans tenir compte de sa liaison avec les pièces de pont ou poutrelles transversales, sauf à examiner ensuite en quoi les résultats peuvent être modifiés par la présence de ces dernières.

Si l'on connaît, à chaque instant, les moments de flexion et les efforts tranchants (il n'y a pas de compression de la fibre moyenne), on peut, comme nous le savons, en déduire les forces élastiques en chaque point de la pièce, rigoureusement dans les poutres réticulaires, approximativement dans les poutres soit pleines, soit évidées.

A l'égard des moments de flexion dont nous nous occuperons tout d'abord, on peut utilement poser quatre problèmes :

PROBLÈME I. — *Étant donnée une section transversale de la poutre, trouver la position du convoi qui y détermine le moment de flexion maximum et la grandeur de ce moment.*

PROBLÈME II (inverse du précédent). — *Étant donnée une position du convoi, trouver la section qui éprouve, pour cette position, le moment de flexion maximum et déterminer ce moment.*

Problème III. — *Pendant la marche du train, il se produit, à chaque instant, un moment de flexion intéressant à suivre, sous chacun des essieux; trouver la position du train dans laquelle, sous un essieu donné, se produit le moment maximum et déterminer ce moment.*

Problème IV. — *Trouver le moment* maximum maximorum, *c'est-à-dire le plus grand de tous les moments qui se produisent dans la poutre entière pendant le passage du train.*

On peut se proposer des problèmes analogues relativement aux efforts tranchants dans les diverses sections et relativement aux forces élastiques développées par le passage d'un convoi, dans chacune des barres composant une poutre réticulaire, si c'est à une telle poutre qu'on a affaire.

Le problème I est le plus important; car, si l'on connaît les moments fléchissants et efforts tranchants maxima dans chaque section, on peut en déduire les dimensions à donner à la poutre, qu'elle soit pleine ou non.

Le problème IV peut naturellement se déduire du problème I. Si l'on connaît le plus grand moment de flexion qui se produit dans chaque section, le plus grand de tous ces moments sera le *maximum maximorum.*

Pour les poutres de petite portée auxquelles on donne une section uniforme, c'est ce dernier moment qu'il suffit de connaître; il est donc intéressant de pouvoir l'obtenir directement sans avoir à résoudre le problème I pour chaque section de la poutre.

Nous verrons que le problème III facilite beaucoup ce résultat.

§ 214.

OBSERVATION RELATIVE A L'INFLUENCE DE LA CHARGE PERMANENTE. — Le problème I se distingue des autres non seulement par son importance, mais aussi parce qu'il peut être résolu indépendamment de la charge permanente.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de trouver le plus grand moment fléchissant qui se produira dans une section donnée pendant le passage du train.

Le moment fléchissant, en un point d'une poutre, est la somme :

1° du moment fléchissant dû à la charge permanente, 2° de celui dû à la charge roulante. Le premier reste constant au point considéré pendant toute la durée du passage du convoi; le second varie seul, de sorte qu'il suffit d'en chercher le maximum, abstraction faite de la charge permanente, et d'y ajouter ensuite le terme constant dû à cette dernière pour avoir le moment maximum dû à la charge fixe et à la charge mobile réunies.

La même observation s'applique à la recherche de l'effort tranchant maximum dans une section donnée et de la tension maxima dans une barre donnée d'un système réticulaire.

Les choses se passent tout autrement dans les trois autres problèmes. S'il s'agit, par exemple, de déterminer la section dans laquelle se produit le moment fléchissant maximum pour une position déterminée du train, cette section dépend non seulement de la surcharge donnée, mais aussi de la charge permanente.

Si μ est le moment fléchissant total dans une section d'abscisse x : 1° la partie de μ due à la charge permanente est une fonction de la seule variable x; appelons-la $f(x)$; 2° celle due au convoi en marche dépend non seulement de la section considérée ou de la variable x, mais aussi de la position du convoi, laquelle est définie à chaque instant par l'abscisse z d'un des points qui le composent, par exemple de l'essieu de queue; c'est donc une fonction de x et z; désignons-la par $\varphi(x, z)$, en sorte que

$$\mu = f(x) + \varphi(x, z).$$

Le problème I consiste à trouver la valeur de la variable z qui rend μ maximum, x restant constant.

Le premier terme est donc constant et n'intervient pas dans la valeur cherchée de z.

Le problème II, au contraire, consiste à trouver la valeur de x qui rend μ maximum, z demeurant constant.

Les deux termes de μ interviennent dans cette recherche.

Dans le problème III on ne considère plus une section fixe, c'est-à-dire une valeur donnée de x, mais une section qui se déplace avec le train, en restant constamment sous un essieu.

Soit a la distance invariable de l'essieu dont il s'agit à l'essieu de queue. Alors l'abscisse x de la section considérée est

$$x = a + z,$$

d'où

$$z = x - a \quad \text{et} \quad \mu = f(x) + \varphi(x, x-a)$$

où a est une constante, et c'est le maximum de la fonction de x qui forme le second membre qu'on a à chercher. On voit que la charge permanente $f(x)$ intervient.

Enfin dans le problème IV on a à chercher le maximum de μ lorsque les deux variables x et z varient indépendamment l'une de l'autre.

Si les deux fonctions du second membre étaient continues, il faudrait égaler à zéro séparément les dérivées de μ par rapport à x et par rapport à z, et les deux équations

$$f'(x) + \varphi'_x(x, z) = 0,$$
$$\varphi'_z(x, z) = 0$$

donneraient les valeurs de x et de z, c'est-à-dire la section du pont et la position du convoi qui fournissent le *maximum maximorum* de μ et en portant les valeurs trouvées dans l'expression de μ, on aurait ce *maximum maximorum*.

Mais, dans tous ces problèmes, les règles habituelles pour la détermination du maximum des fonctions analytiques doivent s'appliquer avec certaines précautions, puisqu'en raison des charges isolées les fonctions à discuter changent de forme chaque fois qu'un essieu franchit la section que l'on considère et chaque fois qu'un essieu quitte le pont ou qu'un nouvel essieu s'engage, et c'est là ce qui rend ces problèmes un peu délicats, quoiqu'ils ne donnent lieu qu'à des considérations très élémentaires, du moins quand il s'agit d'une poutre à deux appuis simples.

§ 215.

Problème I.

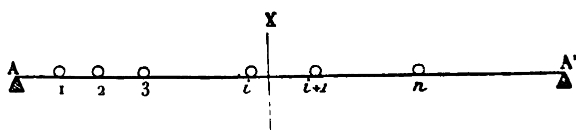
MOMENT FLÉCHISSANT MAXIMUM POUVANT SE PRODUIRE DANS UNE SECTION DONNÉE. — Théorème I. — *Le moment fléchissant maximum que le passage d'un convoi sur une poutre à deux appuis simples fait naître dans une section donnée de la poutre se produit nécessairement au moment du passage d'une roue sur cette section.*

Soient (*fig.* 45) A et A′ les deux appuis d'une poutre que traverse un train dont les essieux sont numérotés de gauche à droite, et nous désignerons par les lettres P_1, P_2, P_3, ..., P_i, P_{i+1}, ..., P_n les poids des essieux portant respectivement les nos 1, 2, 3, ..., i, $i+1$, ..., n.

Pour plus de généralité, nous admettons que d'autres essieux que nous n'avons pas numérotés peuvent se trouver de part et d'autre de la portée du pont.

Considérons une section X dont l'abscisse XA comptée depuis la culée de gauche est x et admettons que la position actuelle du train soit telle que cette section tombe entre les deux essieux consécutifs i et $i+1$. Il s'agit d'examiner si elle peut répondre au maximum du moment fléchissant μ dans cette section.

Fig. 45.



L'expression de ce moment est (§ 193)

$$\mu = \frac{1}{l}\left[x\sum_{i+1}^{n} P(l-\alpha) + (l-x)\sum_{1}^{i} P\alpha\right],$$

c'est-à-dire

$$\mu = \frac{1}{l}\left\{\begin{array}{l} x[P_{i+1}(l-\alpha_{i+1}) + \ldots + P_n(l-\alpha_n)] \\ +(l-x)[P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 + \ldots P_i\alpha_i] \end{array}\right\}$$

Soient $a_1 = 0$, a_2, a_3, ..., a_n les distances des essieux nos 1, 2, 3, ..., n à celui no 1, de sorte que les longueurs a_i ne changent pas pendant le déplacement du train, et soit $\alpha_1 = z$ l'abscisse variable de l'essieu 1.

On aura

$$\alpha_i = a_i + z$$

et, par suite,

$$\mu = \frac{1}{l}\left\{\begin{array}{l} x[P_{i+1}(l-a_{i+1}-z) + \ldots + P_n(l-a_n-z)] \\ +(l-x)[P_1 z + P_2(a_2+z) + \ldots + P_i(a_i+z)] \end{array}\right\}$$

ou, en réunissant les termes en z,

$$(1)\quad \mu = \frac{1}{l}\left[x\sum_{i+1}^{n} P(l-a) + (l-x)\sum_{1}^{i} Pa\right] + z\left[\sum_{1}^{i} P - \frac{x}{l}\sum_{1}^{n} P\right]$$ (1)

les sommes $\sum_{1}^{i}, \sum_{i+1}^{n}, \sum_{1}^{n}$ se rapportant respectivement à tous les essieux *engagés* à la gauche de la section X, à sa droite et sur le pont tout entier.

Supposons maintenant que le convoi se déplace un peu, c'est-à-dire que z varie, mais assez peu pour qu'aucun essieu ne traverse la section X et qu'en outre aucun ne franchisse une culée soit pour s'engager sur le pont soit pour le quitter.

Alors toutes les sommes Σ qui entrent dans l'expression ci-dessus restent invariables; les distances a_i des essieux à l'un d'entre

---

(1) Observons, en passant, que si l'on regarde x comme une abscisse et μ comme une ordonnée, cette équation, pour une valeur donnée de z, c'est-à-dire pour une position donnée du train, représente une ligne droite dont la portion comprise entre les verticales i et $i+1$ est un des côtés du polygone représentatif des moments fléchissants. Si z varie, c'est-à-dire si le train se déplace, ce côté change aussi; mais on voit qu'il passera toujours, quel que soit z, par le point d'intersection des deux droites, dont la première verticale,

$$\sum_{1}^{i} P - \frac{x}{l}\sum_{1}^{n} P = 0, \quad \mu = \frac{1}{l}\left[x\sum_{i+1}^{n} P(l-a) + (l-x)\sum_{1}^{i} Pa\right].$$

Si z varie dans des limites telles qu'aucune partie du convoi ne quitte le pont, alors $\sum_{1}^{n} P$ ne change pas et pour chaque valeur de i, c'est-à-dire pour chaque côté du polygone des moments, ces deux équations fourniront un point fixe.

D'où ce théorème :

Pendant qu'un convoi traverse une poutre à deux appuis simples (tant que le convoi tout entier est engagé), le polygone représentatif des moments fléchissants, que son passage fait naître, se déforme de façon que chacun de ses côtés pivote autour d'un point fixe.

Il est facile de reconnaître que le pivotement de tous les côtés se fait de droite à gauche si le convoi parcourt la poutre de gauche à droite et *vice versa* (cette proposition peut aussi se déduire du théorème VII, § 194); elle a été donnée récemment dans une Note des *Annales des Ponts et Chaussées*, par M. l'ingénieur Le Châtelier.

eux sont aussi invariables; enfin x est une constante pour la section X qu'on considère, de sorte que z est la seule quantité qui varie par suite d'un déplacement du train opéré dans les limites indiquées. Si donc le coefficient de z est positif, μ croîtra avec z; s'il est négatif, μ croîtra si z décroît.

Dans le premier cas, il suffit de faire avancer infiniment peu le convoi de gauche à droite pour accroître le moment fléchissant dans la section X; dans le second il suffit de le faire rétrograder pour obtenir le même résultat. Donc, dans aucun des deux cas, la valeur de μ répondant à la position actuelle n'est la plus grande possible. Pour qu'elle puisse être telle, il faut donc que la position du train soit choisie de façon que le coefficient de z soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$(a) \qquad \frac{\sum_1^i P}{\sum_1^n P} = \frac{x}{l}.$$

Le second membre est connu pour la section considérée X et il s'agirait de trouver une position du train répartissant les essieux de part et d'autre de X, de façon à satisfaire à cette équation. En général, c'est impossible, puisque le premier membre ne varie pas avec continuité quand le train se déplace; il ne peut donc pas, en général, devenir égal à une grandeur donnée $\frac{x}{l}$. Or, toutes les fois que cette égalité est impossible, la position choisie pour le train, c'est-à-dire une position telle qu'aucun essieu ne se trouve soit sur la section donnée, soit sur l'un des appuis A ou A', ne saurait fournir le maximum de μ. S'il se trouve qu'exceptionnellement l'égalité puisse être satisfaite par une telle position du train, alors le coefficient de z, dans l'équation (1), étant nul, μ restera constant tant que les sommes Σ qui entrent dans son expression ne changent pas, c'est-à-dire tant qu'aucune charge ne franchit soit la section X, soit l'un des appuis A et A'. Si donc μ était maximum dans la position choisie, ce maximum se conserverait jusqu'à ce qu'une charge arrivât soit en X, soit en A ou en A'.

De là, nous pouvons déjà conclure que le maximum du moment fléchissant dans une section X doit se produire, sans exception,

soit au passage d'un essieu dans cette section, soit au passage d'un essieu sur un des deux appuis.

Mais je dis qu'il ne se produit pas au passage sur les appuis, à moins qu'à l'instant de ce passage, il se trouve un essieu dans la section que l'on considère, ce qui achèvera d'établir la proposition.

En effet, pour que le moment μ qui se produit en X soit maximum lors du passage d'un essieu quelconque, par exemple, celui n° j, en A', il faut : 1° que ce moment croisse lorsque, dans le mouvement de gauche à droite, l'essieu j s'approche de A'; 2° qu'il décroisse à partir de l'instant où cet essieu quitte la poutre.

Envisagons le convoi à partir de l'instant où l'essieu en question est arrivé assez près de la culée pour se trouver à la droite de la section X et pour que les essieux n^{os} $j+1, j+2, \ldots, n$ qui le précèdent aient déjà quitté le pont.

Le moment de flexion μ dû aux j essieux alors engagés se compose de celui μ' dû aux $j-1$ premiers essieux et de celui dû à l'essieu n° j. Ce dernier étant à la droite de la section X fournit (§ 196) dans l'expresssion de μ un terme

$$P_j(l-\alpha_j)\frac{x}{l},$$

α_j étant son abscisse à un instant quelconque. Donc

$$(b)\qquad \mu = \mu' + P_j(l-\alpha_j)\frac{x}{l}.$$

Après que l'essieu n° j a quitté le pont, on a

$$(a')\qquad \mu = \mu'.$$

Lorsque le convoi avance, l'abscisse α_j croît. Donc le second terme du second membre de (b) décroît et, pour que ce second membre puisse croître, il faut que μ' croisse.

Les deux conditions 1° et 2° peuvent donc s'exprimer ainsi : pour que le moment μ que le convoi comprenant son essieu de tête n° j détermine dans une section puisse être maximum au moment précis où cet essieu franchit une culée A', il faut que le moment μ' que le convoi privé de ce même essieu détermine dans la section : 1° croisse quand celui-ci s'approche de A'; 2° décroisse quand il a dépassé ce point. Cela équivaut à dire que, pour que le moment μ produit par un convoi dans une section soit maximum à l'instant

précis où son essieu de tête franchit la culée, il faut que le moment μ' que le convoi privé de cet essieu détermine dans cette section soit lui-même maximum à cet instant.

Mais cette dernière quantité ne peut l'être, suivant la partie du théorème déjà établie, que si un des essieux qui la composent se trouve dans la section.

Un raisonnement analogue montre que, si le maximum de μ se produit au moment où un essieu nouveau s'engage sur le pont, il faut que le moment de flexion produit par les essieux précédemment engagés soit aussi maximum à cet instant, ce qui exige qu'un de ces essieux soit dans la section X.

Ainsi, le maximum du moment fléchissant dans une section se produit nécessairement quand un essieu passe dans cette section [il peut parfois subsister constant après le passage; cela arrive quand l'égalité (a) peut être satisfaite; mais il n'existe pas de moment fléchissant maximum dans une section qui ne se produise à l'instant où un essieu la traverse].

Remarque. — Puisque le moment fléchissant maximum ne se produit pas quand un essieu franchit une culée, il s'ensuit que si ce moment, dans une section donnée, croît jusqu'à l'instant où la tête du convoi arrive sur une culée (et si, à cet instant, aucune roue ne se trouve sur la section), il continuera encore de croître après que la tête aura quitté le pont. Son maximum se produira donc, dans ce cas, lorsqu'une partie seulement du convoi est engagée.

Ce qui est vrai de la tête est vrai de la queue.

THÉORÈME II. — *Pour trouver la position d'un convoi qui produit le plus grand moment fléchissant possible dans une section* X (*fig.* 46) *d'une poutre à deux appuis simples* A *et* A', *par l'un des appuis* A', *menez une verticale* A'y *sur laquelle vous porterez bout à bout des longueurs*

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ i,\ i+1,\ \ldots.\ n,$$

représentant, à une échelle convenue, les charges des essieux engagés sur le pont (*polygone des forces*).

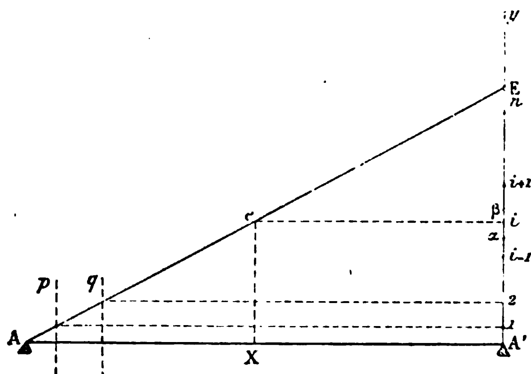
Joignez l'extrémité E *de la ligne obtenue, au point* A; *par le point* X *menez la perpendiculaire* Xe *jusqu'à sa rencontre en* e *avec la ligne* AE; *enfin, par le point* e *menez une parallèle*

à AA′. *Soit i celle des forces du polygone des forces* A′E *que cette parallèle rencontre; cela indiquera que c'est quand le train sera placé de façon que l'essieu n° i se trouve en* X, *que le moment fléchissant maximum se produira dans la section passant par ce point.*

Dans le cas exceptionnel où l'horizontale e passerait au point de division de deux forces consécutives i et $i+1$, on pourrait placer en X soit l'essieu n° i, soit l'essieu n° $i+1$; le moment fléchissant aurait la même valeur et cette valeur serait la plus grande possible (¹).

En effet, puisqu'on est certain de trouver le moment maximum

Fig. 46.



en ne considérant que des positions du convoi où l'une des roues passe sur la section considérée, soit i le numéro de cette roue. Pour que le moment μ fourni par l'équation (1) soit réellement maximum, il faut qu'avant le passage de la roue i en X il croisse avec z et qu'après ce passage il décroisse quand z croît. Ceci exige que le coefficient de z soit positif dans le premier

(¹) Cette proposition a été, à notre connaissance, donnée pour la première fois par M. le professeur Veyrauch : *Die Maximal Momente einfacher Träger*, etc. (*Zeitschrift des Arch. und Ing. Vereins zu Hannover*, 1875). *Voir* aussi un Mémoire de M. l'inspecteur général des Ponts et Chaussées Kleitz (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1876).

cas et négatif dans le second, c'est-à-dire qu'on ait les deux inégalités

$$\sum_1^i P - \frac{x}{l}\sum_1^n P > 0,$$

$$\sum_1^{i-1} P - \frac{x}{l}\sum_1^n P < 0 \quad \text{ou} \quad \sum_1^{i-1} P < \frac{x}{l}\sum_1^n P < \sum_1^i P.$$

Or, sur la figure ci-dessus, on a

$$AE = \sum_1^n P, \quad Xe = \frac{x}{l}\sum_1^n P;$$

d'ailleurs, si α et β sont les deux points de division limitrophes du point où l'horizontale du point e rencontre le polygone des forces,

$$A\alpha < Xe < A\beta.$$

Donc

$$A\alpha = \sum_1^{i-1} P, \quad A\beta = \sum_1^i P.$$

Si l'horizontale e tombait en β, au point de séparation de deux forces i et $i+1$, on aurait

$$\sum_1^i P = \frac{x}{l}\sum_1^n P.$$

La seconde des deux inégalités ci-dessus serait remplacée par une égalité. C'est le cas mentionné dans la démonstration du théorème I où le coefficient de z, dans l'expression de μ, serait nul tant que l'essieu i serait à gauche de X.

Le moment μ, au lieu de croître, resterait donc constant jusqu'à l'arrivée de cet essieu en X et décroîtrait ensuite (en vertu de la première inégalité). Il satisferait donc toujours à la condition du maximum. Et, puisque ce maximum se maintient constant depuis le moment où l'essieu $i+1$ arrive en X jusqu'à celui où c'est i qui y passe, on voit que, pour le calculer, on peut donner au convoi

une position telle que ce soit l'un ou l'autre des deux essieux, dont les charges aboutissent en β, qui tombe en X, et que même on peut supposer au train toute position où la section X tombe entre les deux essieux i et $i+1$. On sera certain d'arriver toujours à la même valeur du moment fléchissant.

La figure montre bien, d'après cela, quelles sont les sections qui ont ce caractère exceptionnel que le moment fléchissant maximum s'y maintient constant pendant un intervalle de temps fini. Il suffit, par les points de division 1.2, 2.3, ... du polygone des forces, de mener des horizontales jusqu'à la ligne AE, et ce sont les sections correspondantes p, q, ..., qui jouissent de la propriété dont il s'agit.

§ 215 *bis*.

Le théorème II suppose essentiellement que, pendant la marche du convoi, le poids total $\sum_1^n P$ n'a pas changé; il suppose, en d'autres termes, que le moment maximum se produit dans toutes les sections pendant que le convoi tout entier est engagé. Si donc l'application de ce théorème à certaines sections fournit des positions du convoi dans lesquelles il n'est que partiellement engagé, l'hypothèse admise ne se réalise pas et le résultat obtenu est illusoire. Ce théorème a donc besoin d'être complété. Nous le compléterons ainsi :

Théorème III. — *Si l'application du théorème II à une section* X *procure une position du convoi pour laquelle une partie seulement du convoi se trouve engagée, on appliquera ce théorème à cette partie. On obtiendra ainsi une nouvelle position du convoi. Cette nouvelle position sera telle qu'aucun essieu précédemment hors du pont n'y sera rentré, de sorte qu'il ne peut se présenter que deux cas : ou tous les essieux engagés dans la première position obtenue se trouvent aussi engagés dans la seconde, ou partie seulement de ces essieux.*

Dans le premier cas, la nouvelle position obtenue est celle qui donne le moment maximum dans la section X.

Dans le second cas, on appliquera le théorème II à la portion du convoi engagée dans la seconde position obtenue, ce qui donnera une troisième position comprenant tout ou partie des essieux engagés dans la deuxième (sans aucun essieu nouveau). Si elle les comprend tous, ce sera la position cherchée: si elle n'en comprend qu'une partie, on appliquera le théorème à cette partie.

En continuant ainsi, et excluant à chaque fois des essieux, on finira par arriver à deux positions consécutives comprenant les mêmes essieux. La dernière de ces deux positions sera celle qui donne le moment maximum.

Pour démontrer ce théorème, reprenons l'expression générale du moment de flexion

$$\mu = \frac{l-x}{l}\sum_{1}^{i} \mathrm{P}\alpha - \frac{x}{l}\sum_{i+1}^{n} \mathrm{P}(l-\alpha).$$

où P est le poids d'un essieu, α son abscisse à un instant quelconque et n le nombre total et supposé invariable, dans le théorème II, des essieux.

Si l'on pose $\alpha_i = a_i + z$, le second membre est une fonction de z et le théorème II donne *toujours* le maximum de cette fonction. Si la valeur de z est telle que ce maximum se produit quand tout le convoi est engagé, c'est le maximum cherché. S'il en est autrement, le théorème II n'en donne pas moins le maximum de la fonction μ représentée par le second membre de l'équation. Seulement, cette fonction n'est plus celle dont on cherche le maximum. Sa signification est d'ailleurs facile à trouver.

Si la poutre était prolongée indéfiniment de part et d'autre de ses deux appuis, le second membre de l'équation ci-dessus donnerait le moment de flexion produit dans la section d'abscisse x pour toutes les positions possibles du convoi (§ 193, *remarque*). Les abscisses α des essieux placés à gauche de l'appui A devraient être comptées négativement; pour ceux arrivés à la droite de l'appui A', les abscisses α seraient supérieures à l.

Considérons pour un instant la poutre ainsi prolongée et supposons d'abord qu'un certain nombre d'essieux de tête, par exem-

ple, ceux n^{os} $j, j+1, j+2, \ldots, n-1, n$ aient quitté la partie de la poutre comprise entre ses appuis. Ils sont donc à la droite de la section X, c'est-à-dire que

$$j > i.$$

Si nous séparons dans le second membre ce qui est relatif à ces derniers essieux, nous aurons

$$\mu = \left[\frac{l-x}{l}\sum_1^i P\alpha + \frac{x}{l}\sum_{i+1}^{j-1} P(l-\alpha) + \frac{x}{l}\sum_j^n P(l-\alpha)\right].$$

Les deux premiers termes représentent le moment de flexion dû à la partie engagée, c'est-à-dire le moment de flexion vrai μ_ν dont on cherche le maximum.

En observant que, dans le dernier terme, tous les α sont supérieurs à l et qu'ainsi ces termes sont négatifs, on aura

$$\mu = \mu_\nu - \frac{x}{l}\sum_j^n P(\alpha - l)$$

ou

$$\mu_\nu = \mu + \frac{x}{l}\sum_j^n P(\alpha - l).$$

Cela étant, supposons que le théorème II appliqué au convoi entier ait fourni la position considérée dans laquelle les essieux n^{os} $j, j+1, \ldots$ ont quitté le convoi. Cela veut dire que la fonction μ atteint son maximum pour cette position; par suite, cette fonction μ a été constamment en croissant, depuis l'instant où le premier essieu est arrivé sur le pont jusqu'à l'instant actuel; car cette fonction est essentiellement positive et part de zéro. Elle commence donc à croître quand le convoi commence à s'engager et, si elle n'avait pas continué à croître jusqu'à l'instant actuel, elle aurait passé par un maximum avant cet instant, ce qui n'est pas, puisque la règle suivie eût donné ce maximum. D'autre part, tous les termes de la somme $\sum_i^n P(\alpha - l)$ croissent avec α, c'est-à-dire à mesure que le train avance. Donc la fonction μ_ν elle-

même a été constamment en croissant. Donc, son maximum ne s'est pas produit avant que le train soit arrivé à la position que nous considérons; il ne se produira que plus tard, par conséquent, soit pendant que la partie du train actuellement engagée se trouvera encore engagée, soit quand de nouveaux essieux auront quitté le pont. Dans le premier cas, on trouvera la position cherchée en appliquant le théorème II à la partie actuellement engagée du convoi; dans le second cas, cette application exclura de nouveaux essieux auxquels on pourra appliquer le même raisonnement, et ainsi de suite.

Supposons, au contraire, que la première application du théorème fournisse une position du convoi pour laquelle les j essieux de queue ne soient pas encore engagés. Alors, en appelant toujours μ_ν le moment de flexion produit par les essieux engagés, on aura

$$\mu = \mu_\nu + \frac{l-x}{l} \sum_1^j \mathrm{P}\alpha,$$

ou, comme les abscisses α qui entrent dans le dernier terme sont négatives, en appelant α' leurs valeurs absolues,

$$\mu_\nu = \mu + \frac{l-x}{l} \sum_1^j \mathrm{P}\alpha'.$$

Comme la fonction μ a actuellement sa valeur maxima, en faisant avancer le train (de gauche à droite), elle diminue; mais toutes les abscisses α' diminuent en même temps; par suite, il en est de même de μ_ν.

Donc, le maximum de cette fonction s'est produit *avant* que le convoi ait atteint sa position actuelle, c'est-à-dire, comme tout à l'heure, pendant que les essieux actuellement engagés ou une portion seulement de ces essieux sont engagés. Dans le premier cas, l'application du théorème II à la partie actuellement engagée fournira encore la position cherchée; dans le second, elle exclura de nouveaux essieux de queue et ainsi de suite.

Mais les applications successives du théorème II ne peuvent pas conduire indéfiniment à exclure des essieux; autrement on finirait

par les exclure tous et l'on arriverait à ce résultat absurde que le moment maximum est zéro. Donc on finira nécessairement par arriver à deux positions consécutives renfermant le même nombre d'essieux. Et alors le théorème II appliqué à un convoi formé uniquement par ces essieux montre que la dernière de ces positions fournit le moment maximum.

Remarque. — Ce qui précède suppose toutefois que le convoi ne déborde la poutre que par la tête ou par la queue. S'il débordait à la fois par les deux bouts, les mêmes règles ne s'appliqueraient plus. Comme, en tous cas, le maximum dans la section considérée se produit lors du passage d'un essieu dans cette section, on aurait, au plus, autant de positions à essayer qu'il y a d'essieux.

Il est rare qu'on ait des tâtonnements de ce genre à faire. Si le cas se présentait, la construction de Weyrauch (Th. II) s'y prêterait facilement.

Mais ce ne sera déjà que très exceptionnellement qu'on aura à recourir au théorème III et il sera plus rare encore qu'on ait des convois débordant à la fois par les deux extrémités pour lesquels on ait à faire des essais non systématiques.

§ 216.

PREMIÈRE SOLUTION PRATIQUE DU PROBLÈME I. — Si l'on veut utiliser les théorèmes qui précèdent dans la pratique, on aura à faire successivement les opérations suivantes :

a. **Choix du type de convoi que l'on veut adopter dans les calculs.** — Il y a à distinguer deux cas, suivant qu'il s'agit d'un pont-route ou d'un pont de chemin de fer.

1° **Ponts-route.** — La circulaire ministérielle du 9 juillet 1877 prescrit que les ponts métalliques dépendant des voies de terre devront être en état de livrer passage à toute voiture dont la circulation est autorisée par le règlement du 10 août 1852 sur la police du roulage, c'est-à-dire aux voitures attelées au maximum de cinq chevaux si elles sont à deux roues et de huit chevaux si elles sont à quatre roues.

Le poids des plus lourdes voitures, véhicule et chargement, doit

être supposé de 11 tonnes pour les charrettes à deux roues et de 16 tonnes pour les voitures à quatre roues.

Il est admis toutefois que dans les localités où ces poids seraient exagérés, ils pourraient être réduits, eu égard aux circonstances locales, sans que, dans aucun cas, le poids du véhicule et de son chargement puisse être inférieur à 6 tonnes pour les voitures à deux roues et à 8 tonnes pour les voitures à quatre roues sur les routes soumises à la police du roulage.

En ce qui concerne le calcul des fermes longitudinales, on doit admettre la plus défavorable des deux combinaisons suivantes, à savoir : une surchage uniforme de 300^{kg} au mètre superficiel sur chaussée et trottoirs ou une pareille surchage sur trottoirs seulement, la chaussée recevant une surcharge d'autant de voitures ayant les poids ci-dessus déterminés, que le tablier du pont en pourra contenir avec leurs attelages, sur le nombre de files que comporte la largeur de la voie. On doit d'ailleurs faire le choix entre les voitures à deux roues ou à quatre roues, de manière à obtenir le plus grand travail du métal.

Chaque file de voitures est censée occuper une zone de $2^m,50$.

Il est évident que la combinaison de voitures à deux ou quatre roues qui donne la plus grande fatigue du métal sera à adopter sur toutes les files. Il suffit donc de considérer une seule file ou une seule zone de $2^m,50$ de largeur.

M. l'Inspecteur général Kleitz, dans son beau Mémoire inséré aux *Annales des Ponts et Chaussées,* 2e semestre 1877, donne les deux types suivants de convois :

Dans les attelages à quatre roues, les chevaux sont censés attelés deux à deux, en sorte que, sur la *fig.* 46 *ter*, chacun des poids $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ représente celui de deux chevaux tandis que dans la *fig.* 46 *bis* ces lettres désignent le poids d'un cheval seulement.

M. Kleitz fait observer que le poids d'un cheval est très variable. Il est compris entre un minimum de 250^{kg} et un maximum de 500^{kg}. En adoptant ce dernier chiffre, on est notablement au-dessus de la moyenne.

Quant à la répartition du poids entre les deux essieux des voitures à quatre roues, M. Kleitz admet que celui de devant A_1 ou

B_1 supporte les 0,375 et celui de derrière, A_2 ou B_2, supporte les 0,625 de la charge.

Fig. 46 *bis*.

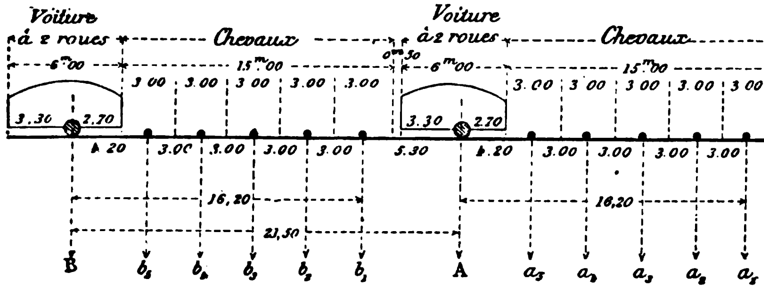
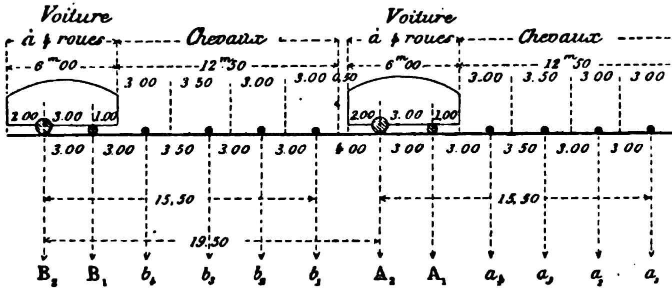


Fig. 46 *ter*.



2° **Ponts de chemin de fer**. — Pour les ponts de chemin de fer, le règlement du 9 juillet 1877 autorise le calcul des poutres longitudinales dans l'hypothèse d'une surcharge uniforme et qui, par mètre courant de voie simple, varie avec la portée, suivant les indications du Tableau suivant :

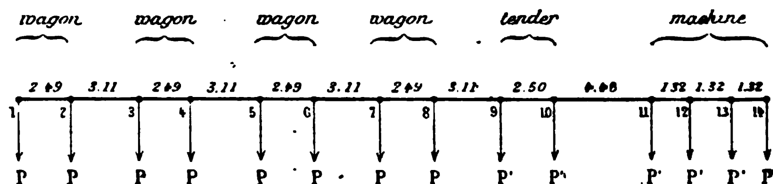
PORTÉE des travées.	SURCHARGE uniforme.	PORTÉE des travées.	SURCHARGE uniforme.	PORTÉE des travées.	SURCHARGE uniforme.	PORTÉE des travées.	SURCHARGE uniforme.
m	t	m	t	m	t	m	t
2	12,000	11	6,900	20	4,900	70	3,500
3	10,500	12	6,500	25	4,500	80	3,400
4	10,200	13	6,200	30	4,300	90	3,300
5	9,800	14	5,900	35	4,200	100	3,200
6	9,500	15	5,700	40	4,100	125	3,100
7	8,900	16	5,500	45	4,000	150 et au-delà	3,000
8	8,300	17	5,400	50	3,900		
9	7,800	18	5,200	55	3,800		
10	7,300	19	5,100	60	3,700		

Mais les épreuves doivent avoir lieu par des trains ayant la vitesse de 25^{km} dans une première épreuve et de 35 à 50^{km} dans une seconde épreuve, chaque train comportant une locomotive qui, avec son tender, pèse 72 tonnes, et des wagons de 15 tonnes; il est donc préférable de calculer la poutre dans l'hypothèse du passage de convois.

M. l'Inspecteur général Kleitz donne, dans son Mémoire inséré aux *Annales des Ponts et Chaussées* de 1875, les deux types de trains suivants, peu différents de ceux que donne M. l'Inspecteur général Lefort dans une Note des *Annales* en date du 19 septembre 1874 :

1° *Train à traction simple.*

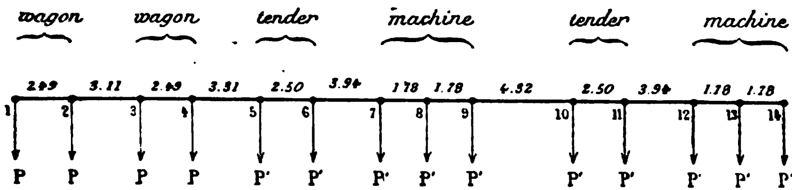
Fig. 47.



$$P = 7^t,5, \quad P' = 1,60 \times P = 12^t.$$

2° *Train à double traction.*

Fig. 48.

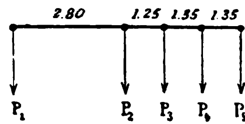


$P = 7^t,5, \quad P' = 1,467 \times P = 11^t.$

M. le Professeur Weyrauch, dans son Mémoire sur ce sujet, donne les trois types de machines :

1° *Machine Engerth, avec tender.*

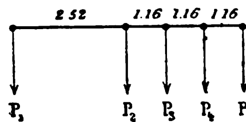
Fig. 49.



$P_1 = 4^t,9, \quad P_2 = 3^t,5, \quad P_3 = P_4 = P_5 = 5^t,9.$

2° *Engerth-Sommering.*

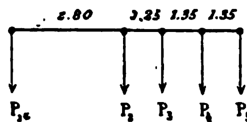
Fig. 50.



$P_1 = 4^t,35 \quad P_2 = 4^t,05 \quad P_3 = 6^t,45 \quad P_4 = 6^t,3 \quad P_5 = 6^t,85,$

Troisième type.

Fig. 51.



$P_1 = 4^t,9, \quad P_2 = 3^t,5, \quad P_3 = 5,5, \quad P_4 = P_5 = 5^t,9.$

Si un même pont doit livrer passage à plusieurs genres de convois, s'il y en a un dont les essieux offrent tout à la fois le moindre écartement, portent les plus fortes charges et aient le poids total le plus considérable, on opérera sur celui-là. L'expression générale (7) des moments de flexion (§ 193) indique, en effet : 1° que tous les termes qui entrent sous les signes Σ sont positifs, que, par suite, les moments fléchissants d'une poutre à deux appuis simples sont essentiellement positifs, quelles que soient les charges verticales descendantes qu'elle porte, ce qui résulte aussi de la construction graphique de ces moments (§ 194); 2° que, pour une section donnée, c'est-à-dire une valeur donnée de x, chaque terme est d'autant plus grand que la charge P à laquelle il correspond est plus grande et que α est plus grand, c'est-à-dire qu'*elle est plus rapprochée de la section considérée.*

Si l'on ne voit pas *a priori* que l'un des convois doive donner des résultats plus défavorables que les autres, on opérera sur deux ou plusieurs types successivement et l'on prendra pour chaque section le plus grand moment obtenu par ces opérations.

b. On considérera un certain nombre de sections de la poutre plus ou moins rapprochées suivant le degré d'exactitude que l'on recherche.

A chaque section, on appliquera le théorème II, c'est-à-dire (*fig.* 46, p. 329) qu'aux diverses sections X on élèvera des perpendiculaires Xe et l'on mènera des horizontales par les points e. On aura ainsi en quelque sorte, à simple vue, les positions du convoi qui fournissent les moments maxima dans les diverses sections considérées.

b bis. Si, pour certaines sections, ce théorème se trouve en défaut, on leur appliquera le théorème III.

c. Ayant ainsi, dans toutes les circonstances qui peuvent se produire, les positions du convoi répondant aux moments maxima dans diverses sections considérées X, il reste à déterminer les grandeurs de ces moments.

On peut, pour cela, procéder soit analytiquement, soit graphiquement : analytiquement, par la formule (1) ci-dessus ou celle (7) du § 193. Dans chaque application de cette formule, il y aura une charge P_i juste dans la section X que l'on considère, c'est-à-dire

une charge P_i dont l'abscisse est $\alpha_i = x$. Nous savons qu'on peut indifféremment la comprendre, si l'on applique la formule (1), dans la somme $\sum_1^i$ ou dans celle $\sum_{i+1}^n$, et si l'on applique la formule (7) du § 193, on peut la comprendre à volonté dans la somme $\sum_g$ ou celle $\sum_d$, ainsi que cela a été établi à l'occasion de cette formule.

Pour procéder graphiquement, il suffit de construire un polygone funiculaire, comme au § 194. Il semblerait qu'on ait à construire un tel polygone pour chaque section, puisque, pour chaque section, le convoi occupe une nouvelle position. Il n'en est pas ainsi.

Ayant construit le polygone funiculaire pour une position du convoi, celle qui correspond à la première des sections dont on cherche le moment fléchissant, on sait, par la recherche *b*, de combien et dans quel sens on doit déplacer le convoi pour obtenir le moment fléchissant maximum dans l'une quelconque des autres sections. Mais, au lieu de déplacer le convoi de cette quantité, on peut le laisser fixe et déplacer la poutre en sens contraire de celui dans lequel on devait déplacer la charge et de la même quantité; les positions relatives de la poutre et de la charge seront ainsi ce qu'elles doivent être pour la nouvelle section à étudier.

Par cet artifice, les lignes d'action des charges directement appliquées restant fixes, ainsi que leurs grandeurs, ni le polygone de ces forces, ni leur polygone funiculaire n'auront changé. Ce qui se sera déplacé avec les extrémités de la poutre, ce sont les lignes d'action des réactions des appuis, et leurs grandeurs se seront modifiées aussi. Cela n'empêche pas d'utiliser le même polygone des forces; les cordes seules seront à déplacer.

Si l'on se reporte aux figures 93, 93 de la *Pl. XXI*, nous avons vu que si la poutre AB supporte les forces

1, 2, 3, 4, 5, 6,

représentées par le polygone des forces 1.2.3.4.5.6, en construisant le polygone funiculaire

8'.1'.2'.3'.4'.5'.6'.7'

de pôle o, il a suffi d'arrêter les côtés extrêmes aux verticales des

points d'appui A et B pour obtenir la corde 8'.7', et les ordonnées verticales du polygone comptées depuis cette ligne donnent, à un facteur près égal à la distance polaire, les moments fléchissants de toutes les sections.

Appliquons cela à un convoi formé par les trois charges 1, 2, 3. On propose de trouver le moment fléchissant maximum dans les deux sections 1 et X.

Supposons que, par la méthode exposée, on ait reconnu :

1° Que, pour la section 1, c'est la position actuelle du convoi qui donne le moment maximum;

2° Que, pour obtenir le moment maximum dans la section X, il faut faire avancer le convoi vers la droite, jusqu'à ce que l'essieu 3 se trouve dans cette section.

Pour la section 1, comme c'est la charge actuelle 1, 2, 3 qui intervient, les côtés extrêmes du polygone funiculaire sont 1'.8' et 3'4'; prolongeons-les jusqu'aux verticales des appuis en 8' et 7_1; la corde 8'.7_1 est telle que les ordonnées comptées à partir de cette ligne donnent les moments fléchissants. Donc, l'ordonnée comprise entre 1' et la corde 8'.7_1 est la plus grande qui puisse se produire dans la section 1 pendant la marche du convoi.

A présent, je dis que, pour la section X, le même polygone est utilisable. En effet, nous devons, pour avoir le moment maximum en X, faire avancer le convoi 1, 2, 3 vers la droite de la quantité 3X. Au lieu de cela, laissons-le en place et faisons rétrograder le pont vers la gauche de la quantité X3. Les appuis A et B viendront en A' et B'; la section X viendra en 3. C'est donc en ce dernier point que nous devons déterminer le moment fléchissant.

A cet effet, prolongeons les côtés extrêmes 1'8' et 3'4' du polygone funiculaire jusqu'aux verticales des nouveaux appuis en 8_2 et 7_2; les ordonnées comptées depuis la corde $8_2 7_2$ donnent les moments répondant à la nouvelle position relative du convoi et de la poutre et l'ordonnée $3' 3_2$ est celle que nous cherchons, c'est-à-dire que, multipliée par la distance polaire, elle représente, à l'échelle de la figure, le plus grand moment de flexion qui naîtra dans la section X de la poutre pendant le passage du convoi.

c bis. Il est à peine besoin de dire que, dans les cas indiqués *b bis*, où les essieux intervenant se trouveraient modifiés en

nombre, on tiendrait compte de la modification dans le calcul du moment de flexion, si l'on procède par le calcul.

Si l'on procède graphiquement, le polygone funiculaire tracé une seule fois pour tous les essieux existants servira même dans ce cas. Les côtés extrêmes du polygone seront seulement différents, puisqu'on n'aura qu'une partie du polygone à considérer.

d. Supposons que, pour deux sections X et X′ également distantes du milieu de la poutre, on ait, dans l'hypothèse admise de convois marchant tous dans le même sens, de gauche à droite, trouvé respectivement les moments de flexion maxima μ, μ'. Il est clair que, pour les convois marchant en sens inverse, ce sera la section X qui supportera le moment maximum μ' et la section X′, le moment maximum μ. Et, comme la poutre est parcourue par les mêmes trains marchant dans les deux sens, chacune des deux sections X et X′ supportera tantôt le moment maximum μ, tantôt celui μ'. C'est donc le plus grand des deux qu'il conviendra d'adopter tant pour la section X que pour celle X′, de sorte que la distribution des moments maxima sera symétrique par rapport au milieu de la poutre.

e. Ayant déterminé le moment fléchissant maximum que produit la charge mobile en diverses sections, il suffit d'y ajouter le moment fléchissant produit par la charge permanente, dans ces mêmes sections, pour avoir le moment fléchissant maximum effectif qui se produit dans chacune d'elles.

Si la charge permanente est une charge uniforme distribuée à raison de q^{kg} par mètre courant de poutre, le moment fléchissant μ dû à la charge permanente au point d'abscisse x est

$$\mu = \frac{q}{2}x(l-x).$$

C'est, comme nous le savions, l'ordonnée d'une parabole.

Si d est la distance polaire adoptée dans le tracé du polygone funiculaire relatif au convoi, on adoptera cette même distance polaire, pour le tracé de la parabole, courbe funiculaire de la charge permanente; ses ordonnées seront

$$\frac{\mu}{d} = y = \frac{q}{2d}x(l-x).$$

Pour son tracé on peut consulter la Note II *bis;* on peut aussi tracer un polygone funiculaire circonscrit à la courbe en utilisant le théorème du § 45 *bis*. Enfin on peut utiliser un procédé qui est indiqué au § 217.

f. Quand on aura obtenu les moments définitifs aux diverses sections considérées, on pourra porter ces moments sur des ordonnées verticales à une échelle convenable et relier les extrémités de ces ordonnées par une courbe, ce qui donnera les moments fléchissants maxima approchés de toutes les sections.

Pour les poutres de petite longueur auxquelles on donne des dimensions uniformes, au lieu de chercher le moment maximum pour chaque section, il suffit de chercher le *maximum maximorum*.

Nous verrons (§ 230) comment on peut le trouver exactement; mais les données de la pratique sont, en général, telles que la section qui le supporte est dans le voisinage du milieu de la poutre, et l'on obtient, le plus souvent, une approximation suffisante, en appliquant les règles que nous venons d'indiquer à cette seule section pour laquelle $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}$.

§ 217.

CAS D'UNE SEULE CHARGE ROULANTE. — Supposons une charge unique P cheminant (*fig*. 52) sur la poutre AA'. D'après le théorème I, elle produira le moment maximum dans une section X au moment où elle passera dans cette section.

Ce moment μ_x se déduit des formules du § 193 en y faisant $\alpha = x$, ce qui donne

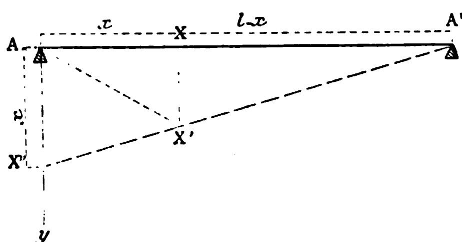
$$\mu_x = \frac{P(l-x)x}{l}.$$

On peut calculer cette valeur pour diverses valeurs de x et, si l'on représente μ_x par une ordonnée XX', on voit que le lieu des extrémités X' est un arc de parabole à axe vertical passant par les points A et A'.

On peut aussi construire très simplement l'ordonnée XX' comme l'a indiqué M. Veyrauch.

Élevons en A une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons une longueur $AX'' = AX = x$; joignons $X''A'$; l'intersection de cette ligne avec la verticale du point X donne le point cherché X' dans le cas où le poids $P = 1$, comme le montrent les triangles semblables AXX' et $A'AX''$. Il suffit donc de multiplier l'ordonnée XX' ainsi obtenue par P pour avoir le moment cherché.

Fig. 52.



On obtient ainsi autant de points X' que l'on désire de la parabole ayant pour ordonnée

$$\frac{\mu_x}{P} = \frac{x(l-x)}{l}.$$

Mais les ordonnées étant mesurées à l'échelle des forces, au lieu de prendre $A'X'' = AX$, on devra prendre

$$A'X = AX \times n$$

si $n:1$ est le rapport de la longueur qui représente l'unité de force à celle qui représente l'unité de longueur.

§ 218.

CAS DE DEUX CHARGES. — THÉORÈME. — *Un système de deux charges roulantes passant indifféremment dans les deux sens produit en chaque point* X *le moment fléchissant maximum, lorsque c'est la plus forte des deux qui passe au point* X.

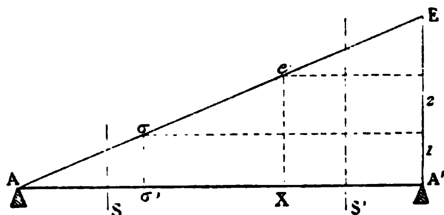
Cela résulte de suite des règles données plus haut pour trouver la position d'un convoi qui fournit le moment le plus grand dans une section X.

Portons (*fig.* 53) sur la verticale A′ les deux charges 1 et 2 bout à bout, en commençant par la plus petite.

Par le point X de la section considérée, élevons la perpendiculaire Xe jusqu'à sa rencontre avec AE; l'horizontale menée par e rencontrera celle des deux charges qui doit passer au point X pour qu'il s'y produise le moment maximum. Menons une horizontale par le point de division des deux forces 1 et 2; cette horizontale rencontre AE en σ. A gauche de la verticale σ ce serait la plus petite charge qu'il faudrait placer sur la section que l'on considère pour y produire le maximum, et à droite c'est la plus grande.

Mais, si nous prenons une section S et sa symétrique S′, on voit que, pour celle-ci, c'est la charge 2, et il est facile de voir que le moment fléchissant maximum en S′ sera plus grand que le moment maximum en S.

Fig. 53.



En effet, la formule générale est

$$\mu = \frac{x}{l}\sum_{x}^{l} P(l-x) + \frac{l-x}{l}\sum_{0}^{x} Px.$$

Si une charge agit au point X même, nous savons que nous pouvons la comprendre dans la première ou la seconde somme. Alors, soient P_1 la charge de gauche et $P_2 > P_1$ celle de droite ou d'avant. Soit μ_1 ce que devient μ si c'est P_1 qui agit en X, et μ_2 si c'est P_2. Dans le premier cas, nous pouvons regarder les deux charges comme faisant partie de la seconde somme et la première n'existe pas; dans le second cas, c'est l'inverse, et l'on aura si a est la distance constante des deux charges

$$\mu_1 = \frac{x}{l}[P_1(l-x) + P_2(l-x-a)],$$

$$\mu_2 = \frac{l-x}{l}[P_2 x + P_1(x-a)]$$

ou

$$(\mu_1) \qquad \mu_1 = \frac{x(l-x)}{l}(P_1+P_2) - P_2\frac{ax}{l},$$

$$(\mu_2) \qquad \mu_2 = \frac{x(l-x)}{l}(P_1+P_2) - P_1\frac{a(l-x)}{l}.$$

Pour que, pour une valeur de x, on puisse avoir $\mu_1 > \mu_2$, il faut que x soit tel que

$$P_2 x < P_1(l-x);$$

d'où

$$x < l\frac{P_1}{P_1+P_2} \quad \text{ou} \quad x < A\sigma',$$

comme l'indique la construction graphique ci-dessus.

Prenons à présent la valeur de μ_1 pour le point S dont l'abscisse soit désignée par x. Elle est donnée par la formule (μ_1). La formule (μ_2) donne la valeur de μ_2 pour ce même point S. Pour le point symétrique S', la valeur de μ_2 s'obtiendra en changeant, dans μ_2, x en $l-x$. Soit μ'_2 la valeur ainsi obtenue,

$$(M'_2) \qquad \mu'_2 = \frac{x(l-x)}{l}(P_1+P_2) - P_1\frac{ax}{l}.$$

On voit que $\mu'_2 > \mu_1$. Ainsi la valeur maxima trouvée pour S' est plus grande que la valeur maxima trouvée pour son symétrique S. Et, comme c'est la plus grande des deux valeurs qu'il faut adopter aussi bien pour S que pour S', parce que les charges peuvent cheminer également dans les deux sens, on voit qu'il faut partout adopter le moment obtenu en plaçant la plus grande des deux charges sur le point que l'on veut éprouver.

§ 219.

Théorème IV. — *Si une poutre à deux appuis simples, portant ou non une charge permanente* uniforme, *est parcourue par un convoi quelconque, la valeur que prend le moment de flexion sous un essieu déterminé, pendant la marche du train, est représentée par les ordonnées d'une parabole* unique pour tous les essieux *quel qu'en soit le nombre, ces ordonnées étant seulement comptées à partir de droites différentes pour les différents essieux* (1).

---

(1) Ce théorème nous a été communiqué par M. le capitaine du Génie Ventre, ancien professeur à l'Ecole de Fontainebleau, à l'occasion de notre enseignement

Nous déduirons cette importante proposition d'une formule qui la renferme comme cas particulier, et qui nous sera utile pour en faciliter les applications.

Le moment de flexion, en un point compris entre les deux essieux consécutifs n^os i et $i+1$ et ayant x pour abscisse, sous l'action réunie du convoi et d'une charge permanente q, est

$$(1) \qquad \mu = \frac{l-x}{l}\sum_{1}^{i} P\alpha + \frac{x}{l}\sum_{i+1}^{n} P(l-\alpha) + \frac{q}{2}x(l-x).$$

Soient μ_{ig} et μ_{id} les sommes, prises en valeur absolue, des moments relativement à l'essieu n° i des charges mobiles qui sont respectivement à sa gauche et à sa droite. Ces deux grandeurs restent évidemment invariables pendant la marche du train et l'on a

$$\mu_{ig} = P_1(\alpha_i - \alpha_1) + P_2(\alpha_i - \alpha_2) + \ldots + P_{i-1}(\alpha_i - \alpha_{i-1}) + P_i(\alpha_i - \alpha_i),$$

où le dernier terme est nul et est ajouté pour la symétrie. On peut encore écrire

$$\mu_{ig} = \alpha_i \sum_{1}^{i} P - \sum_{1}^{i} P\alpha.$$

On trouve de même

$$\mu_{id} = (l - \alpha_i)\sum_{i+1}^{n} P - \sum_{i+1}^{n} P(l-\alpha).$$

Remplaçant dans l'expression de μ les deux sommes $\sum_{1}^{i} P\alpha$ et $\sum_{i+1}^{n} P(l-\alpha)$ par leurs valeurs tirées de ces deux équations, il viendra

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mu = {} & \frac{l-x}{l}\alpha_i \sum_{1}^{i} P + \frac{x}{l}(l-\alpha_i)\sum_{i+1}^{n} P \\ & + \frac{qx(l-x)}{2} - \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_{ig} - \frac{x}{l}\mu_{id}. \end{aligned} \right.$$

---

sur la Statique graphique qu'il a bien voulu suivre; il nous paraît tout à fait fondamental et contient, en germe, une solution graphique pure et uniforme de tous les problèmes posés au commencement de ce Chapitre et une solution aussi simple que possible; car elle n'exige, en général, que le tracé d'une seule parabole, tracé qui serait nécessaire, même s'il n'y avait que la charge permanente, de sorte que l'étude de toutes les circonstances que fait naître la présence du convoi exige seulement qu'outre la parabole on trace un certain nombre de droites.

Soit, à un instant quelconque, μ_i le moment de flexion sous l'essieu n° i. On obtiendra évidemment μ_i en faisant, dans cette équation, $x = \alpha_i$, ce qui donne, en désignant par x, non plus l'abscisse d'une section quelconque comprise entre les essieux n^{os} i et $i+1$, mais celle de l'essieu n° i

$$(3)\qquad \mu_i = x(l-x)\left(\frac{1}{l}\sum_1^n \mathrm{P} + \frac{q}{2}\right) - \left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_{ig} - \frac{x}{l}\mu_{id},$$

équation d'une parabole à axe vertical présentant sa concavité vers le haut, dont le terme du second degré a pour coefficient

$$\frac{1}{l}\sum_1^n \mathrm{P} + \frac{q}{2},$$

soit *la demi-charge permanente par mètre, plus le poids total du convoi rapporté au mètre courant,* c'est-à-dire une grandeur indépendante de l'essieu considéré. *La forme de cette parabole est donc elle-même indépendante de cet essieu et sa position seule en dépend.*

Concevons qu'on construise une fois pour toutes la parabole dont l'ordonnée m est

$$(4)\qquad m = x\left(1-\frac{x}{l}\right)\left(\sum_1^n \mathrm{P} + \frac{ql}{2}\right),$$

qui passe par les deux appuis et dont le sommet est, par suite, situé sur la perpendiculaire élevée au milieu de la longueur de la poutre.

Supposons qu'on construise de plus, pour *chaque essieu* de rang i, la droite dont l'ordonnée m_i est

$$(5)\qquad m_i = \left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_{ig} + \frac{x}{l}\mu_{id};$$

on aura

$$(6)\qquad \mu_i = m - m_i,$$

c'est-à-dire qu'à chaque instant le moment de flexion sous l'essieu n° i est égal à l'ordonnée verticale de la parabole *fixe,* comptée depuis la droite dont l'équation est (5).

§ 220.

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES MOMENTS DE FLEXION SOUS LES ESSIEUX. — Nous savons (TH. I) que le moment de flexion maximum dans une section donnée se produit lorsque cette section est sous un essieu. Si donc on sait construire, à tout instant, les moments de flexion sous tous les essieux, on en conclura aisément le moment maximum dans chaque section.

Il y a deux phases à distinguer, suivant que le train est ou non engagé tout entier. Nous nous occuperons d'abord du premier cas.

Observons que l'équation (5) des droites m_i donne, pour $x = o$ et $x = l$, respectivement $m_i = \mu_{ig}$ et $m_i = \mu_{id}$. Ainsi, μ_{ig} et μ_{id} sont les ordonnées sur les appuis de la droite à partir de laquelle on doit compter les ordonnées de la parabole fixe pour avoir les moments de flexion μ_i sous l'essieu n° i.

Supposons, pour fixer les idées, une poutre AB (*fig.* A, *Pl. XXIII*) parcourue par un système de quatre charges

1, 2 3, 4,

qu'on représente (*fig.* A_0) dans une position quelconque, leur polygone des forces étant ab (*fig.* a); les côtés 1, 2, 3, 4 de ce polygone donnent les grandeurs des quatre charges mobiles. Au bout de la force 4, portons une longueur $bc = \frac{ql}{2}$ représentant la moitié de la charge permanente de la poutre. Par le milieu I de ac, élevons une perpendiculaire à cette ligne sur laquelle nous choisirons un pôle O, tel que la distance polaire d soit en rapport simple avec la longueur l de la travée. On a pris $d = \frac{l}{4}$.

Soit O_1 le milieu de cette perpendiculaire IO. Concevons qu'on construise la courbe funiculaire relative au pôle O_1 et passant par les points A et B d'une charge totale ac, uniformément répartie sur la longueur de la poutre, de sorte que la charge par unité de longueur soit

$$\frac{q}{2} + \frac{1}{l}\sum_1^n P.$$

$\sum_1^n P$ étant la somme des charges mobiles (ici au nombre de quatre).

Cette courbe est, comme nous le savons, une parabole dont l'ordonnée y, multipliée par la distance polaire $\frac{d}{2}$, représentera en chaque point (§ 194) le moment de flexion que la charge considérée déterminerait en ce point. Mais nous avons appelé m le moment de flexion que produirait la charge uniforme

$$q - \frac{2}{l}\sum_{1}^{n} P,$$

double de la précédente. Donc

$$y \times \frac{d}{2} = \frac{m}{2},$$

d'où

$$y = \frac{m}{d}.$$

Cette parabole est facile à tracer. Ses tangentes en A et B sont parallèles aux rayons polaires $O_1 a$, $O_1 c$. D'ailleurs, si l'on mène AS parallèle à Oa, on obtient le sommet S de la courbe d'après les propriétés connues de la parabole. On a donc tous les éléments nécessaires pour la tracer.

A présent (*fig.* A_0), construisons un polygone funiculaire $A_0 1.2.3.4 B_0$ relatif au pôle O des charges 1, 2, 3, 4 des essieux, abstraction faite de la charge permanente.

Les ordonnées $22'$, $33'$, $44'$ des divers sommets comptées à partir du côté extrême de gauche $A_0 x$, multipliées par la distance polaire d, donnent (§ 119) les moments μ_{ig}, en sorte que

$$(a) \qquad 0 = \mu_{1g}, \quad 22' = \frac{\mu_{2g}}{d}, \quad 33' = \frac{\mu_{3g}}{d}, \quad 44' = \frac{\mu_{4g}}{d}.$$

De même, les ordonnées des sommets comptées depuis le côté extrême de droite $B_0 y$, multipliées par la distance polaire d, donnent les μ_{id}, en sorte que

$$(b) \qquad 11'' = \frac{\mu_{1d}}{d}, \quad 22'' = \frac{\mu_{2d}}{d}, \quad 33'' = \frac{\mu_{3d}}{d}, \quad 0 = \mu_{4d}.$$

Portons les longueurs (a) sur la verticale descendante à partir de A (*fig.* A).

Nous déterminerons les points

A ou 1', 2', 3', 4'.

Portons de même les longueurs (b) sur la verticale descendante à partir de l'appui B, nous aurons, sur cette verticale, les points

$$1'', 2'', 3'', B, \text{ ou } 4''.$$

Joignons les points correspondants $1'1''$, $2'2''$, $3'3''$, $4'4''$. Les ordonnées de ces droites comptées depuis AB représentent les quotients $\frac{m_i}{d}$. Donc les ordonnées comprises entre ces droites et la parabole représentent les quantités $\frac{m-m_i}{d}$ ou $\frac{\mu_i}{d}$.

Ainsi, si l'on considère une section quelconque de la poutre. les produits des quatre ordonnées qu'elle détermine entre la parabole et les quatre droites $1'1''$, $2'2''$, $3'3''$, $4'4''$, ces ordonnées mesurées à l'échelle des forces, par la distance polaire d (qui est ici le quart de la longueur de la travée) mesurée à l'échelle des longueurs, donnent les quatre moments de flexion qui se produisent dans cette section, lorsque chacun des quatre essieux y passe.

§ 221.

NOUVELLE SOLUTION DU PROBLÈME I. — Le tracé très rapide qui précède permet de résoudre, d'une façon immédiate et complète, tous les problèmes posés au commencement du Chapitre. En ce qui touche le plus important d'entre eux, le problème consistant à trouver la valeur maxima que peut atteindre le moment de flexion, dans une section, donnée pendant le passage du convoi, soit (*fig.* A) X une section quelconque. Le moment maximum s'y produit (th. I) lorsque l'un des quatre essieux y passe.

Des quatre ordonnées comprises entre les droites et la parabole, c'est celle partant de la ligne $4'4''$ qui est la plus grande. Donc :

1° C'est quand l'essieu n° 4 passe dans la section considérée qu'il s'y produit le moment de flexion maximum;

2° Ce moment est égal au produit de l'ordonnée comprise entre la parabole et la ligne $4'4''$ par la distance polaire $d = \frac{l}{4}$.

Si l'on considère la section X' symétrique de X par rapport au milieu de la poutre, c'est l'ordonnée comptée depuis $2'2''$ qui est la plus grande, c'est-à-dire que c'est le passage de l'essieu n° 2

dans cette section qui y détermine le moment de flexion maximum qui s'y produit pendant le passage du convoi.

D'une manière générale, ce sont les ordonnées comprises entre le polygone AabcB formé par les quatre droites

$$1'1'',\ 2'2'',\ 3'3'',\ 4'4'',$$

qui, au facteur d près, déterminent dans toutes les sections le moment de flexion maximum dû à l'action réunie de la charge permanente et du convoi.

S'il n'y avait pas de convoi, la connaissance du moment de flexion exigerait déjà le tracé d'une parabole; par cette méthode, on obtient le même résultat avec quelques lignes droites à tracer en plus et on a les moments non seulement dans certaines sections, mais dans toutes.

Dans les trois sections passant par les sommets du polygone, le moment est le même que ce soit l'essieu qui répond au numéro de l'une ou de l'autre des deux droites déterminant ce sommet qui passe dans la section. Ces sections sont celles que, sur la *fig.* 46 (p. 364), nous avons désignées par p, q, ...; de sorte que, par le tracé de la figure dont il s'agit, on obtiendrait une vérification ou, si on le voulait, on obtiendrait de suite les verticales des sommets de notre polygone.

Conformément à la remarque d du § 216 il faut, à cause de la marche des trains dans les deux sens, considérer chacune des sections telles que X et X′, équidistantes du milieu de la poutre, comme supportant le moment de flexion répondant à la plus grande des deux ordonnées maxima relatives à ces deux sections. Pour les sections X et X′, c'est celle partant de la ligne $4'4''$.

Généralement considérons (*fig.* A) le contour AabcB qui donne les ordonnées maxima.

Concevons qu'on rabatte la demi-figure de droite sur celle de gauche autour de CS; le périmètre-limite ainsi obtenu sera celui à partir duquel il faudra compter l'ordonnée maxima pour chaque section *et sa symétrique*. Ici ce périmètre A$a'b'$K bordé par un liséré est formé partie par la ligne $2'2''$, partie par les lignes symétriques de $3'3''$ et $4'4''$.

Ce sont les produits de la distance polaire $d = \frac{l}{4}$ par les ordon-

nées comprises entre ce contour et la parabole (mesurées à l'échelle des forces), qui donnent les moments de flexion maxima d'après lesquels on devra calculer les moments d'inertie, dans une des deux moitiés de la poutre, l'autre moitié étant symétrique.

§ 222.

RÉSUMÉ DE LA MARCHE A SUIVRE DANS LA PRATIQUE. — On voit, d'après cela, qu'on peut se borner à faire ce qui suit :

1° Tracer la demi-poutre AC et le demi-arc de parabole correspondant AS;

2° Pour trouver les positions des moitiés des droites $1'1''$, ..., porter sur la verticale CS les demi-sommes des ordonnées précédemment portées sur les verticales des appuis, à savoir :

$$\frac{0 + B1''}{2}, \quad \frac{A2' + B2''}{2}, \quad \ldots.$$

Pour les relever directement sur la figure A_0, par le point G d'intersection des côtés extrêmes du polygone funiculaire, point qui détermine la verticale du centre de gravité G des charges des essieux, mener la médiane GC_0 du triangle $G11''$. Elle déterminera les points $1'''$, $2'''$, ..., et ce sont les ordonnées

$$11''', \; 22''', \; 33''', \; 44''',$$

qu'on devra porter à partir du point C (*fig.* A) sur la verticale S, ce qui donnera, sur la figure A, les points

$$1''', \; 2''', \; 3''', \; 4''';$$

3° Sur la verticale de l'appui A et à partir du point A, pour chaque charge telle que 2, porter *la plus petite* des deux ordonnées $A2'$ et $B2''$, précédemment portées sur les deux appuis. On l'a immédiatement sur la figure A_0. Pour les charges placées à gauche de la verticale G, ce sont les ordonnées arrêtées au côté extrême de gauche A_0x, et pour celles situées à droite de G, ce sont les ordonnées arrêtées au côté extrême de droite qu'on aura à prendre.

On obtiendra ainsi sur la figure A les points

A (répondant à la verticale 1 de la *fig.* A_0), $2'$, $3'_1$,
A (répondant à 4 de la *fig.* A_0).

On joindra ces quatre points respectivement aux points

$1''', 2''', 3''', 4'''$;

4° Pour chaque section X et sa symétrique, on prendra l'ordonnée comprise entre la parabole et le contour polygonal déterminé par ces lignes.

§ 223.

CAS D'EXCEPTION. — Ces règles simples résolvent le problème toutes les fois que le moment de flexion maximum se produit dans toutes les sections pendant que le convoi tout entier est sur le pont. S'il arrivait que, pour certaines sections particulières, il en fût autrement, elles seraient en défaut pour ces sections. Il importe d'abord d'être avisé par la construction même si l'on se trouve ou non dans ce cas. A cet effet, reprenons la figure tout entière ASB (*fig.* A) et plaçons le convoi dans les deux positions extrêmes où il est engagé tout entier.

Soit la position 1, 2, 3, 4 où l'essieu de queue 1 est sur la culée A, et celle 1', 2', 3', 4' où l'essieu de tête 4' est en B.

L'épure ci-dessus n'est valable, à savoir :

1° En ce qui touche l'essieu n° 1 que pour les sections comprises entre les verticales 1 et 1', puisque, si l'essieu n° 1 passe dans une telle section, tout le convoi est nécessairement engagé, tandis qu'il ne l'est plus pour une section quelconque placée à droite de 1';

2° De même en ce qui touche les essieux n°s 2, 3, 4, respectivement entre les verticales 2 et 2', 3 et 3', 4 et 4'.

C'est pourquoi on a eu soin de tracer la droite $1'1''$ en trait plein entre les verticales 1 et 1' et en pointillé en dehors, les droites $2'2''$, $3'3''$, $4'4''$ en traits pleins respectivement entre les verticales 2 et 2', celles 3 et 3', celles 4 et 4' et en pointillé en dehors de ces intervalles.

Les règles du paragraphe précédent fournissent la solution du problème posé, pourvu qu'elles n'obligent à utiliser dans la détermination du périmètre-limite marqué par un liséré, que les parties des quatre lignes $1'1''$, $2'2''$, ..., marquées en trait plein.

C'est ce qui s'est produit dans l'exemple que nous avons choisi et ce qui se produira le plus souvent.

S'il en était autrement, on aurait à faire une partie de l'épure complémentaire que nous allons indiquer d'une façon complète et détaillée.

§ 224.

CAS D'UN CONVOI ENGAGÉ EN PARTIE SEULEMENT. — Considérons, par exemple, le convoi dans la position 1′, 2′, 3′, 4′, et supposons qu'il continue à cheminer vers la droite, de façon que ses essieux quittent successivement le pont. Ce que nous dirons de cette position extrême s'appliquera naturellement à celle 1, 2, 3, 4 en faisant rétrograder le convoi vers la gauche à partir de cette position.

Que le convoi soit engagé en tout ou en partie, il est clair que le moment de flexion μ_i sous l'essieu n° i est donné par l'équation (3) du § 219, en n'y faisant entrer à chaque instant que les charges engagées à cet instant.

Par suite, nous pouvons toujours employer la même méthode :

1° Tracer la parabole [représentée par l'équation (4) du § 219] *correspondant aux seules charges engagées.*

2° Tracer les droites analogues à celles 1′1″, 2′2″, etc., et qui sont définies parce que leurs ordonnées aux deux appuis sont μ_{ig}, μ_{id} les μ_{ig} et μ_{id} se rapportant *aux seules charges engagées.* Nous appellerons ces droites les *lignes de fermeture.*

L'équation (4) montre que, quand l'essieu 4′ a quitté le pont, la nouvelle parabole à tracer se déduit de celle ASB, que nous désignerons simplement par S, en réduisant toutes les ordonnées de cette dernière dans le rapport constant

$$\left(\sum_1^3 P + \frac{ql}{2}\right) : \left(\sum_1^4 P + \frac{ql}{2}\right).$$

Or nous avons pris (*fig. a*, *Pl.* XXIII) la distance polaire $OI = \frac{l}{4}$ et nous avons fait observer qu'en conséquence la corde BS (*fig.* A) est parallèle au rayon Oc. Il en résulte, à cause des triangles semblables OcI (où $OI = \frac{1}{2}AC$) et BCS que

$$CS = 2cI = ca.$$

Ainsi la flèche de la parabole a la même longueur que le polygone des forces.

Prenons (*fig.* A)

$$SS_3,\ S_3S_2,\ S_2S_1,$$

respectivement égales aux forces

$$4,\ 3,\ 2.$$

Il est clair que S_3 sera le sommet de la parabole qui remplace celle S quand la charge $4'$ a quitté le pont; de même S_2 et S_1 sont les sommets des paraboles répondant aux positions du convoi où les charges se réduisent respectivement aux deux essieux n°s 1 et 2 et à l'essieu unique n° 1.

Le tracé de ces nouvelles paraboles est immédiat.

Soit β_2 un point quelconque de la parabole ASB. Menons la sécante $S\beta_2$ qui coupe le prolongement de AB en P; joignons ce point aux sommets S_3, S_2, S_1, les points où ces droites coupent la verticale du point β_2 appartiennent aux nouvelles courbes.

Il suffit d'ailleurs de tracer ces courbes, au plus, entre les verticales $1'$ et B.

En ce qui touche les nouvelles lignes de fermeture qui servent de complément aux parties tracées en plein de $1'1''$, $2'2''$, $3'3''$, $4'4''$, on observera que, par définition, les μ_{ig} ne changent pas, ni, par suite, les $\frac{\mu_{ig}}{d}$, c'est-à-dire les ordonnées de ces droites sur l'appui A.

Ainsi, les nouvelles droites partiront toujours des points $1'$, $2'$, $3'$, $4'$. Ceci posé, soit $1'1$ la partie valable de $1'1''$; menons l'ordonnée $1\beta_1$ jusqu'à sa rencontre en β_1 avec la parabole S.

Les ordonnées du contour fermé $1'1\beta_1S1'$ multipliées par d donnent les moments de flexion au passage de l'essieu n° 1, lorsqu'il chemine entre les verticales 1 et $1'$.

Si le convoi avance infiniment peu vers la droite, l'essieu $4'$ quitte le pont, et l'ordonnée $\beta_1 1$, au lieu de se compter depuis la parabole S jusqu'à la ligne $11'$, se comptera depuis la parabole S_3 jusqu'à la nouvelle ligne à déterminer. Mais que l'essieu $4'$ soit infiniment près de la culée B, à gauche ou à droite de cette culée, cela ne change qu'infiniment peu le moment de flexion dans une section quelconque, en particulier dans celle faite par le point β_1.

Donc, si du point β'_1 où cette verticale (on a pris une verticale très voisine de celle β_1 pour éviter toute confusion) coupe la parabole S_3, on prend une longueur $\beta'_1 1$ égale à celle $\beta_1 1$, on aura un point 1 de la nouvelle ligne à partir de laquelle se compteront les ordonnées. Et, comme cette nouvelle ligne passe toujours au point A ou 1', il suffit, pour l'obtenir, de joindre ce point 1' à celui 1 qui vient d'être défini. Les ordonnées comptées entre cette ligne et la parabole S_3 fourniront les moments de flexion sous l'essieu n° 1 tant que l'essieu n° 4 sera le seul qui ait quitté le pont, c'est-à-dire jusqu'à ce que celui n° 3 arrive en B. Traçons donc une verticale $1\gamma_1$ distante de $1\beta'_1$ d'une longueur égale à l'écartement des essieux nos 3 et 4, et les ordonnées du périmètre fermé $\beta'_1 1 1\gamma_1\beta'_1$ donnent les moments de flexion sous l'essieu n° 1, tant qu'il demeure compris entre les ordonnées extrêmes de ce périmètre.

A partir de ce moment, l'essieu n° 3 quitte à son tour le pont et les ordonnées se comptent depuis la parabole S_2. Donc, sur la verticale de γ_1, à partir du point γ'_1 où cette verticale (pour plus de clarté, on a pris une verticale un peu voisine qui est tracée en traits discontinus et points) coupe la parabole S_2, prenons une longueur $\gamma'_1 1 = \gamma_1 1$. Nous déterminons un point de la nouvelle droite de fermeture; joignant ce point au point A ou 1', on aura cette ligne. Elle sera valable, tant que l'essieu n° 3 n'aura pas quitté le pont. Traçons donc une verticale $\delta_1 1$ à une distance de $\gamma'_1 1$ égale à la distance entre les essieux nos 3 et 2, et les ordonnées du périmètre fermé $\gamma'_1 1 1\delta_1\gamma'_1$ fournissent les moments de flexion sous l'essieu n° 1 pendant que les deux essieux nos 3 et 4 ont seuls quitté le pont.

A partir de là, l'essieu n° 2 le quitte à son tour et les ordonnées se comptent depuis la parabole S_1. Donc, du point δ'_1 où la verticale δ_1 (un peu déplacée pour la clarté du dessin) coupe la parabole S_1, prenons $\delta'_1 1 = \delta_1 1$, nous aurons un point 1 de la nouvelle droite à partir de laquelle se comptent les ordonnées. Ce point doit, comme vérification, se trouver sur AB, et c'est à partir de cette ligne elle-même que se comptent les nouvelles ordonnées; car l'essieu n° 1 restant à présent seul sur le pont, on a, par définition même, $\mu_{ig} = \mu_{id} = 0$.

Ainsi, nous avons la représentation complète du moment de flexion sous l'essieu n° 1 pendant tout son parcours, que le train

soit engagé en totalité ou en partie, par les ordonnées des diagrammes

$$A1\beta_1 SA;\quad \beta'_1 11\gamma_1\beta'_1;\quad \gamma'_1 11\delta_1\gamma'_1;\quad \delta'_1 1B.$$

Pour l'essieu n° 2, la droite $2'2''$ et la parabole S sont valables jusqu'à la verticale $2'$ qui coupe la parabole S en β_2 et la parabole S_3 en β'_2. Prenons $\beta'_2 2 = \beta_2 2$.

Joignons le point $2'$ de la verticale de l'appui A au point 2 qui est ainsi déterminé.

Prolongeons cette ligne jusqu'à sa rencontre avec une verticale $\gamma_2 2$ distante de $\beta_2 2$ d'une longueur égale à l'écartement des essieux nos 3 et 4. Le diagramme $\beta'_2 22\gamma_2\beta'_2$ fournit les moments de flexion sous l'essieu n° 2 quand celui n° 4 a seul quitté le pont. Soit γ'_2 le point où la verticale γ_2 coupe la parabole S_2; prenons $\gamma'_2 2 = \gamma_2 2$. Joignons le point 2 ainsi obtenu à $2'$; la droite qui en résulte doit passer par le point B; car l'essieu n° 3 ayant quitté le pont, on a $\mu_{id} = 0$. Ainsi les diagrammes relatifs à l'essieu n° 2 sont

$$\alpha_2 22\beta_2 S\alpha_2;\quad \beta'_2 22\gamma_2\beta'_2;\quad \gamma'_2 2B.$$

Pour l'essieu n° 3, la parabole S et la droite $3'3''$ sont valables jusqu'à la verticale $3'$ qui coupe la parabole S en β_3, et celle S_3 en β'_3; prenons $\beta'_3 3 = \beta_3 3$, et joignons le point 3 ainsi déterminé à $3'$.

La ligne ainsi obtenue doit, comme vérification, passer par le point B.

On compléterait exactement par le même procédé l'épure en ce qui touche les essieux nos 2, 3, 4 vers la gauche. Pour avoir les sommets des nouvelles paraboles, au lieu de prendre $SS_3 = 4$, $S_3S_2 = 3$, $S_2S_1 = 2$, il faudrait prendre $SS_3 = 1$, $S_3S_2 = 2$, $S_2S_1 = 3$ et les nouvelles lignes de fermeture passeraient toujours par les points $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ ou B de la verticale de B.

§ 225.

APPLICATION NUMÉRIQUE. — DISPOSITION PRATIQUE DE L'ÉPURE. — Comme exemple, considérons une poutre de 36^m de portée parcourue par le convoi formé par la *fig.* 50 (p. 339). Les cinq charges sont

$$P_1 = 4^t,35,\quad P_2 = 4^t,05,\quad P_3 = 6^t,45,\quad P_4 = 6^t,3,\quad P_5 = 6^t,85.$$

Supposons que la charge permanente soit de 300^{kg}, soit $q = 0^t,3$ par mètre, en sorte que

$$\frac{ql}{2} = 0^t,3 \times 18 = 5^t,5.$$

Nous ne représenterons (*fig.* A, *Pl. XXIV*), suivant les règles du § 222, que la moitié AC de la longueur de la travée.

Nous prendrons 5^{mm} par mètre comme échelle des longueurs et $2^{mm},5$ par tonne comme échelle des forces.

Comme nous l'avons expliqué, si l'on prend le quart de la longueur de la travée comme distance polaire, la flèche CS de la parabole à tracer a pour longueur la charge totale des essieux, plus la demi-charge permanente.

Prenons donc cette ligne CS comme polygone des forces. La tangente en A à la parabole est une parallèle à la droite menée de S au milieu de AC. On peut donc immédiatement tracer la courbe.

Cela fait, plaçons le convoi dans la position

1, 2, 3, 4, 5,

l'essieu de queue coïncidant avec 1S; menons une perpendiculaire sur le milieu I de 1S et prenons, sur cette perpendiculaire, IO égal au quart de la longueur de la travée; construisons le polygone funiculaire O1.2.3.4.5G. Soit $1''$ le point d'intersection du dernier côté avec 1S.

Construisons la médiane du triangle G1$1''$ et portons sur 1S, à partir de 1, des longueurs égales aux ordonnées qu'elle détermine sur les sommets. Nous obtenons, sur cette ligne 1S, les points

(*a*) $1''', 2''', 3''', 4''', 5'''$.

Sur la verticale de l'appui A, portons les ordonnées comprises entre les sommets placés à gauche de G et le côté extrême 1G et celles comprises entre les sommets placés à droite de G et le côté extrême G5.

Nous déterminerons les points

(*b*) $1'$ ou A, $2'$; $3''$, $4''$ et $5''$ ou A.

Joignons les points correspondants (*a*) et (*b*), nous formons le contour polygonal

$$A\alpha\beta 3'''.$$

Ce sont les ordonnées comprises entre ce contour et la parabole qui, mesurées à l'échelle des forces et multipliées par le quart de la longueur de la travée, donnent en *tonnes-mètres* le moment de flexion maximum en chaque section de la poutre et sa symétrique.

On vérifie d'ailleurs que, pour toutes les positions du convoi fournies par le tracé, le convoi est engagé tout entier, de sorte qu'il n'y a pas à recourir partiellement au tracé complémentaire du paragraphe précédent.

En effet, entre $3'''$ et β, c'est l'essieu n° 3 qui, en passant sur chaque section, y détermine le moment maximum ; de β en α, c'est l'essieu n° 4. De α en A, c'est l'essieu n° 5, mais, pour ce dernier *lorsque le convoi marche* de droite à gauche de façon que cet essieu soit en tête et à gauche, parce que la ligne (5) vient du rabattement de la demi-figure de droite, comme au § 222. Donc ici encore, pour toutes les sections, le convoi est engagé tout entier.

Pour la section X, l'ordonnée *pq* est égale à $0^m,055$; donc à l'échelle de $0^m,0025$ par tonne, cela fait 22^t.

D'où le moment de flexion maximum dû au passage du convoi exprimé en tonnes-mètres est

$$22 \times \frac{l}{4} = 22 \times 9 = 198^{tm}.$$

Il se produit au passage de l'essieu de tête n° 5.

§ 226.

PROBLÈME II. — **MOMENT MAXIMUM RÉPONDANT A UNE POSITION DONNÉE DU CONVOI.** — Il s'agit : 1° de déterminer la section où se produit le moment maximum pour une position donnée de la surcharge ; 2° de trouver la valeur de ce moment.

Ce problème, comme ceux qui vont suivre, dépend, ainsi qu'i la déjà été observé (§ 214), de la nature de la charge permanente.

Cas où il n'y a pas de charge permanente ou continue. — La solution graphique de ce cas auquel on peut approximativement ramener le cas général a déjà été donnée au § 194.

En traçant (*Pl. XXI, fig.* 93, 93) le polygone funiculaire 8'.1'.2'.3'...7' et sa corde 7'.8', le moment de flexion, dans une section quelconque de la poutre AB, est l'ordonnée du polygone comptée depuis la corde; on voit que l'ordonnée maxima est ici en 3. On voit de plus que, pour des charges isolées comme celles que suppose cette figure, l'ordonnée maxima ne peut être qu'en un sommet du polygone, à moins qu'un côté tel que 3'.4' soit parallèle à la corde; alors le moment serait constant dans toute la partie de la poutre comprise entre les sections 3 et 4 et cette constante représenterait le maximum du moment fléchissant.

Ainsi, le maximum aurait lieu, en particulier, sous les charges 3 et 4. On peut donc dire :

THÉORÈME I. — *Le moment fléchissant maximum dû à une charge discontinue donnée se produit nécessairement au droit de l'une d'elles.*

Ce théorème peut aussi être établi analytiquement.

On a (§ 193)

$$\mu = \frac{l-x}{l}\sum_0^x \mathrm{P}\alpha + \frac{x}{l}\sum_x^l \mathrm{P}(l-\alpha),$$

d'où

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{l}\sum_0^l \mathrm{P}\alpha + \sum_x^l \mathrm{P}, \quad \tau = \frac{1}{l}\sum_0^l \mathrm{P}\alpha - \sum_x^l \mathrm{P}.$$

Ici l'on se donne la position de la charge, c'est-à-dire les valeurs des abscisses α, et il s'agit de trouver l'abscisse x de la section où se produit le moment fléchissant maximum.

Il faut, pour que μ devienne maximum, que sa dérivée $-\tau$ par rapport à x change de signe, en passant du positif au négatif, ou que l'effort tranchant change de signe, en passant du négatif au positif.

Lorsque les charges sont formées uniquement de forces concentrées, l'effort tranchant est (§ 195) constant pour toutes les sections comprises entre deux forces consécutives; donc τ ne peut changer de signe entre deux sections, que si ces sections comprennent une charge placée entre elles, ce qui établit la proposition susmentionnée.

On peut déduire de là une autre proposition.

Soit P_i la charge sous laquelle se produit le maximum du moment de flexion, en d'autres termes soit $x = \alpha_i$ l'abscisse de cette section. Pour une section un peu à gauche de celle-ci, la formule ci-dessus donne

$$-\tau = \sum_i^n P - \frac{1}{l}\sum_1^n P\alpha,$$

n étant le nombre total des charges.

Pour une section un peu à droite

$$-\tau' = \sum_{i+1}^n P - \frac{1}{l}\sum_1^n P\alpha,$$

on doit avoir

$$-\tau > 0 \quad \text{et} \quad -\tau' < 0,$$

d'où

$$\sum_i^n P > \frac{1}{l}\sum_1^n P\alpha > \sum_{i+1}^n P.$$

Or, si γ est l'abscisse du centre de gravité de la charge (abscisse connue puisque la position de la charge est donnée), on a

$$\gamma \sum_1^n P = \sum_1^n P\alpha.$$

Donc la double inégalité ci-dessus devient

$$\sum_i^n P > \frac{\gamma}{l}\sum_1^n P > \sum_{i+1}^n P;$$

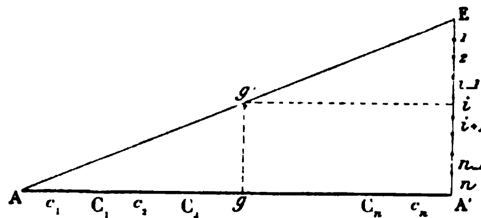
d'où le théorème suivant analogue au théorème du § 215 relatif au premier des deux problèmes résolus dans ce Chapitre :

Théorème II. — *Soit* (*fig.* 55, p. 364) AA′ *une poutre portant un certain nombre de charges isolées dont g est le centre de gravité. Soit* A′E *la perpendiculaire élevée à l'extrémité* A′ *de la poutre et sur laquelle on a porté bout à bout les charges qui agissent dans l'ordre n, n* — 1, *n* — 2, *c'est-à-dire en commençant par la charge de droite. Joignez* AE; *élevez en g la per-*

pendiculaire gg' à la direction de la poutre jusqu'à sa rencontre en g' avec AE; *menez l'horizontale g'. La force n° i qu'elle rencontre est celle suivant laquelle est placée la section où se produit le moment maximum.*

Remarque I. — Si l'horizontale g' tombe en un point de division de deux forces, on peut prendre la section où se produit le maximum suivant l'une ou l'autre de ces deux forces; le résultat sera le même; c'est le cas où la ligne 3'.4' dont il est parlé plus haut est parallèle à celle 7'.8' et où l'une des deux inégalités ci-dessus se change en égalité.

Fig. 55.



Remarque II. — Connaissant la section où se produit le moment maximum, on peut trouver ce moment lui-même par la construction d'un polygone funiculaire.

§ 227.

CAS DES CHARGES CONTINUES ET DISCONTINUES. — Si, outre la charge mobile formée par des poids isolés, il existe encore une charge permanente distribuée d'une manière continue sur toute la poutre, le moment fléchissant maximum, pour une position donnée du convoi, ne tombe plus en général sous un essieu.

La méthode précédente n'est plus applicable, à moins qu'on ne remplace approximativement la charge continue par des charges isolées suffisamment rapprochées les unes des autres.

Dans le cas contraire, l'effort tranchant (dérivée du moment de flexion changée de signe) n'est plus constant entre deux essieux; il varie d'une manière continue de l'un à l'autre; si, par exemple, la charge permanente est uniforme, nous avons vu qu'il est représenté par l'ordonnée d'une portion de droite; cette portion de

droite peut couper l'axe des abscisses en un point quelconque de la poutre, d'où résulte que l'effort tranchant peut s'annuler et passer du positif au négatif sans discontinuité en un tel point. Ce point est facile à trouver par la méthode du § 226.

Soient (*fig.* 55, p. 364), $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les points d'application des charges isolées.

Pour trouver leur centre de gravité g et appliquer le théorème qui précède, il suffit de construire le polygone funiculaire de ces forces de pôle A.

S'il y a, en outre, une charge uniforme, la partie de cette charge portant sur AC_1 donne une résultante appliquée au point c_1 milieu de AC_1; de même la résultante partielle de la charge permanente portant sur la portion C_1C_2 est appliquée au point c_2 milieu de C_1C_2, et ainsi de suite.

Concevons qu'on construise en A' le polygone des forces, en nombre fini, appliquées en c_n, $C_n, \ldots, C_2$, c_2, C_1, c_1 et soit gg' la verticale de leur résultante obtenue à l'aide d'un polygone funiculaire.

Si l'horizontale du point g' rencontre le polygone des forces au droit d'une surcharge, celle n° i, la section où se produit le moment de flexion maximum est dirigée suivant la ligne d'action de cette force.

Si elle rencontre une des résultantes partielles provenant de la charge permanente, par exemple, celle comprise entre les surcharges n° i et $i+1$, la section cherchée sera comprise entre ces deux forces en un point qui divise l'intervalle des lignes d'action de ces forces, dans le rapport où l'horizontale du point g' divise la résultante partielle qu'elle rencontre.

Il suffit, pour le démontrer, que, dans la double inégalité ci-dessus $\sum_1^n P$ comprenne à la fois la charge permanente et la surcharge sur toute la poutre et que $\sum_{i+n}^{P} P = gg'$ comprenne de même toutes les surcharges ainsi que la portion de charge permanente comprises entre les points g et A'.

Ayant la section où se trouve le moment maximum, on a sa valeur

soit analytiquement par la formule

$$\mu = \frac{l-x}{l}\sum_0^x \mathrm{P}\alpha + \frac{x}{l}\sum_x^l \mathrm{P}(l-\alpha) + \frac{q}{2}x(l-x),$$

q étant la charge par mètre, soit graphiquement par la méthode du § 194.

§ 228.

APPLICATION DE LA NOUVELLE MÉTHODE. — Lorsqu'il n'y a pas de charge permanente, la *fig.* A, *Pl. XXIII*, donne immédiatement et la section dans laquelle se produit le moment maximum et la grandeur de ce moment.

Supposons, en effet, $q = 0$. Alors, d'après le théorème I, le moment maximum se produit sous un essieu. Soient 1, 2, 3, 4 les positions données des essieux. Les ordonnées correspondantes marquées en lignes pleines donnent au facteur d (distance polaire de la figure a) près les moments de flexion sous chacun d'eux et l'inspection de la figure montre quelle est la plus grande de ces quatre ordonnées. Ici, c'est celle relative à l'essieu n° 4. Son produit par la longueur d est donc égal au moment de flexion cherché.

§ 229.

MOMENT DE FLEXION MAXIMUM SOUS UN ESSIEU DONNÉ EN MARCHE. — Soit (*fig.* A, *Pl. XXIII*) à trouver le moment de flexion maximum qui puisse se produire pendant la marche du convoi sous un essieu donné, par exemple, sous celui n° 2. On mènera à la parabole ASB une tangente parallèle à la droite $2'2''$.

La verticale du point de contact indique la position de l'essieu considéré et, par suite, la position du convoi pour laquelle le maximum proposé se produit. L'ordonnée verticale comprise entre le point de contact et la droite $2'2''$, multipliée par la distance polaire d (*fig.* a), donne la grandeur de ce maximum.

Cette solution du problème est complète et, comme on le voit, extrêmement simple. Culmann a donné, au sujet de la position du train à laquelle correspond le moment de flexion maximum

sous un essieu donné, un théorème très élégant que nous n'avons pas eu à utiliser, mais que nous ferons connaître pour l'intérêt qu'il présente.

THÉORÈME. — *Dans une poutre à deux appuis simples, portant une charge permanente uniforme et parcourue par un convoi, le moment fléchissant maximum sous l'un des essieux du train se produit lorsque le centre de gravité de la charge totale (charge permanente et poids de la partie du convoi engagée sur le pont) et l'essieu considéré sont à égale distance du milieu de la travée.*

La démonstration de ce théorème résulte très simplement de la forme (3) (p. 219) que nous avons donnée au moment de flexion μ_i, sous l'essieu n° i, lorsque x est l'abscisse de cet essieu.

Le maximum de μ_i s'obtient en égalant sa dérivée $\frac{d\mu_i}{dx}$ à zéro, ce qui donne l'équation

$$\left(1-\frac{2x}{l}\right)\left(\sum_1^n \mathrm{P}+\frac{ql}{2}\right)+\frac{1}{l}(\mu_{ig}-\mu_{id})=0.$$

Soit, à l'instant où x est l'abscisse de l'essieu n° i, G celle du centre de gravité de la charge totale (charge permanente et convoi). En exprimant que le moment de cette charge appliquée au centre de gravité, par rapport à l'essieu n° i, est égal à la somme des moments de la charge permanente dont la résultante ql est appliquée au milieu de la poutre et de celle du convoi, on obtient

$$(\mathrm{G}-x)\left(\sum_1^n \mathrm{P}+ql\right)=ql\left(\frac{l}{2}-x\right)+\mu_{id}-\mu_{ig}.$$

Éliminant la différence $\mu_{id}-\mu_{ig}$ entre les deux dernières équations, il vient

$$\left(1-\frac{x+\mathrm{G}}{l}\right)\left(\sum_1^n \mathrm{P}+ql\right)=0.$$

Soit

$$1-\frac{x+\mathrm{G}}{l}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{x+\mathrm{G}}{2}=\frac{l}{2},$$

ce qui établit la proposition.

§ 230.

Problème IV. — **MOMENT MAXIMUM MAXIMORUM.** — On appelle ainsi le plus grand de tous les moments de flexion qui puisse se produire dans la poutre entière pendant le passage du convoi. Or le moment maximum, dans chaque section, se produit sous un essieu (§ 215). Donc il en est de même du plus grand de tous ces moments; par conséquent, si la charge permanente est uniforme, la *fig.* A, *Pl. XXIV*, fournit immédiatement la solution du problème. Elle correspond à la plus grande des ordonnées comprises entre la parabole et le contour qui porte le liséré. Ici c'est sensiblement l'ordonnée du sommet de la parabole rigoureusement, celle du point de contact d'une tangente parallèle à $3'3''$; c'est donc sous l'essieu n° 3 que se produit le *maximum maximorum* et il est égal au produit de l'ordonnée dont il vient d'être parlé par la distance polaire d (*fig.* a). L'ordonnée a $9^c,4$ de longueur, soit en force, $37^t,6$ et le moment de flexion correspondant est en tonnes-mètres: $37^t,6 \times \frac{l}{4} = 37^t,6 \times 9 = 338^{tm},4$. En général, c'est près de la section du milieu que se produit le *maximum maximorum* et, pour de petits ouvrages, on se borne à appliquer, à cette section, la règle du § 216 pour trouver le moment maximum dans une section et l'on adopte ce moment comme moment *maximum maximorum*.

Théorème. — *On obtient une limite supérieure du moment de flexion maximum que le passage d'un convoi quelconque peut produire dans une section donnée d'une poutre à deux appuis simples, en ajoutant au moment de flexion dû à la charge permanente, celui que produirait le* double *du poids du convoi supposé uniformément réparti sur la longueur du pont.*

On obtient une limite supérieure du moment maximum maximorum *en formant le produit du quart de la longueur de la travée par la charge totale du convoi augmentée de la demi-charge totale permanente.*

Cette proposition résulte :

1° De ce que le moment maximum dans une section donnée et, par suite, le moment *maximum maximorum,* se produit sous un essieu;

2° De ce que le moment μ_i sous l'essieu n° i peut être représenté par la formule (3) du § 219

$$\mu_i = \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{l}\sum_1^n \mathrm{P}\right)x(l-x) - \mu_{ig}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \mu_{id}\frac{x}{l}.$$

Les deux derniers termes sont essentiellement négatifs; donc

$$\mu_i < \left(q + \frac{2}{l}\sum_1^n \mathrm{P}\right)\frac{x(l-x)}{2}.$$

Le second membre étant indépendant de i, il s'ensuit qu'il représente la limite supérieure de μ_i, quel que soit le numéro de l'essieu.

Le maximum de ce second membre a lieu pour $x = \frac{l}{2}$, ce qui donne pour limite supérieure du *maximum maximorum* l'expression

$$\frac{ql^2}{8} + \frac{l}{4}\sum_1^n \mathrm{P}.$$

CHAPITRE XIX.

EFFORTS TRANCHANTS PRODUITS PAR LE PASSAGE D'UN CONVOI SUR UNE POUTRE A DEUX APPUIS SIMPLES.

§ 232.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX. — Nous baserons la recherche des plus grands efforts tranchants produits dans une poutre par le passage d'un convoi sur deux théorèmes dont le premier est connu.

THÉORÈME I. — *Le maximum ou le minimum de l'effort tranchant, dans une section quelconque, ne se produit qu'au moment où un essieu passe à une distance infiniment petite à droite ou à gauche de cette section.*

L'effort tranchant dans une travée portant des charges verticales est (§ 193)

$$(1) \qquad \tau = -\sum_x^l P + \frac{1}{l}\sum_0^l P\alpha.$$

S'il s'agit d'une section X comprise entre les charges P_i et P_{i+1} et qu'il y ait, en tout, n charges

$$(2) \qquad \tau = -\sum_{i+1}^n P + \frac{1}{l}\sum_1^n P\alpha.$$

Enfin, si les charges forment un convoi mobile, qu'on désigne par a_i la distance de P_i à P_1, en sorte que $a_1 = 0$, et par z la distance, à un instant quelconque, du premier essieu de gauche P_1 à l'appui de gauche, en sorte que

$$\alpha_i = a_i + z, \quad \alpha_1 = a_1 + z = z,$$

on a

$$(3) \qquad \tau = -\sum_{i+1}^n P + \frac{1}{l}\sum_1^n Pa + \frac{z}{l}\sum_1^n P.$$

Considérons une section X.

Suivant la valeur de z, c'est-à-dire suivant la position du convoi, l'effort tranchant τ peut prendre des valeurs : les unes positives, les autres négatives (les moments fléchissants étudiés précédemment ne sont jamais négatifs). Il s'agit de trouver le maximum et le minimum de τ, soit la plus grande valeur de l'effort positif et la plus grande valeur absolue de l'effort négatif, et c'est généralement la plus grande de ces deux quantités qu'on aura à utiliser. Il peut être, toutefois, nécessaire pour le calcul des dimensions d'une pièce, de les connaître toutes deux (voir Note I). Si τ conserve le même signe, par exemple le signe $+$, alors il suffit d'avoir son maximum; si c'est le signe $-$, il suffit d'avoir le minimum.

Supposons qu'aucun essieu ne passe actuellement sur la section X; si le convoi se meut dans un intervalle assez restreint pour qu'aucun essieu n'arrive jusqu'à elle et qu'aucun ne franchisse une culée les sommes Σ qui entrent dans τ restent invariables pendant ce mouvement; z varie seul et le maximum ou le minimum de τ correspond aux valeurs extrêmes que peut prendre z lorsque le convoi se déplace dans les limites indiquées. On arrive donc, comme pour les moments fléchissants, à cette conséquence que *les valeurs extrêmes que prend l'effort tranchant dans une section donnée pendant la marche d'un convoi ne peuvent avoir lieu que lorsqu'un essieu passe sur cette section ou sur une culée.*

Mais, si le dernier essieu de droite P_n est infiniment près de la culée sans l'avoir franchie, la formule (2) montre que, comme $x_n = l$, les deux termes qu'il fournit se détruisent; donc, qu'il ait franchi la culée ou qu'il en soit infiniment près dans la portée du pont, cela ne change pas la valeur de τ pour une section à distance finie de la culée; elle n'est changée que pour la section à l'aplomb de la culée. Il en est de même lorsqu'une nouvelle charge s'engage sur le pont; au moment où son abscisse α est infiniment petite, elle ne fournit aucun terme pour une section à distance finie des culées. Donc, pour de telles sections, ce n'est que quand un essieu les traverse que le maximum ou le minimum de τ peut s'y produire; et le fait que pour les sections à l'aplomb des culées, l'entrée ou la sortie modifie l'effort tranchant, n'est qu'un cas particulier de la proposition à démontrer. Il suffit, d'après cela, d'étudier les efforts tranchants au passage des divers essieux

dans chaque section, pour pouvoir en déduire les valeurs extrêmes qu'ils pourront atteindre dans cette section pendant la marche du convoi.

L'effort tranchant, dans une section infiniment voisine d'un essieu, diffère d'une quantité finie, suivant que cette section est prise à la gauche ou à la droite de l'essieu.

Désignons, à un instant quelconque, par τ_{id} et τ_{ig} les efforts tranchants immédiatement à droite et immédiatement à gauche de l'essieu n° i. On aura, par définition,

$$\tau_{ig} = \tau_{id} - P_i. \tag{4}$$

D'ailleurs, la formule (2), en y supposant $x = \alpha_i$, c'est-à-dire en considérant la section dont l'abscisse x coïncide à tout instant avec l'abscisse α_i de l'essieu n° i, donne

$$\tau_{id} = -\sum_{i+1}^{n} P + \frac{1}{l}\sum_{1}^{n} P\alpha.$$

Si, outre la charge mobile, la poutre porte une charge permanente q, il faut ajouter au second membre l'effort tranchant dû à cette charge, soit

$$-\frac{ql}{2} + qx.$$

Donc

$$\tau_{id} = -\sum_{i+1}^{n} P + \frac{1}{l}\sum_{1}^{n} P\alpha + q\left(x - \frac{l}{2}\right). \tag{5}$$

Les formules (4) et (5) définissent ainsi l'effort tranchant dans le voisinage d'un essieu.

Théorème II. — *L'effort tranchant près d'un quelconque des essieux d'un convoi en marche sur une poutre à deux appuis simples, pouvant porter une charge uniforme, est représenté par les ordonnées d'une seule et même droite, quel que soit l'essieu considéré, ces ordonnées étant seulement comptées à partir d'axes des abscisses différents pour les différents essieux.*

En effet, soit μ'_i la somme des moments relativement à l'essieu n° i des charges de tous les essieux; μ'_i est évidemment une quan-

tité constante, quelle que soit la position du train, et l'on a

$$\mu'_i = \pm \lambda_i \sum_1^n P,$$

λ_i désignant la distance *invariable* de la verticale du centre de gravité du convoi à l'essieu n° i et le signe $+$ convenant à tous les essieux placés à gauche de cette verticale, le signe $-$ à ceux placés à sa droite.

On a aussi

$$\mu'_i = \sum_1^n P(\alpha - \alpha_i) = \sum_1^n P\alpha - \alpha_i \sum_1^n P = \sum_1^n P\alpha - x \sum_1^n P,$$

d'où

$$\sum_1^n P\alpha = \mu'_i + x \sum_1^n P.$$

Par suite,

$$(6) \qquad \tau_{id} = -\sum_{i+1}^n P + \frac{\mu'_i}{l} + x\left(\frac{1}{l}\sum_1^n P + q\right) - \frac{ql}{2},$$

équation du premier degré, représentant une droite dont l'inclinaison est indépendante de l'essieu que l'on considère.

Soit (*fig.* B, *Pl. XXIII*) la travée AB déjà considérée (§ 219 et suivants) à l'occasion des moments de flexion, parcourue par les mêmes charges au nombre de quatre.

Construisons la droite PQ dont l'ordonnée y est

$$(7) \qquad y = x\left(\frac{1}{l}\sum_1^n P + q\right) - \frac{ql}{2},$$

et qui est la même, quel que soit l'essieu considéré. Construisons, d'autre part, l'horizontale

$$(8) \qquad y_i = \sum_{i+1}^n P - \frac{\mu'_i}{l},$$

qui dépend seule de cet essieu. On aura

$$\tau_{id} = y - y_i,$$

c'est-à-dire que les ordonnées de la droite fixe PQ comptées depuis

l'horizontale (8), représentent les efforts tranchants qui se produisent immédiatement à droite de l'essieu n° i, pendant la marche du train.

Pour $x = 0$ et $x = l$, on a respectivement

$$y = -\frac{ql}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{ql}{2} + \sum_{1}^{n} P.$$

Portons, à partir de A et dans le sens ascendant, l'ordonnée

$$AP = \frac{ql}{2} = bc,$$

la longueur bc étant relevée sur la figure a. A partir de B et dans le sens descendant, portons les quatre charges dans l'ordre

$$4,\ 3,\ 2,\ 1,$$

et au bout, portons encore $\frac{ql}{2} = AP$; on détermine ainsi le point Q et la droite PQ est celle (7).

Les quatre horizontales représentées par l'équation (8) en y supposant successivement $i = 1, 2, 3, 4$, sont faciles à obtenir. Le terme $\sum_{i+1}^{n} P$ est fourni par les points de division du polygone des forces BB'.

D'autre part, si nous nous reportons au polygone funiculaire des quatre charges déjà construit à l'occasion des moments de flexion (*fig.* A_0), on voit que les ordonnées

$$1'1'',\ 2'2'',\ 3'3'',\ 4'4'',$$

respectivement multipliées par la distance polaire d, donnent les valeurs absolues des moments μ'_i de toutes les forces, relativement à l'essieu n° i. Et, comme on a pris $d = \frac{l}{4}$, on a

$$\mu'_1 = 11'' \times \frac{l}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{4\mu'_1}{l} = 11'', \quad \frac{4\mu'_2}{l} = 2'2'', \quad \frac{4\mu'_3}{l} = 3'3'', \quad \frac{4\mu'_4}{l} = 4'4''.$$

Donc, en prenant les quarts des ordonnées $11''$, $2'2''$, ..., on a les valeurs absolues des $\frac{\mu'_i}{l}$; on sait d'ailleurs que ces rapports sont positifs pour les essieux situés à gauche de la verticale du point G,

et négatifs pour ceux de droite, c'est-à-dire ici pour $\frac{\mu'_4}{l}$ seulement.

D'après cela,

1° Pour $i=1$, on a

$$y_1 = \sum_{i+1}^{n} P - \frac{\mu'_1}{l} = P_2 + P_3 + P_4 - \frac{\mu'_1}{l}.$$

Donc (*fig.* B), à partir du point 1.2 du polygone des forces BB', on portera de bas en haut le quart de la longueur 11″ relevée sur la figure A_0. On obtient ainsi l'horizontale (1), à partir de laquelle doivent être comptées les ordonnées de la droite PQ, pour qu'elles représentent les efforts tranchants qui se produisent immédiatement à la droite de l'essieu n° 1 dans ses diverses positions.

De même, à partir du point 2.3, on portera de bas en haut le quart de 2′2″; à partir du point 3.4, on portera le quart de 3′3″; enfin, à partir de B, on portera de *haut en bas* le quart de 44″. On aura ainsi les horizontales (2), (3), (4) répondant aux efforts tranchants immédiatement à la droite de chacun des essieux n°s 2, 3, 4.

Si l'on voulait avoir les efforts tranchants immédiatement à gauche, il suffirait, d'après la formule (1), de baisser les horizontales

(1), (2), (3), (4),

respectivement de longueurs égales aux charges correspondantes 1, 2, 3, 4 du polygone BB'.

Problème. — *Étant donnée une section* X, *quelles sont les valeurs extrêmes qu'y atteint l'effort tranchant pendant le passage du train?*

Elles se produisent (Th. I) lorsqu'un essieu est immédiatement à gauche ou immédiatement à droite de la section considérée. Or, lorsque chacun des quatre essieux est immédiatement à gauche de la section, les efforts tranchants correspondants sont les quatre ordonnées de PQ comptées depuis (1), (2), (3), (4). Ils sont tous positifs et le plus grand répond à (4), c'est-à-dire au passage de l'essieu n° 4, et a pour valeur l'ordonnée comptée depuis (4) mesurée à l'échelle des forces.

§ 233.

RÈGLES PRATIQUES. — Le maximum positif de τ_{id} pour une section quelconque X est l'ordonnée comprise entre la ligne PQ et l'horizontale la plus élevée parmi celles qu'on a trouvées; ici c'est celle (4).

Comme deux sections X et X′ équidistantes du milieu de la poutre supportent les mêmes efforts maxima, puisque la poutre est franchie par les mêmes convois tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, chacune d'elles doit être établie de façon à résister au plus grand des deux maxima qui les concernent.

On obtient le résultat graphiquement en repliant la demi-figure de droite sur celle de gauche autour de la verticale CD du milieu de la poutre; la partie DQ de la droite PQ, vient ainsi en DQ′ et l'on voit que le maximum positif de l'effort tranchant considéré, c'est-à-dire de celui qui se produit dans chaque section, lorsqu'un essieu est immédiatement à sa gauche, est fourni, pour toutes les sections de la demi-poutre AC (et celles équidistantes de l'autre moitié de la poutre) par les ordonnées du trapèze (4)4DQ′ qui est marqué par un liséré.

Le maximum positif, quand l'essieu est à la droite de la section, est nécessairement plus petit que le précédent, en vertu de la définition même des efforts tranchants et parce que nous regardons comme positives les forces descendantes. Cela résulte aussi de la formule (4). Ainsi le diagramme (4) 4 DQ′ donne le maximum positif de l'effort tranchant dans toutes les sections.

Le minimum de l'effort tranchant, quand l'essieu est immédiatement à gauche de la section, ou, si l'on veut, son maximum négatif (pris en valeur absolue) est l'ordonnée de PD comptée depuis (1), c'est-à-dire qu'il est partout produit par l'essieu n° 1. Mais, si l'essieu est à droite de la section, chaque effort tranchant ainsi trouvé doit être diminué de la charge de l'essieu, de sorte que les nouveaux efforts tranchants au passage de l'essieu n° 1 seront à compter depuis l'horizontale (1′) située plus bas que (1) d'une hauteur égale à la charge 1 relevée sur le polygone des forces. Il faut de même, pour avoir les efforts correspondants au passage des essieux nos 2, 3, 4, lorsque ces essieux sont immédiatement à la

droite de chaque section, baisser les horizontales (2), (3), (4), respectivement des longueurs 2, 3, 4 relevées sur le polygone des forces.

C'est à partir de la plus basse des lignes ainsi obtenues qu'on doit compter les ordonnées de PD pour avoir, en valeur absolue, le maximum de l'effort tranchant négatif dans chaque section.

Ici cette ligne la plus basse est celle (1').

En résumé, pour avoir, dans chaque section, les maxima positif et négatif de l'effort tranchant dû à la fois à la charge permanente et au passage d'un convoi, il suffit de faire les opérations suivantes :

a. Tracer la demi-longueur de la poutre AC.

b. Sur la verticale de l'appui A portez de bas en haut la demi-charge permanente $\frac{ql}{2} = \text{AP}$.

c. Sur la même verticale, de haut en bas, porter les charges des essieux 4, 3, 2, 1 et au bout, encore une fois, la demi-charge permanente.

d. Par le milieu de la longueur PQ' déterminé par les deux opérations précédentes, menez une horizontale qui rencontre la verticale C du milieu de la poutre en un point D de manière à former le triangle isoscèle PDQ'.

e. Déterminer, comme il a été expliqué au § 232, les altitudes (4), (3), (2), (1) des horizontales à partir desquelles doivent se compter les efforts tranchants au passage des essieux correspondants n°s 4, 3, 2, 1.

Ne conserver que la plus élevée de ces lignes [ici, celle (4)].

f. Baisser les horizontales (4), (3), (2), (1) respectivement de hauteurs égales aux forces 4, 3, 2, 1 relevées sur le polygone des forces AQ'.

Ne conserver que la plus basse des lignes ainsi obtenues. [Ici celle (1') résultant de l'abaissement donné à (1).]

g. Le maximum positif dans chaque section de la demi-poutre AC (et dans la section équidistante du milieu, appartenant à la

seconde moitié de la poutre) est représenté par l'ordonnée de DQ' comptée depuis l'horizontale la plus élevée.

Le maximum négatif est de même donné par l'ordonnée de DP comptée depuis l'horizontale la plus basse.

§ 234.

REMARQUE AU SUJET DU CAS OU LE CONVOI NE SERAIT ENGAGÉ QUE PARTIELLEMENT. — Tout ceci suppose que, dans les positions trouvées pour les maxima, le convoi est engagé tout entier. C'est ce qui a lieu dans l'exemple traité ici; car le maximum négatif est donné dans chaque section de AC quand l'essieu n° 1 (essieu de queue) passe dans cette section, le convoi cheminant de gauche à droite, et dans la demi-poutre symétrique par le passage du même essieu quand le convoi chemine en sens inverse.

Le maximum positif est donné de même dans chaque section quand l'autre essieu extrême, celui n° 4, y passe, mais le convoi cheminant de façon que cet essieu soit à la queue.

Si l'on avait trouvé, pour l'une des deux horizontales d'altitude maxima ou minima, d'autres lignes que celles répondant aux essieux extrêmes, la règle serait nécessairement en défaut pour certaines sections voisines des extrémités de la poutre. Cela se présentera rarement. Si toutefois cette circonstance se présentait, on aurait à faire, en partie, le tracé complémentaire que nous allons indiquer.

§ 235.

TRACÉ EXACT RELATIF A UN CONVOI ENGAGÉ EN PARTIE SEULEMENT. — Si l'on place le convoi dans les deux positions extrêmes où il est engagé tout entier, à savoir celle 1, 2, 3, 4 et celle 1', 2', 3', 4' (*fig.* B), on voit que les lignes (1), (2), (3), (4) relatives aux passages des essieux correspondants ne sont valables respectivement qu'entre les verticales 1 et 1', 2 et 2', 3 et 3', 4 et 4'. On les a tracées en lignes pleines dans ces parties.

Considérons, par exemple, le convoi dans la position 1', 2', 3', 4' et supposons qu'il continue à avancer vers la droite.

Voyons d'abord comme se modifie la ligne PQ. Le point P reste

fixe, puisque son ordonnée $\frac{ql}{2}$ ne dépend que de la charge permanente.

L'ordonnée de Q est

$$\frac{ql}{2}+\sum_{1}^{n}\mathrm{P},$$

c'est-à-dire la demi-charge permanente plus la charge totale engagée.

Portons bout à bout à partir de Q dans le sens ascendant, les charges 4_1, 3_1, 2_1, des essieux n°s 4, 3, 2. On obtient ainsi des points ε_3, ε_2, ε_1.

C'est en ε_3 qu'aboutira la nouvelle ligne PQ quand l'essieu n° 4 aura quitté le pont; en ε_2 quand l'essieu n° 3 l'aura quitté; en ε_1 quand l'essieu n° 2 l'aura quitté. Ainsi la ligne PQ est remplacée successivement par

$$\mathrm{P}\varepsilon_3,\ \mathrm{P}\varepsilon_2,\ \mathrm{P}\varepsilon_1.$$

Ceci étant, considérons ce qui concerne l'essieu n° 1. Le diagramme P(1)1 β_1P représente l'effort tranchant au passage de cet essieu dans les sections placées à gauche de $\beta_1$1 prolongement de la verticale 1', et c'est pour les sections comprises entre 1' et 4' qu'il reste à les déterminer.

Pour cela, j'observe que l'effort tranchant dans une section placée à distance finie de l'appui B n'est modifié qu'infiniment peu suivant qu'un essieu est un peu à gauche ou à droite de l'appui B.

Or, quand l'essieu 4' est à gauche, l'effort tranchant dans la section 1, produit par le passage de l'essieu n° 1, est égal à $\beta_1$1. Soit β'_1 le point où cette verticale (que, pour plus de clarté, on a légèrement déplacée) coupe la ligne Pε_3. Prenons $\beta'_1 1 = \beta_1 1$, de sorte que $\beta'_1$1 est l'effort tranchant dans la section 1' quand l'essieu n° 4' est infiniment peu à droite de l'appui B.

Or, tant que les charges 1', 2', 3' restent engagées, les efforts tranchants sont les ordonnées de Pε_3 comptées depuis une certaine horizontale. Donc, cette horizontale est celle définie par le point que nous venons de déterminer. Elle sera valable jusqu'à ce que l'essieu n° 3' arrive sur la culée B.

Traçons donc la verticale $\gamma_1$1 à une distance de $\beta'_1$1 égale à l'écartement des essieux 3' et 4' et le diagramme $\beta'_1$11$\gamma_1\beta'_1$ donne

les efforts tranchants au passage de l'essieu n° 1 dans l'intervalle correspondant.

Soit γ'_1 le point où la verticale γ_1 (légèrement déplacée pour la clarté de la figure) coupe la ligne $P\varepsilon_2$. Prenons $\gamma'_1 1 = \gamma_1 1$, puis menons la verticale distante de celle-ci d'une longueur égale à l'écartement des essieux 2′ et 3′; on formera le diagramme $\gamma'_1 1 1 \delta_1 \gamma'_1$, qui représente l'effort tranchant dans les sections correspondantes au passage de l'essieu n° 1 dans cette partie de la poutre; de même entre δ_1 et l'extrémité de la poutre, il est représenté par le diagramme $\delta'_1 1 B \varepsilon_1 \delta'_1$, tel que $\delta'_1 1 = \delta_1 1$, et comme vérification, le point 1 doit tomber sur la ligne AB; car on voit *a priori* que l'effort tranchant en B est l'ordonnée de ε_1 comptée depuis B.

De même pour l'essieu n° 2, la ligne 2 cesse d'être valable à partir de la verticale 2′ en 2.

Soit β_2 le point où cette verticale coupe PQ. Dans le surplus de la poutre, le passage de l'essieu n° 2 détermine des efforts tranchants représentés par les ordonnées des deux diagrammes

$$\beta'_2 2 2 \gamma_2 \beta'_2 \quad \text{et} \quad \gamma'_2 2 B \varepsilon_2 \gamma'_2$$

dont le dernier est compté depuis l'horizontale AB; leurs longueurs sont respectivement égales aux distances des essieux 4′ et 3′ et 3′, 2′.

Enfin, la ligne (3) est valable jusqu'à la verticale 3′ et à droite de celle-ci le passage de l'essieu n° 3 détermine des efforts tranchants représentés par le diagramme

$$\beta'_3 3 B \varepsilon_3 \beta'_3.$$

Remarque I. — Tous ces diagrammes représentent l'effort tranchant quand l'essieu est à gauche de la section. S'il est à droite, il faut en retrancher la charge de l'essieu.

On compléterait de même l'épure vers la gauche pour les essieux n°s 2, 3, 4 en faisant rétrograder le train depuis la position

1, 2, 3, 4.

Remarque II. — Les problèmes relatifs aux efforts tranchants, analogues aux problèmes II, III, IV résolus au Chapitre précédent pour les moments fléchissants, se déduiraient naturellement aussi de notre tracé.

§ 236.

REMARQUES RELATIVES AUX SYSTÈMES RÉTICULAIRES. — La connaissance des moments de flexion et efforts tranchants maxima dans chaque section des poutres comme celles envisagées en Résistance des matériaux suffit à calculer les forces élastiques qui s'y développent (§ 208, 211).

S'il s'agit d'une poutre réticulaire, supposons d'abord qu'on veuille calculer la tension ou pression maxima que le passage d'un convoi détermine dans une barre principale, ce qui est la question essentielle. Soient h sa distance au nœud ou sommet opposé (h pouvant être constant ou variable d'une barre à l'autre) et μ le moment de flexion relatif à ce nœud. On sait (§ 204) que la force élastique cherchée est $\frac{\mu}{h}$. Et, comme la hauteur h est une constante pour une barre considérée, quelle que soit la position du train, cette force varie proportionnellement au moment fléchissant. La tension ou pression maxima s'obtient donc en divisant le maximum trouvé pour μ par la hauteur h.

Supposons qu'il s'agisse d'un étrésillon. Si la hauteur de la poutre est constante, la tension ou pression qui s'y développe est $\frac{\tau}{\cos\alpha}$, τ étant l'effort tranchant dans une section voisine d'un des nœuds auxquels il appartient et α son inclinaison sur la verticale. Cet angle étant déterminé pour chaque barre et τ variant seul pendant le passage du convoi, on voit que le maximum de la force élastique cherchée répond au maximum de τ.

Si la hauteur de la poutre varie, mais très lentement, on applique la même règle pour les étrésillons ou pièces de remplissage qui supportent généralement des tensions inférieures à celles que comportent les dimensions qu'on est amené à leur donner, par suite des nécessités de la construction.

Si l'on voulait être exact il faudrait procéder ainsi : soit h' la distance de l'étrésillon considéré au *sommet s* qui lui est opposé (§ 203), lequel n'est pas un nœud, mais le point d'intersection des directions géométriques de deux barres principales opposées, point plus ou moins éloigné de la poutre. Si μ' est la somme des moments par rapport à ce point de toutes les forces agissant d'un côté d'une section X faite près de l'un des nœuds qui terminent la barre con-

sidérée, on a pour la force élastique cherchée $\frac{\mu'}{h'}$. Donc le maximum de cette force répond au maximum de μ'. Or, si P_i est l'une des forces verticales agissant sur la poutre, α_i son abscisse comptée de l'extrémité gauche de celle-ci; x l'abscisse de la section X et h'' la distance de s au plan vertical de cette section, le moment de P_i par rapport à s est

$$P_i(x + h'' - \alpha_i).$$

Donc

$$\mu' = \sum_0^x P_i(x + h'' - \alpha_i) = \sum_0^x P_i(x - \alpha_i) + h'' \sum_0^x P_i$$

ou, si μ et τ désignent le moment fléchissant, et l'effort tranchant relatif à la section X, il vient

$$\mu' = \mu h'' + \tau.$$

Appliquons cette formule, qui est générale, à une poutre à deux appuis simples en remplaçant μ et τ par leurs valeurs relatives à ce cas

$$\mu = \frac{x}{l} \sum_x^l P(l - \alpha) + \frac{l - x}{l} \sum_0^x P\alpha, \quad \text{ou} \quad \tau = \sum_x^l P - \frac{1}{l} \sum_0^l P\alpha;$$

d'où

$$\mu' = h'' \sum_x^l P + \frac{x}{l} \sum_x^l P(l - \alpha) + \frac{l - h'' - x}{l} \sum_0^x P\alpha$$

qui pourrait se discuter comme les moments fléchissants, quoique les résultats soient moins simples. En appelant a la distance invariable d'une charge quelconque à celle de gauche et z l'abscisse de celle-ci qui définit la position variable du convoi, on voit que μ' est une fonction linéaire de z toutes les fois que le mouvement du train se fait dans des limites telles que les Σ ne changent pas. On en conclut que les valeurs extrêmes de μ (μ peut changer de signe) répondent encore aux seules positions où un essieu passe sur la section X.

Une discussion plus détaillée serait laborieuse et peu utile en général.

Observons en terminant que μ' contenant le terme $h''\tau$ qui varie brusquement quand un essieu est infiniment près d'une section donnée suivant qu'il est à gauche ou à droite de cette section ; il en est de même de μ' et il faudrait considérer les deux positions.

CHAPITRE XX.

CAS OU LE CONVOI PORTE SUR UNE POUTRE A DEUX APPUIS PAR L'INTERMÉDIAIRE DE POUTRELLES TRANSVERSALES.

§ 237.

CAS OU LE CONVOI PORTE PAR L'INTERMÉDIAIRE DE POUTRELLES TRANSVERSALES. — *a*. **Moment fléchissant.** — Supposons (*fig.* 56, p. 384) un convoi formé, par exemple des charges P_1, P_2, P_3, P_4, portant, sur une poutre longitudinale AA', non plus directement, mais par l'intermédiaire de pièces de pont ou poutrelles transversales A, *b*, *c*, *d*, A'. Proposons-nous de déterminer, à un instant quelconque par exemple, lorsque le convoi occupe la position indiquée sur la figure, le moment fléchissant dans une section donnée X que nous supposons comprise entre les poutrelles *c* et *d*. Ce que nous dirons des moments de flexion s'étendrait facilement aux efforts tranchants.

Dans ce cas, chaque force telle que P_2 porte sur la poutre longitudinale par l'intermédiaire des deux poutrelles limitrophes *b* et *c*. Il faut donc la remplacer par ses deux composantes ϖ_2 et ϖ'_2 appliquées en ces deux points; une décomposition analogue est à faire pour chacune des forces P_1, P_3, P_4. Et le moment fléchissant en X sera la somme des moments relativement à ce point de toutes les forces, y compris la réaction de l'appui A, qui existeront à sa gauche après qu'on aura ainsi remplacé chaque force telle que P_2 par ses composantes ϖ_2, ϖ'_2.

Ce moment pourra donc être regardé comme composé :

1° Du moment de la réaction R de l'appui A;

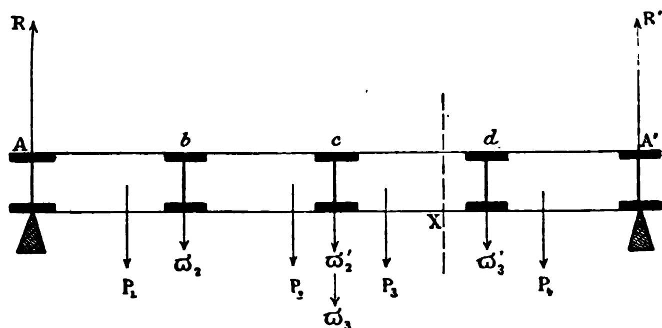
2° De la somme des moments des composantes ϖ_i, ϖ'_i de toutes les forces P_1, P_2, placées à gauche de la poutrelle *c* la plus voisine de X du côté gauche;

3° Des composantes ϖ_3 suivant cette même poutrelle des forces P_3 comprises entre *c* et X. (Quant aux composantes ϖ'_3 des forces P_3

suivant *d*, en vertu de la définition même du moment de flexion, elles n'interviendront pas, n'étant pas à la gauche de la section considérée.

Si l'on décompose les forces P_1, P_2, P_3, P_4 en d'autres, comme nous venons de l'indiquer, on ne change ni la somme de leurs projections sur un axe, ni la somme de leurs moments relativement à un point. Et comme, pour déterminer les réactions R des appuis, il suffit de recourir au théorème des moments, on conclut que ces réactions sont les mêmes que si les poutrelles n'existaient pas. Le moment de la réaction par rapport au point X formant le terme 1° indiqué ci-dessus n'est donc pas modifié par la présence des poutrelles. Par une raison analogue, les termes 2° ne le sont pas. Il n'y a que le ou les termes 3° qui soient modifiées.

Fig. 56.



Supposons, pour abréger le langage, qu'il n'existe qu'une seule charge P_3 entre les deux poutrelles consécutives *c* et *d* comprenant la section X : sans la présence des poutrelles, le moment de P_3 par rapport à X entre tout entier dans l'expression du moment de flexion ou n'y entre pas du tout, suivant que X est à droite de P_3, (comme sur la figure), ou à sa gauche; par suite de l'existence des poutrelles, le moment de flexion comprend toujours le moment de ϖ_3. Ainsi, toute la modification consiste en ce que le moment fléchissant tel qu'il existerait sans la présence des poutrelles, se trouve, si X est à droite de P_3, *diminué* du moment de ϖ_3' par rapport à X et, comme ce moment est positif, d'après nos conventions, le moment de flexion se trouve réellement un peu diminué; si X

est à gauche de P_3, le moment de flexion est augmenté du moment de ϖ_3, lequel est *négatif;* il est donc encore *diminué.*

Si enfin la section X coïncide avec une poutrelle, avec celle *d* par exemple, le moment de ϖ'_3 étant nul, le moment de flexion n'est pas modifié. Ainsi :

THÉORÈME. — *Lorsque des charges portent sur une poutre à deux appuis simples par l'intermédiaire de poutrelles transversales :* 1° *la présence de ces poutrelles ne modifie pas le moment fléchissant dans les sections passant par leurs âmes ;* 2° *elle diminue un peu les moments fléchissants relatifs aux autres sections.*

b. **Efforts tranchants.** — On verrait de même que la présence des poutrelles a pour effet de faire retrancher la force ϖ'_3 de la somme des forces qui, sans leur présence, constituerait l'effort tranchant, et, comme les forces descendantes sont comptées négativement, l'effort tranchant se trouve *augmenté* de ϖ'_3 (s'il était négatif, sa valeur absolue se trouverait, en général, diminuée). Et ceci est vrai pour toutes les sections sans exception, aussi bien celles qui sont infiniment voisines des poutrelles que les autres.

L'erreur commise en faisant abstraction des poutrelles est peu importante. Comme le problème à résoudre consiste à déterminer les moments de flexion et efforts tranchants maxima (surtout les premiers) dans un certain nombre de sections, on a intérêt, quand rien n'oblige à procéder autrement, à adopter, comme sections, celles qui passent par les âmes des poutrelles, parce qu'alors les moments de flexion sont exactement les mêmes que si les poutrelles n'existaient pas. On les portera en ordonnées dont on reliera les extrémités par des droites; les ordonnées du contour polygonal ainsi obtenu fourniront, pour les sections intermédiaires, des moments de flexion suffisamment approchés. La méthode du § 233 donne le résultat directement.

§ 238.

EXPRESSION EXACTE DES MOMENTS FLÉCHISSANTS ET EFFORTS TRANCHANTS, EN AYANT ÉGARD A LA PRÉSENCE DES POUTRELLES. — *a.* **Moment fléchissant.** — Supposons pourtant qu'on veuille déterminer (*fig.* 56,

p. 384) le moment fléchissant exact relatif à une section X d'abscisse x d'un système de charges P_1, P_2, P_3, ..., dont les abscisses soient α_1, α_2, α_3, ...

Nous appelons toujours P l'une quelconque des charges et α son abscisse et nous désignons par les lettres *b*, *c*, *d*, ... les abscisses des poutrelles marquées par ces mêmes lettres. La section X est comprise entre les poutrelles *c* et *d*.

Le moment fléchissant cherché peut être décomposé en deux parties :

1° La partie qui provient des charges agissant en dehors de l'espace *cd*, soit à gauche de *c*, soit à droite de *d*.

2° Celle qui provient des charges agissant entre *c* et *d*.

La première (§ 226) est exactement la même que si les poutrelles n'existaient pas.

Donc, si nous appliquons aux forces qu'elle comprend la formule générale des moments (§ 193), on aura pour cette partie

$$\frac{l-x}{l}\sum_0^c P\alpha + \frac{x}{l}\sum_d^l P(l-\alpha),$$

l désignant toujours la longueur de la poutre.

Soit P une force comme celle P_3 placée entre *c* et *d*, qu'elle soit d'ailleurs entre *c* et X ou entre X et *d*. La réaction *r* qu'elle fait naître sur l'appui A est la même (§ 227) que si les poutrelles n'existaient pas, en sorte que

$$r = P\,\frac{l-\alpha}{l}.$$

Si l'on décompose la force P en deux forces verticales ϖ et ϖ', appliquées respectivement en *c* et *d*, la composante ϖ sera

$$\varpi = P\,\frac{d-\alpha}{d-c}.$$

La force P fournira dans l'expression du moment fléchissant deux termes dont l'un est le moment de *r* et l'autre le moment de ϖ par rapport au point X ; ces deux termes sont donc

$$rx - \varpi(x-c)$$

ou

$$P\frac{l-\alpha}{l}x - P\frac{d-\alpha}{d-c}(x-c) = P\alpha\left(\frac{x-c}{d-c}-\frac{x}{l}\right) + Pc\frac{d-x}{d-c},$$

et, s'il y a un nombre quelconque de forces P entre les points c et d, on aura

$$\left(\frac{x-c}{d-c}-\frac{x}{l}\right)\sum_c^d P\alpha + \frac{c(d-x)}{d-c}\sum_c^d P.$$

L'expression complète du moment fléchissant est donc

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mu = {} & \frac{l-x}{l}\sum_0^c P\alpha + \frac{x}{l}\sum_d^l P(l-\alpha) \\ & + \left(\frac{x-c}{d-c}-\frac{x}{l}\right)\sum_c^d P\alpha + \frac{c(d-x)}{d-c}\sum_c^d P. \end{aligned}\right.$$

L'effort tranchant, qui s'obtient par un raisonnement analogue ou en prenant la dérivée de μ changée de signe, est

$$(2)\qquad \tau = \frac{1}{l}\sum_0^c P\alpha - \frac{1}{l}\sum_d^l P(l-\alpha) - \sum_c^d P\left(\frac{l-\alpha}{l}-\frac{d-\alpha}{d-c}\right).$$

§ 239.

MOMENT FLÉCHISSANT MAXIMUM DANS UNE SECTION DONNÉE PENDANT LE PASSAGE D'UN CONVOI. — Soient a_i la distance d'un essieu quelconque à l'essieu n° 1 et z la distance variable de celui-ci à la culée gauche, en sorte que

$$\alpha_i = a_i + z,$$

qui s'applique aussi à $i=1$ si l'on fait $a_i = 0$.

On aura

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mu = {} & \frac{l-x}{l}\sum_0^c Pa + \frac{x}{l}\sum_d^l P(l-a) + \left(\frac{x-c}{d-c}-\frac{x}{l}\right)\sum_c Pa \\ & + \frac{c(d-x)}{d-c}\sum_c^d P + \left(\sum_0^c P - \frac{x}{l}\sum_0^l P + \frac{x-c}{d-c}\sum_c^d P\right)z. \end{aligned}\right.$$

Si le train se déplace sans qu'aucune roue franchisse l'une des

deux poutrelles limitrophes à la section X ou l'un des appuis. toutes les sommes Σ qui entrent dans cette expression conservent leurs valeurs ; x est aussi une constante. Donc μ croîtra ou décroîtra suivant que le coefficient de z est positif ou négatif. Il ne pourrait donc être maximum dans cette position du convoi que si le coefficient de z était nul. Mais alors μ resterait rigoureusement constant tant qu'un des Σ ne changerait pas, c'est-à-dire tant qu'aucune roue ne passerait sur l'une des deux poutrelles limitrophes à X ou sur une culée, ce qui veut dire que, si μ passait par un maximum. sans que cette dernière circonstance se produisît, ce maximum se conserverait sans changement jusqu'à ce qu'elle se produisît.

On montrerait d'ailleurs, comme pour les poutres sans poutrelles. que le maximum ne se produit pas au passage d'une roue sur une culée.

Observons enfin que ces résultats subsistent, quelle que soit la charge permanente, suivant l'observation du § 214. Ainsi :

Théorème. — *Quelle que soit la charge permanente d'un pont porté par des poutres à deux appuis simples reliées entre elles par des poutrelles transversales, le moment fléchissant maximum que fait naître, dans une section donnée d'une poutre principale, le passage d'un convoi qui porte, sur elle, par l'intermédiaire des poutrelles, se produit nécessairement à l'instant où un essieu franchit l'une des deux poutrelles limitrophes de la section donnée.*

D'après cela, pour avoir le moment fléchissant maximum dans une section X (*fig.* 57) comprise entre deux poutrelles données c et d, il faudrait : 1° déplacer successivement chacun des essieux du convoi sur la poutrelle c et déterminer le moment de flexion correspondant dans la section X ; 2° faire la même opération pour la poutrelle d ; 3° prendre le plus grand de tous les moments en *nombre fini* obtenus ainsi et y ajouter le moment dû à la charge permanente.

Le moyen qui nous semble le plus rapide pour arriver à cette fin est le suivant :

Considérons (*fig.* 57, p. 389) trois poutrelles b, c, d.

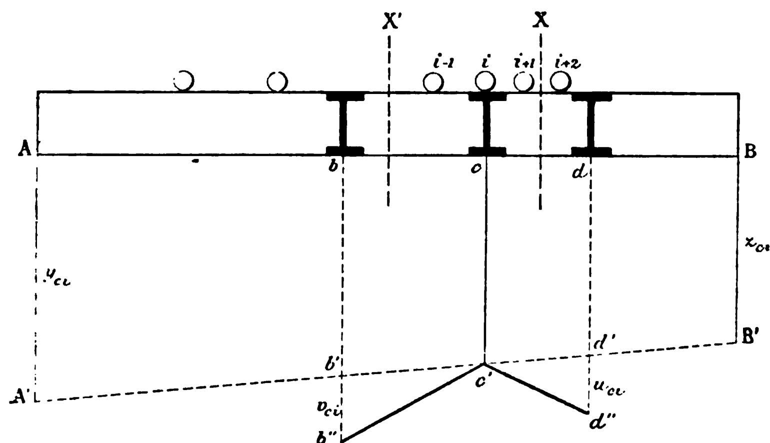
Le train étant placé de façon que l'essieu n° i se trouve sur la

poutrelle c, on peut relever sur un polygone funiculaire des charges mobiles, *tracé une fois pour toutes,* les quotients par la distance polaire que nous appellerons ici δ au lieu de d, pour ne pas confondre avec l'abscisse de la poutrelle d et cette poutrelle elle-même :

1° De la somme des moments relativement à l'appui A de toutes les forces placées à gauche de l'essieu n°·i ou de la poutrelle c sur laquelle cet essieu est placé. Soit y_{ci} cette longueur;

2° De la somme des moments relativement à l'appui B de toutes les forces placées à droite de cette poutrelle. Soit z_{ci} cette longueur;

Fig. 57.



3° De la somme des moments relativement à la poutrelle d de toutes les charges qui, dans la position définie du convoi, se trouvent placées entre les poutrelles c et d. Soit u_{ci} cette longueur;

4° De la somme des moments relativement à la poutrelle b des essieux compris entre elle et celle c. Soit v_{ci} cette longueur.

On peut, pour ces relevés, utiliser le polygone funiculaire (*fig.* A_0, *Pl. XXIII*) tracé une seule fois et à part, dont nous nous sommes déjà servi dans le cas où il n'y a pas de poutrelles.

S'il s'agit, par exemple, de l'essieu n° 3, prolongez le côté 4.3 vers la gauche à une distance, prise aussi à gauche de la verticale 3, égale à la distance qui sépare la poutrelle c de l'extrémité

gauche de la poutre ; par le point ainsi obtenu, menez une verticale ; le segment qu'elle intercepte entre les deux côtés $1A_0$ et 4.3 prolongés est l'ordonnée y_{ci}.

On aurait d'une façon analogue l'ordonnée z_{ci} relative à l'appui de droite.

Enfin, à la droite de la verticale 2, menez une autre verticale qui en soit distante de l'écartement des poutrelles c et d ; l'ordonnée qu'elle détermine entre le côté 3.4 prolongé et le côté qu'elle rencontre est égal à u_{ci} ; de sorte que, si la verticale tracée rencontre 3.4, cela prouve que $u_{ci} = 0$; c'est le cas où, le train étant placé de façon que l'essieu n° 3 soit en c, il ne tombe aucun essieu entre les poutrelles c et d.

Alors il est clair que $u_{ci} = 0$ et la troisième opération est inutile.

De même on relèverait v_{ci}.

Ceci fait (*fig.* 57, p. 389), portons de haut en bas y_{ci} sur la verticale de l'appui A, nous obtenons un point A′ ; portons de même z_{ci} sur la verticale de l'appui B, nous aurons un point B′. La droite A′B′ coupe les verticales des poutrelles b, c et d en b', c' et d'.

A partir de d' portons de haut en bas $d'd''$ égal à u_{ci} et à partir de b' portons de même de haut en bas $b'b'' = v_{ci}$.

L'ordonnée de la droite $c'b''$ représente le moment de flexion dans n'importe quelle section X′ comprise entre les poutrelles b et c lorsque l'essieu n° i (dans l'exemple choisi l'essieu n° 3) est posé sur la poutrelle c, et l'ordonnée de la droite $c'd''$ représente, pour la même position du train, les moments de flexion de toutes les sections X comprises entre les poutrelles c et d.

S'il y a n essieux, on a ainsi à tracer, entre deux poutrelles consécutives quelconques c et d, un nombre $2n$ de droites ; on les obtient, comme on le voit, très rapidement.

Pour chaque section, c'est l'ordonnée la plus grande de ces droites répondant à cette section qui donne rigoureusement le moment de flexion maximum déterminé par le passage du convoi, et il ne reste qu'à y ajouter le moment de flexion dû à la charge permanente.

Pour justifier cette règle, il suffit de se reporter à la formule (1). En ajoutant et retranchant la quantité

$$\frac{x}{l}\sum_{c}^{d} P(l-\alpha),$$

elle devient

$$(4)\quad \mu = \frac{l-x}{l}\sum_0^c P\alpha + \frac{x}{l}\sum_c^l P(l-\alpha) - \frac{x-c}{d-c}\left(\sum_c^d P\alpha - d\sum_c^d P\right).$$

Divisons les deux membres par la distance polaire δ du polygone funiculaire des charges construit une fois pour toutes, comme celui de la figure A_0 (*Pl. XXIII*), et concevons qu'on construise d'une part la droite

$$(5)\qquad y = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{\sum_0^c P\alpha}{\delta} + \frac{x}{l}\,\frac{\sum_c^l P(l-\alpha)}{\delta};$$

d'autre part celle

$$z = -\frac{x-c}{d-c}\,\frac{1}{\delta}\left(\sum_c^d P\alpha - d\sum_c^d P\right),$$

qu'on peut encore écrire, en appelant γ l'abscisse de la résultante des charges comprises entre les poutrelles c et d, lorsque l'essieu n° i est en c,

$$z = \frac{x-c}{d-c}\,\frac{d-\gamma}{\delta}\sum_c^d P;$$

d'où

$$(6)\qquad \frac{\mu}{\delta} = y + z.$$

On voit que

$$(7)\qquad \begin{cases} y_{ci} = \dfrac{1}{\delta}\displaystyle\sum_0^c P\alpha, \\ z_{ci} = \dfrac{1}{\delta}\displaystyle\sum_c^l P(l-\alpha), \\ u_{ci} = \dfrac{d-\gamma}{\delta}\displaystyle\sum_c^d P. \end{cases}$$

Donc

$$(8)\qquad y = \left(1 - \frac{x}{l}\right)y_{ci} + \frac{x}{l}\,z_{ci}$$

et

$$(9)\qquad z = \frac{x-c}{d-c}\,u_{ci}.$$

Donc la droite (8) admet bien les longueurs y_{ci} et z_{ci} comme ordonnées sur les verticales des appuis.

D'ailleurs, l'équation (9) montre que, sur les verticales des poutrelles c et d, soit pour $x = c$ et $x = d$, on a respectivement $z = 0$, $z = u_{ci}$.

La construction se trouve ainsi justifiée en ce qui touche la ligne $c'd''$.

Pour la justifier en ce qui touche la ligne $c'b''$, remplaçons, dans la formule (1), les abscisses d et c des poutrelles portant respectivement ces noms par celles c et b des poutrelles qui les précèdent, on aura

$$\mu = \frac{l-x}{l}\sum_0^b \mathrm{P}\alpha + \frac{x}{l}\sum_c^l \mathrm{P}(l-\alpha)$$
$$+\left(\frac{x-b}{c-b} - \frac{x}{l}\right)\sum_b^c \mathrm{P}\alpha + \frac{b(c-x)}{c-b}\sum_b^c \mathrm{P}.$$

Ajoutons et retranchons la quantité $\frac{l-x}{l}\sum_b^c \mathrm{P}\alpha$,

$$\mu = \frac{l-x}{l}\sum_0^c \mathrm{P}\alpha + \frac{x}{l}\sum_c^l \mathrm{P}(l-\alpha) + \frac{x-c}{c-b}\left(\sum_b^c \mathrm{P}\alpha - b\sum_b^c \mathrm{P}\right)$$

ou, en appelant γ' l'abscisse du centre de gravité des essieux compris entre b et c, lorsque l'essieu n° i est en c,

$$\mu = \frac{l-x}{l}\sum_0^c \mathrm{P}\alpha + \frac{x}{l}\sum_c^l \mathrm{P}(l-\alpha) + \frac{(x-c)(\gamma'-b)}{c-b}\sum_b^c \mathrm{P};$$

d'où l'on tire, pour toute section comprise entre b et c,

$$\frac{\mu}{\delta} = \left(1-\frac{x}{l}\right)y_{ci} + \frac{x}{l}z_{ci} + \frac{(x-c)v_{ci}}{c-b},$$

et de là on déduit la construction indiquée.

§ 240.

EFFORT TRANCHANT MAXIMUM OU MINIMUM DANS UNE SECTION DONNÉE. — La formule (2) du § 238 peut s'écrire

$$\tau = \frac{1}{l}\left[\sum_0^c \mathrm{P}\alpha - \sum_c^l \mathrm{P}(l-\alpha)\right] + \frac{1}{d-c}\sum_c^d \mathrm{P}(d-\alpha)$$

ou, à cause de (7),

$$\tau = \frac{\delta}{l}(y_{ci} - z_{ci}) + \frac{\delta}{d-c} u_{ci}.$$

S'il s'agit d'une section comprise entre b et d

$$\tau = \frac{\delta}{l}(y_{ci} - z_{ci}) + \frac{\delta}{d-c} v_{ci}.$$

Si, au lieu de prendre arbitrairement la distance polaire δ du polygone funiculaire construit d'après les règles du paragraphe précédent, on la prend en rapport simple avec la longueur l de la poutre, par exemple, égale au quart de cette longueur, ainsi que nous avons été conduit à le faire, dans le cas où il n'y a pas de poutrelles, on aura :

1° Pour une section comprise entre les poutrelles consécutives c et d, lorsque l'essieu n° i repose sur la poutrelle c,

$$\tau = \frac{1}{4}(y_{ci} - z_{ci}) + \frac{l}{d-c} \frac{u_{ci}}{4}$$

et pour les sections comprises entre les poutrelles consécutives b et c, pour la même position du convoi,

$$\tau = \frac{1}{4}(y_{ci} - z_{ci}) + \frac{l}{c-b} \frac{v_{ci}}{4},$$

où les longueurs y_{ci}, z_{ci}, u_{ci} et v_{ci} étant connues, on a immédiatement les valeurs de τ. Comme l'abscisse x de la section considérée n'entre pas dans les formules, ces équations représentent deux droites horizontales. S'il y a n essieux, on aura ainsi $2n$ horizontales à tracer entre chaque paire de poutrelles consécutives. Les unes peuvent être d'un côté de AB, les autres du côté opposé. Dans ce cas, l'horizontale la plus élevée et l'horizontale la plus basse donnent, pour toutes les sections comprises entre chaque paire de poutrelles, les valeurs extrêmes (positives ou négatives) de l'effort tranchant que le passage d'un convoi y détermine.

Il ne reste qu'à y ajouter l'effort tranchant dû à la charge permanente.

CHAPITRE XXI.

CONSTRUCTION DES MOMENTS D'ORDRE SUPÉRIEUR DES FORCES PARALLÈLES DONT LES POINTS D'APPLICATION SONT SITUÉS DANS UN MÊME PLAN, PARTICULIÈREMENT DES MOMENTS D'INERTIE DES AIRES PLANES.

§ 241.

DÉFINITION ET DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES MOMENTS D'ORDRE SUPÉRIEUR QUI FONT L'OBJET DE CE CHAPITRE. — Nous avons défini (§ 124) les moments des forces parallèles dont les points d'application sont situés dans un plan, relativement à une droite de ce plan, les produits de ces forces par leurs distances à la droite, et nous avons vu que le moment ainsi défini de la résultante d'un système de forces est égal, si l'on fait certaines conventions sur les signes des moments, à la somme algébrique des moments de ses composantes. Nous avons, de plus, donné le moyen de construire graphiquement le moment de la résultante d'un système de forces parallèles dont les points d'application sont situés dans un plan, relativement à une droite de ce plan. Ainsi, dans les *fig.* 93 et 93, les forces données supposées ramenées, comme on peut toujours le faire, dans le plan qui contient leurs points d'application, ont pour lignes d'action

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

et pour grandeurs

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Le moment de la résultante, relativement à la ligne $\alpha\beta$, de toutes celles qui sont à gauche de $\alpha\beta$ est le produit de l'ordonnée ab par la distance polaire; le moment de la résultante des forces 1, 2, 3, 4, 5, relativement à $\alpha\beta$, serait le segment *dc* que les côtés extrêmes du polygone funiculaire de ces cinq forces déterminent sur la verticale $\alpha\beta$, multipliée par la distance polaire et ainsi de suite.

Soient généralement

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_i, \ldots, P_n$$

des forces données ayant pour lignes d'action les lignes

1, 2, 3, 4, ...

de la *fig.* 93 et pour grandeur les lignes

1, 2, 3, 4, ...

de la *fig.* 93.

Soient

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_i, \ldots, x_n$$

les distances de leurs points d'application à la droite $\alpha\beta$: si le produit $\text{ba} \times d$ de la ligne **ba** par la distance polaire d est le moment de la résultante obtenu graphiquement, ce produit représente aussi la somme des moments des composantes, c'est-à-dire que l'on aura

$$(a) \qquad \mathbf{ba} \times d = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \ldots + P_n x_n.$$

Les *fig.* 93 et 93 ne fournissent pas seulement le second membre de cette égalité, mais aussi, si on le veut, chacun des termes qui le composent.

Veut-on avoir le terme $P_3 x_3$, on prolongera, jusqu'à la verticale $\alpha\beta$, les deux côtés du polygone funiculaire issus du sommet $3'$; on interceptera ainsi, sur la verticale $\alpha\beta$, une longueur 3_1, qui, multipliée par d, sera (§ 118) le produit cherché. Supposons qu'on prolonge ainsi jusqu'à la verticale $\alpha\beta$ tous les côtés du polygone funiculaire; on interceptera sur cette ligne des segments

$$1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1, 7_1, 8_1,$$

que nous appellerons

$$P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5, P'_6, P'_7, P'_8,$$

et l'on aura

$$(b) \qquad P'_1 \times d = P_1 x_1, \quad P'_2 \times d = P_2 x_2, \quad \ldots, \quad P'_8 \times d = P_8 x_8.$$

Concevons : 1° qu'on regarde ces longueurs P'_i comme un nouveau système de forces parallèles agissant aux points d'application.

1, 2, 3, 4, 5, 6, B, A

des forces données;

2° Qu'on porte les forces, en leur assignant des sens différents, suivant que les forces données tendent à faire tourner leurs bras de

levier dans un sens convenu ou en sens contraire, sur une verticale quelconque, de façon à former un nouveau polygone des forces analogue à celui représenté en *ab* sur la *fig.* 93;

3° Qu'on construise un polygone funiculaire relatif à un pôle distant, d'une longueur égale à *d* de la verticale dont il s'agit.

La verticale $\alpha\beta$ découpera, sur ce nouveau polygone funiculaire (que nous ne traçons pas pour ne pas compliquer la figure), un segment analogue à **ba** et que nous appellerons $\mathbf{b}_1\mathbf{a}_1$. On aura

$$\mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 \times d = P'_1 x_1 + P'_2 x_2 + \ldots$$

ou, en vertu des expressions (*b*) des forces P'_i,

$$(a') \qquad \mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 \times d^2 = P_1 x_1^2 + P_2 x_2^2 + P_3 x_3^2 + \ldots = \Sigma P_i x_i^2,$$

c'est-à-dire que la ligne $\mathbf{b}_1\mathbf{a}_1$ représentera, au facteur d^2 près, la somme des produits des forces données par les carrés des distances de leurs points d'application à la ligne $\alpha\beta$. Cette somme est ce qu'on appelle le *moment d'inertie* des forces données relativement à cette ligne.

De même que le polygone funiculaire de la *fig.* 93 donne non seulement le second membre de l'équation (*a*), mais encore séparément chacun des termes de ce second membre, de même le nouveau polygone funiculaire dont nous venons d'indiquer le tracé donnerait chacun des termes qui composent le second membre de l'équation (*a*). Appelons

$$P''_1,\ P''_2,\ P''_3,\ \ldots$$

ces termes, de façon que

$$P''_1 \times d = P_1 x_1^2, \quad P''_2 \times d = P_2 x_2^2, \quad \ldots.$$

En les regardant, à leur tour, comme les grandeurs d'un système de forces parallèles agissant aux points d'application des forces données et cherchant graphiquement la ligne représentant le moment de leur résultante, on trouverait une ligne $\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2$, telle que

$$\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 \times d = P''_1 x_1 + P''_2 x_2 + P''_3 x_3 + \ldots$$

ou

$$\mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 \times d^3 = P_1 x_1^3 + P_2 x_2^3 + P_3 x_3^3 + \ldots = \Sigma P x^3,$$

c'est-à-dire qu'on obtiendrait la somme des produits des forces données par les cubes des distances de leurs points d'application à

la ligne $\alpha\beta$. En poursuivant ainsi, on obtiendrait généralement la construction graphique de l'expression

$$\mu_k = P_1 x^k + P_2 x_2^k + \ldots + P_n x_n^k = \Sigma P_i x_i^k,$$

et, en même temps, la construction graphique de chacun des termes composant cette somme. Soient

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$$

ces termes, de telle façon que

$$Q_1 \times d^k = P_1 x_1^k, \quad Q_2 \times d^k = P_2 x_2^k, \quad \ldots, \quad Q_n \times d^k = P_n x_n^k.$$

Si l'on regarde maintenant

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$$

comme des forces parallèles agissant non plus aux points d'application des forces données, mais en des points arbitrairement choisis sur les verticales de ces points, par exemple, en q_1, q_2, q_3, ... et suivant des directions *perpendiculaires* aux forces données, soit, sur la figure, parallèlement à une ligne horizontale quelconque, on pourra trouver graphiquement le moment de leur résultante par rapport à cette ligne. Soit $\mu_{k+1} \times d$, où μ_{k+1} est une ligne qu'on relève sur la figure à ce moment; si

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$$

désignent les distances des points d'application

$$q_1, q_2, q_3, \ldots$$

des forces Q_1, Q_2, Q_3, ... données à la droite horizontale considérée, on aura

$$\mu_{k+1} \times d = Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \ldots + Q_n y_n$$

ou

$$\mu_{k+1} \times d^{k+1} = P_1 x_1^k y_1 + P_2 x_2^k y_2 + \ldots + P_n x_n^k y_n = \Sigma P_i x_i^k y_i.$$

En continuant à opérer sur les forces, dans la nouvelle direction qui vient de leur être donnée, comme on a opéré sur elles dans leur direction première, on trouverait successivement, et par des constructions graphiques, les quantités

$$\mu_{k+2} \times d^{k+2} = \Sigma P_i x_i^k y_i^2,$$
$$\mu_{k+2} \times d^{k+2} = \Sigma P_i x_i^k y_i^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mu_{k+l} \times d^{k+l} = \Sigma P_i x_i^k y_i^l;$$

Cette quantité $\Sigma P_i x_i^k y_i^l$ est ce qu'on peut nommer un *moment de l'ordre* $k+l$ des forces données. Si la distance polaire d est l'unité de longueur, la valeur numérique de ce moment est représentée par la longueur μ_{k+l} mesurée à l'échelle des forces.

S'il est incommode de prendre la distance polaire d égale à l'unité de longueur, on la prendra égale à un multiple ou un sous-multiple simple de cette unité, de façon que le facteur d^{k+l} par lequel il faut multiplier μ_{k+l} pour avoir le moment d'ordre $k+l$, soit un nombre simple et facile à calculer.

Dans la pratique, on ne fait guère usage que des moments des deux premiers ordres. Ceux du premier ordre sont de la forme

$$\Sigma P_i x_i;$$

ce sont les moments *statiques* ou les moments des forces données relativement à une droite $\alpha\beta$, tels que nous les avons définis au § 124. Ceux du second ordre sont de l'une des deux formes

$$\Sigma P_i x_i^2 \text{ ou } \Sigma P_i x_i y_i.$$

Le premier est le *moment d'inertie* relativement à la droite $\alpha\beta$. Ainsi l'on nomme moment d'inertie d'un système de forces parallèles dont les points d'application sont situés dans un plan, relativement à une droite de ce plan, la somme des produits de ces forces par les carrés des distances de leurs points d'application à la droite. On donne au moment d'inertie d'une force le signe de cette force.

Si l'on pose

$$\Sigma P_i x_i^2 = \pm r^2 \Sigma P_i,$$

r est une longueur que l'on nomme le *rayon de gyration* du système des forces données relativement à la droite $\alpha\beta$.

Remarque. — On voit que la construction graphique des moments des divers ordres, et en particulier celle des moments statiques et des moments d'inertie, n'offre aucune difficulté et découle d'une façon très remarquable de l'emploi du polygone des forces et du polygone funiculaire.

Lorsque les forces données, au lieu d'être en nombre fini, sont infiniment voisines, les polygones funiculaires sont remplacés par des courbes. On devra dans ce cas, si l'on veut opérer graphiquement, remplacer les forces données par un nombre fini de forces assez voisines les unes des autres pour pouvoir approximativement

tenir lieu des forces données ou bien chercher l'expression analytique du moment à déterminer et construire ensuite cette expression.

Nous donnerons plus loin quelques exemples indiquant la marche à suivre; mais auparavant nous allons faire une étude plus complète des moments d'inertie si usités dans les applications de la Mécanique à l'art des constructions.

§ 242.

Théorème I. — *Le rayon de gyration d'un système de forces relativement à un axe quelconque est égal à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit: 1° le rayon de gyration relativement à un axe parallèle à celui que l'on considère et passant par le centre des forces parallèles données; 2° la distance entre ces deux axes.*

En effet, soient (*fig.* 95, *Pl. XXI*) x_i les distances des points d'application des forces données à un axe ZZ'; soient x'_i ces mêmes distances à un axe $Z_1Z'_1$ parallèle à ZZ' et passant par le centre G des forces parallèles données; enfin soit a la distance entre ces deux axes. On aura

$$x_i = x'_i + a,$$

d'où

$$\Sigma P_i x_i^2 = \Sigma P_i (x'_i + a)^2 = \Sigma P_i x'^2_i + \Sigma P_i a^2 + 2\Sigma P_i x'_i a$$

ou, en mettant en facteur la constante a,

$$\Sigma P_i x_i^2 = \Sigma P_i x'^2_i + a^2 \Sigma P_i + 2a\Sigma P_i x'_i;$$

mais, en vertu du théorème sur les moments des forces parallèles, $\Sigma P_i x'_i = 0$; car cette quantité est égale à ΣP_i multiplié par la distance du centre des forces parallèles à $Z_1Z'_1$: or cette distance est nulle, puisque $Z_1Z'_1$ passe par ce centre. Donc

$$\frac{\Sigma P_i x^2}{\Sigma P_i} = a^2 + \frac{\Sigma P_i x'^2_i}{\Sigma P_i},$$

c'est-à-dire que le carré du rayon de gyration relatif à ZZ' est égal au carré du rayon de *gyration* relatif à $Z_1Z'_1$ plus le carré de la distance entre ZZ' et $Z_1Z'_1$, ce qui démontre le théorème énoncé.

THÉORÈME II. — *Si, sur les diverses lignes issues d'un point quelconque d'un plan, on porte des longueurs inversement proportionnelles aux rayons de gyration relativement à ces lignes, le lieu des extrémités de ces longueurs est une ellipse.*

Soient (*fig.* 94, *Pl. XXI*) C un point quelconque du plan; Cx', Cy' deux axes de coordonnées rectangulaires et Cu une droite quelconque formant un angle α avec l'axe Cx'.

Le moment d'inertie d'une force P_i, relativement à la droite Cu, est, en désignant par x'_i et y'_i les coordonnées de son point d'application,

$$P_i(y'_i \cos\alpha - x'_i \sin\alpha)^2,$$

et le moment d'inertie de toutes les forces données relativement à Cu sera

$$\Sigma P_i(y'_i \cos\alpha - x'_i \sin\alpha)^2.$$

Si donc on appelle r le rayon de gyration relatif à cette ligne, on aura

$$r^2 \Sigma P_i = \Sigma P_i (y'_i \cos\alpha - x'_i \sin\alpha)^2$$

ou

$$r^2 \Sigma P_i = \Sigma P_i y'^2_i \cos^2\alpha + \Sigma P_i x'^2_i \sin^2\alpha - 2 \Sigma P_i x'_i y'_i \sin\alpha \cos\alpha,$$

et, en posant

$$a'^2 \Sigma P_i = \Sigma P_i x'^2_i, \quad b'^2 \Sigma P_i = \Sigma P_i y'^2_i, \quad c'^2 \Sigma P_i = \Sigma P_i x'_i y'_i,$$

$$\text{(A)} \qquad r^2 = b'^2 \cos^2\alpha + a'^2 \sin^2\alpha - 2c'^2 \cos\alpha \sin\alpha.$$

Portons sur Cu une longueur

$$CM = \frac{d^2}{r},$$

d étant une constante que l'on peut choisir arbitrairement. Si x' et y' désignent les coordonnées du point M, on aura

$$x' = \frac{d^2}{r} \cos\alpha, \quad y' = \frac{d^2}{r} \sin\alpha.$$

Si l'on tire de là les valeurs $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$ et qu'on les porte dans l'équation (A), r^2 disparaît en facteur commun et il vient

$$\text{(1)} \qquad b'^2 x'^2 + a'^2 y'^2 - 2c'^2 x' y' = d^4,$$

où a' et b' sont les rayons de gyration relatifs aux axes des y' et

des x' et c'^2 le rapport

$$\frac{\Sigma P_i x'_i y'_i}{\Sigma P_i},$$

équation d'une ellipse.

§ 243.

ELLIPSE D'INERTIE ET AXES PRINCIPAUX. — ELLIPSE CENTRALE ET AXES CENTRAUX. — Si l'on avait pris deux autres axes de coordonnées rectangulaires Cx et Cy, on aurait obtenu une équation de la même forme, c'est-à-dire une équation telle que

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2c^2xy = d^4,$$

où a et b eussent désigné les rayons de gyration relatifs aux nouveaux axes, et c^2 le rapport

$$\frac{\Sigma P_i x_i y_i}{\Sigma P_i}.$$

Supposons qu'on prenne pour axes des x et des y les axes principaux de la courbe.

Pour ces axes on aura $c = 0$, c'est-à-dire

$$\Sigma P_i x_i y_i = 0.$$

La courbe (1), rapportée à ces axes, prend la forme

$$b^2x^2 + a^2y^2 = d^4$$

et, en faisant la constante $d^4 = a^2 b^2$,

$$(2) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

où a et b sont les rayons de gyration relativement aux axes principaux passant au point c, savoir : a le rayon de gyration relatif à l'axe des y, et b le rayon de gyration relatif à l'axe des x, soit

$$a^2 = \frac{\Sigma P_i x_i^2}{\Sigma P_i},$$

$$b^2 = \frac{\Sigma P_i y_i^2}{\Sigma P_i}.$$

Remarque. — On donne au moment d'inertie d'une force le même signe qu'à cette force.

Si toutes les forces sont dirigées dans le même sens, on le prend

pour sens positif, et alors le moment d'inertie de chaque force, relativement à un axe quelconque, étant positif, il en est de même du moment d'inertie de leur ensemble. En ce cas, a^2 et b^2 sont essentiellement positifs, et la courbe (2) ou (1) est une ellipse.

Si, au contraire, les forces données ne sont pas toutes dirigées dans le même sens, il peut arriver que les moments d'inertie du système de ces forces, relativement aux deux axes principaux passant au point C, soient de signes contraires, c'est-à-dire que l'une des quantités a^2 ou b^2 soit à remplacer par $-a^2$ ou $-b^2$. Ces quantités se trouvant alors de signes contraires, la courbe (1) ou (2) est une hyperbole.

La courbe (2), relative à un point C du plan, est nommée la *courbe* ou *conique* d'inertie relative à ce point; ses axes principaux sont appelés les *axes principaux d'inertie*, ou simplement les *axes principaux* relatifs à ce même point. Lorsque le point C coïncide avec le centre des forces parallèles, la conique d'inertie relative à ce point prend le nom de *conique centrale,* et ses axes principaux, le nom d'*axes centraux* du système des forces données.

On voit qu'en chaque point les axes principaux sont tels que, si on les prend par axes des coordonnées x et y, on a

$$\Sigma P_i x_i y_i = 0.$$

On est certain qu'en chaque point il existe deux axes rectangulaires pour lesquels cette relation est satisfaite.

§ 244.

CARACTÈRE DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS DES CONIQUES D'INERTIE. — Soient (*fig.* 96, *Pl. XXI*) deux axes rectangulaires Cx' et Cy', passant par un point quelconque C du plan. L'équation de la conique relative au point C peut s'écrire, comme nous venons de le voir,

$$(1\ bis) \qquad b'^2 x'^2 + a'^2 y'^2 - 2c'^2 x'y' = d^4,$$

où

$$a'^2 = \frac{\Sigma P_i x_i'^2}{\Sigma P_i}, \quad b'^2 = \frac{\Sigma P_i y_i'^2}{\Sigma P_i}, \quad c'^2 = \frac{\Sigma P_i x_i' y_i'}{\Sigma P_i},$$

et d^4 est une constante.

Prenons un nouvel axe Cy'' formant avec Cx' un angle θ, et soient x'' et y'' les nouvelles coordonnées. On aura

$$(b)\qquad y' = y''\sin\theta,\quad x' = x'' + y''\cos\theta,$$

en sorte que l'équation (1 *bis*), rapportée aux nouveaux axes, sera

$$(2)\qquad a'^2x''^2 + \left|\begin{matrix} 2a'^2\cos\theta \\ -2c'^2\sin\theta \end{matrix}\right| x''y'' + \left|\begin{matrix} a'^2\cos^2\theta \\ +b'^2\sin^2\theta \\ -2c'^2\sin\theta\cos\theta \end{matrix}\right| y''^2 = d^4.$$

La formule (A) du § 242 montre, et il est d'ailleurs évident, que le coefficient de y''^2 est le carré du rayon de gyration relatif à l'axe Cy''. Soit b_1 ce rayon. Posons de plus

$$c_1^2 = \frac{\Sigma P_i x'' y''}{\Sigma P_i}.$$

De la formule (b) on déduit

$$y''_i = \frac{y'_i}{\sin\theta} \quad \text{et} \quad x''_i = x'_i - \frac{y'_i\cos\theta}{\sin\theta},$$

d'où

$$x''_i y''_i = \frac{x'_i y'_i}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} y'^2_i$$

et

$$\frac{\Sigma P_i x''_i y''_i}{\Sigma P_i} = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\Sigma P_i x'_i y'_i}{\Sigma P_i} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\frac{\Sigma P_i y'^2_i}{\Sigma P_i},$$

ou

$$c_1^2 = \frac{c'^2}{\sin\theta} - \frac{a'^2\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

ou enfin

$$a'^2\cos\theta - c'^2\sin\theta = -c_1^2\sin^2\theta.$$

Donc l'équation (2) peut s'écrire

$$a'^2x''^2 - 2\sin^2\theta\, c_1^2\, x''y'' + b_1^2 y''^2 = a^2.$$

Si les axes Cx'' et Cy'' sont deux diamètres conjugués de la conique centrale, le terme en $x''y''$ disparaît de cette dernière équation, c'est-à-dire que $c_1 = 0$.

Ainsi les diamètres conjugués sont caractérisés par la relation

$$(a)\qquad \Sigma P_i x''_i y''_i = 0.$$

Si les lignes Cx'' et Cy'' sont rectangulaires, la formule (a) caractérise les axes principaux : c'est ce que nous savions déjà.

Remarque. — Si du point dont les coordonnées sont x'' et y'' on abaisse sur Cx'' et Cy'' des perpendiculaires q et p, on aura

$$x'' = \frac{p}{\sin\theta}, \quad y'' = \frac{q}{\sin\theta};$$

donc, x''_i et y''_i étant les coordonnées du point d'application de la force P_i, et p_i et q_i étant les distances de ce point aux axes Cx'' et Cy'', on aura

$$x''_i = \frac{\sin\theta}{p_i}, \quad y''_i = \frac{q_i}{\sin\theta},$$

et, par suite,

$$\Sigma P_i x''_i y''_i = \frac{1}{\sin^2\theta} \Sigma P_i p_i q_i.$$

Donc l'équation (a), qui caractérise les diamètres conjugués Cx'' et Cy'', peut encore s'écrire

$$\Sigma P_i p_i q_i = 0.$$

§ 245.

NOUVELLE DÉFINITION DE LA CONIQUE D'INERTIE. — Si, à chacune des droites Cv (*fig.* 97), issues d'un point C du plan, on mène deux parallèles KK', $K_1K'_1$ distantes de la droite Cv, d'une longueur égale au rayon de gyration relatif à cette droite, la conique d'inertie définie par l'équation (2) du § 243 peut encore être définie l'enveloppe des lignes KK' ou $K_1K'_1$. Soit, en effet, Cu la direction du diamètre conjugué à la ligne quelconque Cv dans la conique (2), et soient $CA = a'$ et $CB = b'$ les longueurs des demi-diamètres conjugués dirigés suivant Cu et Cv, et θ leur angle uCv. En vertu de la définition de la conique (2) (§ 243), si r est le rayon de gyration relatif à l'axe Cv, on a

$$r = \frac{d^2}{b'} = \frac{ab}{b'},$$

a et b désignant les demi-axes de la conique; mais on a, en vertu d'un théorème bien connu,

$$ab = a'b'\sin\theta,$$

d'où

$$r = \frac{a'b'\sin\theta}{b'} = a'\sin\theta,$$

c'est-à-dire que le rayon du gyration relatif à Cv est la longueur de la perpendiculaire AP abaissée, sur cette ligne, par l'extrémité A de son diamètre conjugué; et, comme la tangente en A est parallèle à Cv, on voit que cette tangente coïncide avec la ligne KK', ce qu'il fallait démontrer.

§ 246.

TRACÉ GRAPHIQUE DE LA DIRECTION DES AXES PRINCIPAUX RELATIFS A UN POINT QUELCONQUE DU PLAN. — Connaissant la conique centrale d'un système de forces, il peut être utile de savoir trouver graphiquement la direction des axes principaux relatifs à un point quelconque C du plan. Ce problème se résout très simplement.

Soient, en effet (*fig.* 99, *Pl. XXII*), $aa' = 2a$ et $bb' = 2b$ les axes de la conique centrale tracée en pointillé sur la figure. On aura

$$a^2 = \frac{\Sigma P_i x_i^2}{\Sigma P_i},$$

$$b^2 = \frac{\Sigma P_i y_i^2}{\Sigma P_i}.$$

Nous supposons, pour fixer les idées, $a < b$. Faisons tourner cette conique d'un angle droit autour de son centre; nous aurons ainsi la conique AA'BB'. Soient F et F' ses foyers de sorte que

$$CF = \sqrt{b^2 - a^2} = k.$$

Désignons par x et y les coordonnées d'un point quelconque C' du plan, rapporté aux axes centraux Ox et Oy, et soient $C'x'$ et Cy' deux axes parallèles à Ox et Oy passant au point C'. Le rayon de gyration relatif à l'axe Cx' est (§ 242)

$$b' = \sqrt{b^2 + y^2}.$$

Le rayon de gyration relatif à l'axe $C'y'$ est

$$a' = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Soient x'_i et y'_i les coordonnées du point d'application d'une quelconque des forces données P_i, relativement aux axes $C'x'$ et Cy'. Posons

$$c'^2 = \frac{\Sigma P_i x'_i y'_i}{\Sigma P_i}.$$

On a

$$x'_i = x_i - x,$$
$$y'_i = y_i - y;$$

d'où

$$x'_i y'_i = x_i y_i - y x_i - x y_i + xy,$$
$$c'^2 = \frac{\Sigma P_i x'_i y'_i}{\Sigma P_i} = \frac{\Sigma P_i x_i y_i}{\Sigma P_i} - y \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i} - x \frac{\Sigma P_i y_i}{\Sigma P_i} + xy.$$

Et comme Cx et Cy sont les axes centraux, les trois premiers termes sont nuls; donc

$$c'^2 = xy.$$

L'équation de la courbe d'inertie relative au point C, rapportée aux axes Cx' et Cy', est (§ 243)

$$b'^2 x'^2 + a'^2 y'^2 - 2 c'^2 x'y' = d^4$$

ou

$$(b^2 + y^2) x'^2 + (a^2 + x^2) y'^2 - 2 xy x'y' = d^4.$$

Soient CX et CY ses axes principaux; si α est l'angle que l'un de ces axes fait avec Cx' ou avec Ox, on a, d'après la théorie des courbes du second degré,

$$\tang 2\alpha = \frac{-2xy}{b^2 + y^2 - (a^2 + x^2)} = \frac{-2xy}{k^2 + y^2 - x^2},$$

ou bien

$$\tang 2\alpha = \frac{\frac{y}{x-k} + \frac{y}{x+k}}{1 - \frac{y}{x-k} \cdot \frac{y}{x+k}},$$

ou, comme

$$\frac{y}{x-k} = \tang \mathrm{CF}x,$$
$$\frac{y}{x+k} = \tang \mathrm{CF'}x,$$

on a

$$\tang 2\alpha = \tang(\mathrm{CF'}x + \mathrm{CF}x),$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{CF'}x + \mathrm{CF}x) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\mathrm{CF'}x + \mathrm{CF}x).$$

Cela signifie que, si l'on joint le point C aux deux foyers F et F' de la conique AA'BB' et qu'on mène les bissectrices des deux angles supplémentaires formés par ces rayons vecteurs, ces bissectrices sont précisément les axes principaux cherchés.

§ 247.

On sait que, par tout point C d'un plan, on peut faire passer une ellipse et une hyperbole admettant des foyers F et F' et se coupant à angle droit; les lignes CX et CY sont précisément les tangentes, ou, si l'on veut, les normales à ces lignes.

Ainsi, *lorsque des forces parallèles quelconques agissent sur un nombre fini ou non de points pris dans un plan, leurs axes principaux d'inertie aux divers points du plan sont les normales aux deux familles de coniques homofocales à la conique centrale, que l'on aurait fait tourner d'un angle droit autour de son centre.*

§ 248.

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DE LA GRANDEUR DES AXES PRINCIPAUX RELATIFS A UN POINT QUELCONQUE ET DU MOMENT D'INERTIE RELATIF A UNE DROITE QUELCONQUE DU PLAN. — Une fois connue la direction des axes principaux relatifs à un point quelconque du plan, rien n'est plus facile que de déterminer la grandeur de ces axes; car on peut facilement trouver le rayon de gyration relatif à une droite quelconque XX' du plan (*fig.* 99). Pour cela, du centre O des forces parallèles, on mènera une droite $\xi\xi'$ parallèle à la droite donnée. La perpendiculaire abaissée sur $\xi\xi'$, de l'extrémité du diamètre de l'ellipse centrale conjugué à $\xi\xi'$, représente (§ 245) le rayon de gyration relatif à cette ligne. Connaissant le rayon de gyration relatif à $\xi\xi'$, celui relatif à XX' se déduit du théorème I établi au § 242. Soit b' ce rayon.

On trouvera de même le rayon de gyration a', relatif à l'axe CY'.

La conique d'inertie relative au point C a pour demi-axes, suivant XX', la longueur a' et, suivant CY', la longueur b'; cette conique est d'ailleurs inutile à tracer, puisque, à l'aide de la conique centrale, on peut trouver graphiquement le moment d'inertie relatif à une droite quelconque, ainsi que la direction des axes principaux relatifs à un point quelconque.

On voit par là combien il importe de savoir tracer la conique centrale d'un système de forces données. On le peut évidemment,

si l'on connaît les rayons de gyration relativement à trois axes de directions quelconques passant par le centre des forces parallèles, ou relativement à deux axes seulement, pourvu que l'on sache d'avance que ces axes sont dirigés suivant deux diamètres conjugués de la conique à tracer. Dans le premier cas, on connaît le centre de la conique et trois de ses points; dans le second, on connaît en grandeur et en position un système de diamètres conjugués.

§ 249.

Voici un cas qui se présente fréquemment, où l'on connaît d'avance les directions de deux diamètres conjugués.

Supposons (*fig.* 101, *Pl. XXII*) que des forces données soient deux à deux égales ; supposons, de plus, que les lignes aa', $a_1 a'_1$, $a_2 a'_2$, ..., qui joignent les points d'application des couples de forces égales, soient parallèles à une direction fixe XX', et qu'enfin les milieux des lignes aa', $a_1 a'_1$, $a_2 a'_2$ soient sur une ligne droite YY'. Nous appellerons cette droite un *diamètre* du système des forces données.

Si un système de forces parallèles admet un diamètre, le centre G de ces forces est sur ce diamètre (1). Soit $X_1X'_1$ une parallèle menée par le point G à la direction des lignes que le diamètre divise en parties égales; je dis que les droites $X_1X'_1$ et YY' sont des diamètres conjugués de la conique centrale, c'est-à-dire (§ 244) que, si l'on rapporte cette conique aux axes GX'_1 et GY', en appelant x''_i et y''_i les coordonnées du point d'application de l'une des forces données, on aura

$$\Sigma P_i x''_i y''_i = 0.$$

En effet, les points d'application a et a' de deux forces égales ayant même ordonnée et des abscisses égales et de signes contraires donneront, dans la somme ci-dessus, un total nul; il en est de même des deux forces égales appliquées en a_1 et en a'_1, et ainsi de suite.

---

(1) Cela est évident : car le centre des deux forces appliquées en a et a' est sur ce diamètre; de même, le centre des deux forces appliquées en a_1 et a'_1, et ainsi de suite : donc le centre de toutes les forces données s'y trouve aussi, en vertu des *Remarques* du § 121.

§ 250.

Habituellement on a à étudier les moments d'inertie d'aires limitées par des contours fermés, en supposant, comme on l'a déjà fait à l'occasion des centres de gravité, ces aires matérialisées et pesantes. Le moment d'inertie (*fig.* 98, *Pl. XXI*) d'une aire (A), relativement à un axe OX est le moment d'inertie des forces que la pesanteur exerce sur cette aire. Dans ce cas, toutes les forces étant dirigées dans le même sens, la courbe centrale est toujours une ellipse qu'on appelle l'*ellipse centrale* d'inertie. Ses axes sont les axes centraux de l'aire donnée. Le carré du rayon de gyration relatif à un axe est le quotient du moment d'inertie relatif à cet axe par le poids de l'aire donnée ou par l'aire elle-même, si elle est homogène et de densité 1 (¹).

Pour trouver l'ellipse centrale et pour connaître par suite (§ 248) le moment d'inertie de l'aire donnée, relativement à un axe quelconque pris dans son plan, il suffit, d'après ce qui précède, de connaître ses moments d'inertie relativement à trois lignes de directions quelconques passant par son centre de gravité, ou bien les moments d'inertie relatifs à deux de ces lignes que l'on sache d'avance être un système de diamètres conjugués de l'ellipse d'inertie.

Si une aire est décomposable en plusieurs autres, le moment d'inertie de l'aire totale est la somme des moments d'inertie des aires partielles : il suffit donc de savoir trouver les moments d'inertie de ces dernières.

§ 251.

Si l'aire donnée admet un diamètre rectiligne, cette ligne qui passe par le centre de gravité de l'aire et une parallèle aux cordes qu'elle divise en parties égales, menées par le centre de gravité, for-

(¹) Plus souvent encore, on définit le moment d'inertie d'un corps : la somme des produits de la masse (et non du poids) de chacun de ses éléments par le carré de sa distance à une droite. On passe de ce moment d'inertie à celui que nous considérons en multipliant le premier par l'accélération g de la gravité, laquelle est, à Paris, $g = 9{,}8088$.

ment (§ 249) un système de diamètres conjugués de l'ellipse centrale, en sorte qu'on pourra construire la courbe si l'on connaît les moments d'inertie relatifs à ces deux lignes.

De là on déduit que, si la surface comporte un axe de symétrie, cet axe et sa perpendiculaire, menée par le centre de gravité, sont les axes centraux de la surface.

§ 252.

RECHERCHE DES MOMENTS D'INERTIE ET DE LA COURBE CENTRALE D'INERTIE. — Nous avons déjà vu (§ 241) que, quand on a un nombre limité de forces, leur moment d'inertie relatif à un axe quelconque se trouve graphiquement, sans difficulté, en faisant usage du polygone des forces et du polygone funiculaire. Par suite, on peut trouver graphiquement les éléments nécessaires au tracé de la conique centrale.

Lorsque les forces données sont en nombre illimité, comme cela a lieu pour les forces de la pesanteur agissant sur les divers points d'une surface plane supposée matérialisée, les procédés graphiques permettent encore de trouver approximativement les moments d'inertie. Il suffit de remplacer les forces données en nombre illimité par un nombre fini de forces assez voisines les unes des autres pour pouvoir, approximativement, tenir lieu des forces données.

Dans ce cas, on fait souvent usage aussi du Calcul intégral pour déterminer l'expression analytique des moments d'inertie, sauf à construire ensuite ces expressions par les procédés du calcul graphique.

Si ρ est la densité au point m de l'aire (A) rapportée à deux axes rectangulaires, le moment d'inertie de cette aire est

$$I = \int\int \rho y^2 \, dx \, dy;$$

son aire est

$$\Omega = \int\int \rho \, dx \, dy,$$

et le rayon de gyration r est

$$r = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}.$$

Si la surface est homogène, le moment d'inertie de la bande $\alpha\beta\alpha'\beta'$

(*fig.* 98, *Pl. XXI*), de hauteur dy, est

$$\rho.\alpha\beta.y^2 dy.$$

$\alpha\beta$ est une fonction de y, définie par le contour qui limite l'aire donnée (A). Si

$$\alpha\beta = f(y),$$

le moment d'inertie de l'aire donnée sera

$$\rho \int y^2 f(y)\, dy.$$

Son poids étant

$$\rho \int f(y)\, dy,$$

le rayon de gyration sera donné par

$$r^2 = \frac{\int y^2 f(y)\, dy}{\int f(y)\, dy};$$

la densité ρ disparaît.

§ 253.

On peut parfois remplacer le Calcul intégral par la règle suivante :

Soit η la distance à OX du centre de gravité de l'aire (A). Le théorème des moments donne

$$\eta \int\int \rho\, dx\, dy = \int\int \rho y\, dx\, dy.$$

Considérons un cylindre ayant pour base le périmètre de l'aire donnée (A) et ayant ses génératrices normales au plan de cette aire, ce cylindre étant limité par un plan passant par OX et incliné à 45° sur le plan donné. Soit η_1 la distance à OX de la projection sur le plan (A) du centre de gravité du cylindre. Le volume de l'élément cylindrique ayant pour base $dx\,dy$ sera $y\,dx\,dy$, son poids $\rho y\,dx\,dy$; son moment $\rho y^2\, dx\, dy$. Donc le théorème des moments donnera

$$\eta_1 \int\int \rho y\, dx\, dy = \int\int \rho y^2\, dx\, dy.$$

Multipliant membre à membre les deux dernières égalités et supprimant le facteur $\int\int \rho y\, dx\, dy$ commun aux deux membres, il vient

$$\eta\eta_1 \int\int \rho\, dx\, dy = \int\int \rho y^2\, dx\, dy,$$

d'où

$$\eta\eta_1 = \frac{\int\int \rho y^2\, dx\, dy}{\int\int \rho\, dx\, dy} = r^2.$$

Ainsi le rayon de gyration cherché est la moyenne géométrique entre les distances η et η_1. M. Bresse donne ce procédé dans son *Cours de Résistance des matériaux professé à l'École des Ponts et Chaussées*.

§ 254.

RECTANGLE HOMOGÈNE. — Appliquons-le à la recherche du moment d'inertie d'un rectangle homogène YY'ZZ' (*fig.* 102, *Pl. XXII*), relativement à l'un de ses côtés, au côté YY' par exemple. Soient $YY' = a$, $Y'Z' = b$.

On a, pour la distance η du centre de gravité du rectangle à l'axe YY',

$$\eta_1 = \frac{b}{2}.$$

Maintenant élevons en Z et Z' des perpendiculaires ZZ_1 $Z'Z'_1$ jusqu'à leur rencontre, en Z_1 et Z'_1, avec un plan incliné à 45°, mené par YY'. Nous formerons un prisme : son centre de gravité sera sur la ligne gg' joignant les centres de gravité des triangles YZ_1Z et $Y'Z'_1Z'$. La projection $g_1g'_1$ de cette ligne sera à une distance de YY'

$$\eta_1 = Yg_1 = \frac{2}{3}YZ = \frac{2b}{3}.$$

Donc

$$r^2 = \eta\eta_1 = \frac{b}{2} \times \frac{2b}{3} = \frac{b^2}{3}, \quad r = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Le Calcul intégral fournirait le même résultat ; car, en considérant une bande $\alpha\beta\alpha'\beta'$ de hauteur dy, distante de y de la ligne YY', son moment d'inertie sera ay^2dy, et le moment d'inertie du rectangle sera

$$\int_0^b ay^2 dy = \frac{ab^3}{3}.$$

Donc le carré du rayon de gyration, égal au moment d'inertie divisé par la surface ab du rectangle, sera

$$\frac{b^2}{3}.$$

Ayant le rayon de gyration de l'aire d'un rectangle relativement

à l'un de ses côtés, on en déduit immédiatement celui qui est relatif à une parallèle YY′ (*fig.* 103, *Pl. XXII*) à ce côté, passant par le centre du rectangle. Ce dernier sera donné (§ 242) par la formule

$$r^2 = \frac{b^2}{3} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{12},$$

d'où

$$r = \frac{b}{\sqrt{12}}.$$

De même, le rayon de gyration relatif à un axe $Z_1 Z'_1$, perpendiculaire au précédent et passant par le centre du rectangle, serait

$$r = \frac{a}{\sqrt{12}}.$$

Ces résultats se déduiraient aussi facilement du Calcul intégral.

Il est évident que les axes de symétrie du rectangle sont les axes principaux d'inertie (§ 251). Donc l'ellipse centrale du rectangle a ses axes dirigés suivant $Y_1 Y'_1$ et $Z_1 Z'_1$, et les grandeurs de ses demi-axes sont $\frac{a}{\sqrt{12}}$ et $\frac{b}{\sqrt{12}}$; son équation sera donc

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = \frac{a^2 b^2}{12}.$$

§ 255.

TRIANGLE. — Pour avoir le rayon de gyration d'un triangle ABC (*fig.* 104, *Pl. XXII*) relativement à l'un de ses côtés, à BC par exemple, nous remarquerons que la distance η du centre de gravité du triangle au côté BC est

$$\eta = \frac{h}{3},$$

en appelant h la longueur de la perpendiculaire AP abaissée, du sommet A, sur le côté BC. Élevons en A une normale au plan du triangle et prenons sur cette normale une longueur AA′ égale à AP. Le centre de gravité du tétraèdre ayant pour sommets B, C, A et A′ (148) est au milieu O de la ligne IJ qui joint les milieux des arêtes opposées BC et AA′. La projection de O sur le plan du triangle sera, par suite, au milieu de la médiane AI. Donc

$$\eta_1 = \frac{h}{2},$$

et, par suite, le rayon de gyration r sera

$$r = \sqrt{\eta\eta_1} = \sqrt{\frac{h}{3} \times \frac{h}{2}} = \frac{h}{\sqrt{6}};$$

c'est ce que le Calcul intégral indiquerait aussi. Soit, en effet, BC $= b$ la longueur du côté BC. Considérons la bande $\alpha\beta\,\alpha'\beta'$ de hauteur dy, à la distance y de la ligne BC. On aura

$$\alpha\beta = \frac{b}{h}(h - y).$$

Donc le moment d'inertie de la bande $\alpha\beta\,\alpha'\beta'$ est

$$\alpha\beta \times dy \times y^2 = \frac{b}{h}(h - y)y^2 dy,$$

et le moment d'inertie du triangle

$$\int_0^h \frac{b}{h}(h - y)y^2 = \frac{b}{h}\left(\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)_0^h = \frac{bh^3}{12}.$$

Le rayon de gyration étant r, on aura donc

$$\frac{bh}{2} r^2 = \frac{bh^3}{12},$$

d'où

$$r = \frac{h}{\sqrt{6}}.$$

§ 256.

Sachant trouver le moment d'inertie d'un triangle relativement à un de ses côtés, on en déduit (*fig.* 105, *Pl. XXV*) son moment d'inertie relatif à un axe de direction quelconque Bu passant par un de ses sommets ; car ce moment d'inertie est, suivant les cas, la somme ou la différence des moments d'inertie des deux triangles BAD et BCD, relativement à l'axe Bu qui est un de leurs côtés.

Si l'on veut maintenant trouver le moment d'inertie d'un triangle ABC, relatif à un axe quelconque xx', on cherchera son moment relatif à un axe parallèle Bu, passant par un sommet B du triangle. On en déduira, par le théorème du § 242, le moment d'inertie relatif à un axe parallèle à Bu et passant par le centre de gravité G du triangle.

Enfin, de là et par le même théorème on déduira le moment d'inertie cherché.

§ 257.

Si l'on veut trouver l'ellipse centrale d'un triangle ABC, il suffit de remarquer qu'une médiane AI (*fig.* 106, *Pl. XXV*) étant une ligne diamétrale conjuguée au côté BC, qu'elle divise en deux parties égales, les lignes GA et GX, passant par le centre de gravité du triangle et dont la dernière est parallèle à BC, sont des diamètres conjugués de l'ellipse centrale (§ 251). Donc on n'aura qu'à chercher les moments d'inertie relatifs à ces deux lignes pour tracer l'ellipse centrale.

Le carré du rayon de gyration relatif à BC étant $\frac{h^2}{6}$, le carré du rayon de gyration relatif à une parallèle à BC menée par le centre de gravité du triangle sera (§ 242)

$$\frac{h^2}{6} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{h^2}{18}.$$

Le carré du rayon de gyration du triangle ABC, relatif à la médiane AI, est double du carré du rayon de gyration relatif à AI du triangle AIC. Ce dernier, en appelant k la longueur de la perpendiculaire abaissée de C sur la médiane, est $\frac{k^2}{6}$: le premier est donc $\frac{k^2}{3}$.

On a ainsi les éléments nécessaires au tracé de l'ellipse centrale.

Si le triangle est *isoscèle,* les lignes GA et GX étant perpendiculaires sont les axes de l'ellipse centrale. Si b est la base et h la hauteur du triangle, les carrés des deux rayons de gyration principaux seront

$$\frac{h^2}{18} \quad \text{et} \quad \frac{k^2}{3} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{3} = \frac{b^2}{12}.$$

Si le triangle est équilatéral, une médiane quelconque est axe principal, ce qui exige que l'ellipse centrale se réduise à un cercle. C'est ce qui a lieu aussi pour un polygone régulier quelconque, de même que pour un cercle ou un anneau circulaire.

§ 258.

ELLIPSE ET COURONNE ELLIPTIQUE. CERCLE ET ANNEAU CIRCULAIRE. — Soit (*fig.* 108, *Pl. XXV*) une ellipse dont le grand axe $AA' = 2a$ et le petit axe $BB' = 2b$. Prenons une zone $\alpha\beta\alpha'\beta'$, de hauteur dy, à la distance y de l'axe AA', et de longueur $\alpha\beta = 2x$. Son moment d'inertie relatif à l'axe AA' est

$$2xy^2\,dy,$$

et le moment d'inertie de l'aire de l'ellipse sera

$$2\int xy^2\,dy.$$

L'équation de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On satisfait à cette équation, quel que soit l'angle θ, en posant

$$x = a\cos\frac{\theta}{2}, \quad y = b\sin\frac{\theta}{2},$$

d'où

$$dy = \frac{1}{2}b\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta,$$

et l'expression du moment d'inertie devient

$$ab^3\int\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{ab^3}{4}\int\sin^2\theta\,d\theta.$$

L'intégrale doit être prise entre $+\pi$ et $-\pi$, puisque, pour $y = \pm b$, on a

$$\frac{\theta}{2} = \pm\frac{\varpi}{2}.$$

Or

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \quad \int\sin^2\theta\,d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}, \quad \int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \pi.$$

Donc le moment d'inertie relatif à l'axe AA' est

(a) $$\frac{\pi ab^3}{4},$$

et le rayon de gyration

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\pi a b^3}{\pi a b}} = \frac{1}{2} b.$$

On trouverait de même que le moment d'inertie relatif à l'axe BB' est

$$\frac{\pi a^3 b}{4},$$

et le rayon de gyration correspondant, $\frac{1}{2} a$.

Comme les axes principaux de l'ellipse donnée sont nécessairement les axes de l'ellipse centrale, cette ellipse sera semblable à la proposée et semblablement placée, et ses axes seront égaux aux demi-axes de la proposée.

Soit maintenant un anneau compris entre deux ellipses semblables et semblablement placées, dont l'une ait pour demi-axes a et b et l'autre ma et mb, m étant un nombre que nous supposons plus petit que l'unité.

Le moment d'inertie de l'anneau, relativement à l'axe $2a$, a pour expression

$$\frac{\pi a b^3}{4} - \frac{\pi m^4 a b^3}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi a b^3}{4}(1 - m^4).$$

L'aire de l'anneau étant

$$\pi a b (1 - m^2),$$

le rayon de gyration sera

$$\sqrt{\frac{b^2(1 - m^4)}{4(1 - m^2)}} = \frac{b}{2}\sqrt{1 + m^2}.$$

De même, le rayon de gyration relatif à l'axe $2b$ sera

$$\frac{a}{2}\sqrt{1 + m^2}.$$

Il résulte de là que l'ellipse centrale sera semblable aux ellipses données, semblablement placée, et ses axes principaux seront

$$\frac{a}{2}\sqrt{1 + m^2} \quad \text{et} \quad \frac{b}{2}\sqrt{1 + m^2}.$$

Remarque. — Le moment d'inertie d'un cercle de rayon R, relatif à un diamètre quelconque, sera, d'après l'expression (a) ci-

dessus, où l'on fait $a = b = R$,

$$\frac{\pi R^4}{4};$$

le rayon de gyration est $\frac{R}{2}$. L'ellipse centrale est un cercle de rayon moitié de celui du cercle donné.

L'ellipse centrale d'une couronne comprise entre deux circonférences concentriques de rayons R et mR est une circonférence de rayon.

$$\frac{R}{2}\sqrt{1 - m^2}.$$

CHAPITRE XXII.

ÉTUDE DES FORCES PARALLÈLES DONT LES POINTS D'APPLICATION SONT SITUÉS DANS UN PLAN ET DONT LES INTENSITÉS SONT PROPORTIONNELLES AUX DISTANCES DE LEURS POINTS D'APPLICATION A UNE DROITE DE CE PLAN. — NOYAU CENTRAL DES AIRES PLANES.

§ 259.

UTILITÉ DE LA CONSIDÉRATION DES FORCES QUI FONT L'OBJET DE CE CHAPITRE. — Parmi les forces parallèles agissant sur les points d'un plan, celles dont les intensités sont proportionnelles aux distances de leurs points d'application à une droite du plan se rencontrent fréquemment. Ainsi, quand un corps tourne autour d'un axe, les points situés dans un plan passant par l'axe subissent à chaque instant des forces d'inertie proportionnelles à leurs distances à l'axe.

Si l'on conçoit un plan traversant l'espace occupé par un liquide pesant en équilibre, les pressions aux divers points de ce plan sont proportionnelles à leurs distances à la trace du plan sur la surface libre du liquide.

Enfin les forces élastiques qui se développent dans les sections transversales des pièces que l'on étudie en Résistance des matériaux sont aussi, comme nous l'avons vu § (208), proportionnelles aux distances de leurs points d'application à une ligne fixe et cette considération nous a déjà amené à les étudier lorsqu'elles sont symétriques par rapport à une droite du plan contenant les points d'application. On va en faire ici une étude générale.

§ 260.

RECHERCHE GRAPHIQUE DU CENTRE DE CES FORCES PARALLÈLES — Soit un système de forces parallèles

$$(1) \qquad P_1 = k_1 u_1, \ P_2 = k_2 u_2, \ \ldots, \ P_n = k_n u_n,$$

où

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_i,\ \ldots,\ k_n$$

sont des constantes essentiellement positives, et

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_i,\ \ldots,\ u_n$$

les distances des points d'application

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_i,\ \ldots,\ A_n$$

des forces considérées à une droite ZZ′ (*fig.* 107, *Pl. XXV*).

Ces distances sont comptées positivement ou négativement suivant que les points d'application sont à droite ou à gauche de la ligne ZZ′. Cette ligne elle-même sera désignée sous le nom d'*axe neutre*.

Considérons un système de forces fictives égales aux constantes

$$(2) \qquad k_1,\ k_2,\ k_3\ \ldots\ k_n,$$

appliquées respectivement aux points d'application et suivant les lignes d'action des forces données (1) et toutes de même sens.

Soit O le centre des forces parallèles $k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_n$.

Traçons leur ellipse centrale; désignons par OY le diamètre de cette courbe, parallèle à l'axe neutre ZZ′, par OX son diamètre conjugué, par a et b les demi-longueurs de ces diamètres.

Abaissons BP perpendiculaire sur OA, et AQ perpendiculaire sur OY; BP sera (§ 233) le rayon de gyration des forces (2), relatif à l'axe OX, et AQ celui relatif à l'axe OY. Donc, si q_i et p_i sont les distances du point d'application A_i de la force k_i à ces axes, ces distances étant comptées positivement dans l'angle YOX, on aura

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} \overline{BP}^2 &= \frac{\Sigma k_i q_i^2}{\Sigma k_i}, \\ \overline{AQ}^2 &= \frac{\Sigma k_i p_i^2}{\Sigma k_i}. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons que, O étant le centre des forces parallèles (2), le théorème des moments donne

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma k_i q_i &= 0, \\ \Sigma k_i p_i &= 0. \end{aligned} \right.$$

Enfin, puisque OX et OY sont des diamètres conjugués de la

courbe centrale des forces (2), on a (§ 232, *Remarque*)

$$(c) \qquad \Sigma k_i p_i q_i = 0.$$

Ces relations établies, nous pouvons procéder à la recherche du centre G des forces parallèles données (1). Si q' et p' désignent les distances positives ou négatives de ce point aux axes OX et OY, le théorème des moments donnera

$$(f) \qquad \begin{cases} q'\Sigma P_i = \Sigma P_i q_i, \\ p'\Sigma P_i = \Sigma P_i p_i. \end{cases}$$

Or

$$\Sigma P_i q_i = \Sigma k_i u_i q_i;$$

d'ailleurs, si d est la distance entre les lignes OY et ZZ', cette distance étant, comme celles p_i, comptée positivement ou négativement suivant que l'axe neutre ZZ' est à droite ou à gauche de OY, on aura

$$u_i = p_i - d,$$

d'où

$$\Sigma P_i q_i = \Sigma k_i (p_i - d) q_i = \Sigma k_i p_i q_i - d\Sigma k_i q_i,$$

quantité nulle en vertu des relations (b) et (c). Donc $q' = 0$, et le centre G des forces parallèles données est sur le diamètre OX, conjugué de l'axe neutre ZZ' dans la conique centrale du système des forces fictives (2).

Maintenant

$$\Sigma P_i p_i = \Sigma k_i u_i p_i = \Sigma_i (p_i - d) p_i = \Sigma k_i p_i^2 - d\Sigma k_i p_i$$

ou, en vertu de (b),

$$\Sigma P_i p_i = \Sigma k_i p_i^2.$$

D'un autre côté,

$$\Sigma P_i = \Sigma k_i u_i = \Sigma k_i (p_i - d) = \Sigma k_i p_i - d\Sigma k_i = - d\Sigma k_i.$$

Donc la seconde des équations (f) donne

$$p' = \frac{\Sigma P_i p_i}{\Sigma P_i} = - \frac{\Sigma k_i p_i^2}{d\Sigma k_i},$$

ou, en vertu de (a),

$$p' = - \frac{\overline{AQ}^2}{d},$$

équation qui montre que p' et d sont de signes contraires, c'est-

à-dire que l'axe neutre ZZ′ et le centre G des forces parallèles (1) sont placés de part et d'autre du centre O des forces fictives (2).

En appelant θ l'angle aigu XOY′, on aura, en valeur absolue,

$$p' = \text{OG} \sin \theta,$$
$$\text{AQ} = \text{OA} \sin \theta,$$
$$d = \text{OI} \sin \theta,$$

d'où

$$\text{OG} \times \text{OI} = \overline{\text{OA}}^2, \tag{3}$$

ce qui permet de construire le centre des forces parallèles données.

Remarque. — La relation (3) montre que le point G, centre des forces parallèles données (1), et le pôle g de l'axe neutre ZZ′, relativement à la conique centrale des forces fictives (2), sont deux points symétriques par rapport au centre de ces forces fictives ou, si l'on veut, que le point cherché G est l'*antipôle* de l'axe neutre.

§ 261.

CAS DE FORCES EN NOMBRE ILLIMITÉ AGISSANT SUR DES POINTS SE SUCCÉDANT D'UNE MANIÈRE CONTINUE DANS UN PLAN. — Supposons maintenant que les forces données P_i, au lieu d'être en nombre fini, soient réparties d'une manière continue sur les différents points d'une portion de plan limitée par un contour quelconque MNM′N′: alors les coefficients k_i sont donnés pour tous les points intérieurs à ce contour. Rien n'empêche de supposer l'aire MNM′N′ matérialisée et de lui attribuer en chacun de ses points A_i une densité proportionnelle à la valeur qu'acquiert, en ce point, le coefficient k_i. Cette valeur sera celle que prendra une certaine fonction donnée

$$k = f(x, y)$$

des coordonnées des points du plan, pour les valeurs particulières x_i et y_i de ces coordonnées.

D'après cette considération, le point O sera le centre de gravité de l'aire MNM′N′; l'ellipse AB sera son ellipse centrale, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si, aux divers points d'une surface plane, matérielle, homogène ou non, on applique des forces parallèles, proportionnelles à une densité arbitrairement attribuée à la surface en ce point et à la distance positive ou négative de ce point à une droite fixe, le centre de ces forces parallèles est l'antipôle de cette droite relativement à l'ellipse centrale de la surface donnée.*

Remarque. — Si l'on veut appliquer ce théorème aux pressions que subit une aire plane plongée dans un liquide, il faut supposer à l'aire, en chaque point, une densité égale à celle du liquide; si on veut l'appliquer à une section transversale faite dans une des pièces que l'on étudie en Résistance des matériaux, il faut supposer, à chaque point de la surface, une densité égale au coefficient d'élasticité de la pièce en ce point, en sorte que, si celle-ci est homogène, la densité sera constante en tous les points de la section. On peut appliquer les mêmes considérations au pourtour d'une ligne plane fermée ou non.

§ 262.

NOYAU CENTRAL D'UNE AIRE PLANE. — Lorsque l'axe neutre d'une aire plane MNM′N′ est en dehors de l'aire, les distances u des divers points de l'aire à cet axe sont toutes de même signe; et, comme la densité k est une quantité essentiellement positive, on voit que les forces parallèles égales à ku qui agissent sur les divers points de l'aire seront toutes de même signe, c'est-a-dire qu'elles seront toutes dirigées dans le même sens. Si, au contraire, l'axe neutre coupe le contour MNM′N′, alors les distances u, à l'axe neutre, des points situés de part et d'autre de cet axe sont de signes contraires, et les forces appliquées en ces points sont aussi de sens opposés. Lorsqu'il s'agit de forces élastiques par exemple, si celles situées d'un côté de l'axe sont des tensions, celles situées du côté opposé sont des compressions, tandis que toutes sont de même nature (tensions ou compressions) si l'axe neutre est extérieur au contour de l'aire donnée. Il y a donc un grand intérêt à distinguer les cas où l'axe neutre coupe ou non le contour MNM′N′. La démarcation entre ces deux cas a lieu naturellement pour les

positions de l'axe neutre tangentes au contour. Ainsi supposons que, l'axe neutre étant en ZZ', le centre des forces parallèles agissant sur l'aire donnée soit en G. Si ZZ' se déplace parallèlement à lui-même de façon à se rapprocher de la courbe MNM'N', le point G parcourra le diamètre XX', et s'éloignera du point O, comme l'indique la formule (3). Quand ZZ sera arrivé à être tangent à MNM'N', le point G aura pris une certaine position G_2; si ZZ' continue à se rapprocher jusqu'à se confondre avec OY, le point G s'éloignera indéfiniment. S'il dépasse OY de façon à arriver en $Z_1 Z'_1$, le point G reviendra à une distance finie, mais il ne sera plus du côté OX' de l'axe XX'. Si l'axe neutre vient à se confondre avec la tangente $Z_4 Z'_4$ à la courbe, le point G occupera, par exemple, le point G_4; puis, à mesure que l'axe s'éloignera, le point se rapprochera de O jusqu'à venir se confondre avec lui.

On voit par là que, tant que l'axe est en dehors de la courbe MNM'N', le point G est compris entre les positions G_2 et G_4 qui sont les points symétriques des pôles des tangentes $Z_2 Z'_2$ et $Z_4 Z'_4$ à la courbe MNM'N' relativement à l'ellipse centrale.

Ce que nous venons de dire pour la direction particulière ZZ', on peut le répéter pour toute autre direction; on obtiendra ainsi une courbe telle que $G_2 G_4 \alpha\beta$, jouissant de cette propriété que, tant que la résultante des forces parallèles agissant sur l'aire donnée tombe à l'intérieur de cette courbe, l'axe neutre est extérieur au périmètre de l'aire donnée et, par suite, toutes les forces agissant sur cette aire sont nécessairement de même sens; si au contraire la résultante de ces forces tombe en dehors de la courbe $G_2 G_4 \alpha\beta$, l'axe neutre coupe le contour de l'aire donnée, et les forces situées de part et d'autre de cet axe sont de sens contraires.

L'aire comprise dans le périmètre $G_2 G_4 \alpha\beta$ est ce qu'on nomme le *noyau central* de l'aire donnée. Tout point du périmètre $G_2 G_4 \alpha\beta$ étant l'antipôle d'une tangente au périmètre donné, on voit que le premier de ces périmètres est une courbe symétrique, par rapport au point O, de la polaire réciproque du second relativement à l'ellipse centrale de l'aire donnée.

§ 263.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR LA RECHERCHE GRAPHIQUE DU NOYAU CENTRAL D'UNE AIRE QUELCONQUE. — D'après ce qui précède, rien n'est plus facile que de construire le noyau central d'une aire donnée. On peut en construire graphiquement l'ellipse centrale O (*fig.* 107, *Pl. XXV*). Menons le rayon quelconque OC jusqu'à sa rencontre en C avec la tangente $K_0K'_0$ au périmètre de l'aire donnée, parallèle à la direction du diamètre de l'ellipse centrale conjuguée à OC; soit c le point où le rayon OC coupe l'ellipse centrale; si l'on construit la longueur

$$OK = \frac{\overline{Oc}^2}{OC},$$

on aura un point K du périmètre du noyau central. On peut l'obtenir encore en construisant la corde tt' qui sous-tend les tangentes à l'ellipse centrale issues de C, et prenant le point K symétrique par rapport à O de celui k où cette corde coupe le rayon CO.

§ 264.

APPLICATION AUX AIRES LIMITÉES PAR DES POLYGONES FERMÉS. — Si le contour de l'aire donnée est un polygone de m côtés, le contour du noyau central sera un polygone d'un pareil nombre de côtés, formé par les droites symétriques des polaires des sommets du premier polygone relativement à l'ellipse centrale.

Parallélogramme. — Ainsi, soit donné (*fig.* 110, *Pl. XXV*) un parallélogramme ABCD. Les lignes médianes EE′ et FF′ sont (§ 239) deux diamètres conjugués de son ellipse centrale. On sait trouver (§ 233) les longueurs Oe, Oe', Of, Of' de ces diamètres. Il suffit pour cela de chercher les moments d'inertie du parallélogramme relativement à chacune des lignes EE′ et FF′.

Ayant ces diamètres, on trouve les points ε et φ du noyau central par les formules

$$O\varepsilon \times OE' = \overline{Oe}^2 \text{ (1)},$$
$$O\varphi \times OF' = \overline{Of}^2.$$

---

(1) Pour avoir ε, décrivez une demi-circonférence sur OE comme diamètre;

Prenant ensuite $O\varepsilon = O\varepsilon'$ et $O\varphi = O\varphi'$, le parallélogramme $\varepsilon\varepsilon'\varphi\varphi$ est le périmètre du noyau central cherché.

Triangle. — Soit un triangle ABC (*fig.* 109, *Pl. XXV*). Menons la médiane AA′ et, par le centre de gravité O du triangle, conduisons une parallèle XX′ à la base BC. Les lignes AA′ et XX′ sont deux diamètres conjugués de l'ellipse centrale (§ 151). Connaissant les moments d'inertie relatifs à AA′ et XX′, on peut trouver (§ 245) les longueurs des diamètres conjugués dirigés suivant ces deux lignes et tracer l'ellipse centrale. Soient Oa, Ob, Oc les demi-diamètres de cette ellipse dirigés suivant les médianes OA, OB, OC. On construira les longueurs

$$O\alpha = \frac{\overline{Oa}^2}{OA'},$$

$$O\beta = \frac{\overline{Ob}^2}{OB'},$$

$$O\gamma = \frac{\overline{Oc}^2}{OC'}.$$

Le triangle $\alpha\beta\gamma$ est le contour du noyau central du triangle ABC.

§ 265.

Ellipse et cercle. — Nous avons vu que l'ellipse centrale d'une ellipse est une autre ellipse semblable et dont le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$ (§ 246). Soient OM un rayon de l'ellipse donnée (*fig.* 111, *Pl. XXV*), Om le même rayon de l'ellipse centrale On aura

$$Om = \frac{OM}{2}.$$

Soit μ' le point de ce rayon appartenant au contour du noyau central : on aura

$$O\mu' = \frac{\overline{Om}^2}{OM} = \frac{OM}{4};$$

---

de O comme centre, décrivez l'arc de cercle eK jusqu'à sa rencontre en K avec les demi-circonférences OE; enfin de K abaissez une perpendiculaire sur Oe. Le pied de cette perpendiculaire est le point cherché.

donc le noyau central d'une ellipse est une autre ellipse semblable et semblablement placée, le rapport de similitude étant $\frac{1}{4}$.

D'après cela, le noyau central d'un cercle est un autre cercle dont le rayon est égal au quart du rayon du premier.

Anneau elliptique ou circulaire. — Un anneau formé de deux ellipses semblables et semblablement placées, dont les demi-axes sont a et b pour l'une et ma et mb pour l'autre, admet (§ **246**) pour ellipse centrale une ellipse semblable aux deux précédentes et semblablement placée et dont les demi-axes sont

$$\tfrac{1}{2} a \sqrt{1+m^2} \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2} b \sqrt{1+m^2},$$

et pour courbe limitant le noyau central une troisième ellipse semblable aux précédentes et semblablement placée et ayant pour axes

$$\frac{\frac{1}{4} a^2 (1+m^2)}{a} = \frac{a(1+m^2)}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{1}{4} b^2 (1+m^2)}{b} = \frac{b(1+m^2)}{4}.$$

Un anneau compris entre deux circonférences concentriques de rayons R et mR admet un noyau central limité par une circonférence de rayon

$$\frac{R}{4}(1+m^2).$$



QUATRIÈME SECTION.

COMPOSITION DES FORCES DANS L'ESPACE ET FIGURES RÉCIPROQUES QUI EN DÉCOULENT.

CHAPITRE XXII.

COMPOSITION DES FORCES DANS L'ESPACE.

§ 266.

LES FORCES DE L'ESPACE N'ADMETTENT PAS EN GÉNÉRAL DE POLYGONES FUNICULAIRES. — La notion du polygone funiculaire, si utile dans la composition des forces situées dans un plan, n'a pas son analogue dans l'espace.

Étant donné un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans un plan, on peut toujours trouver une infinité de polygones tels, que les forces données, si on les suppose appliquées aux divers sommets de l'un de ces polygones, le maintiennent en équilibre, si l'on en rend les deux extrémités fixes.

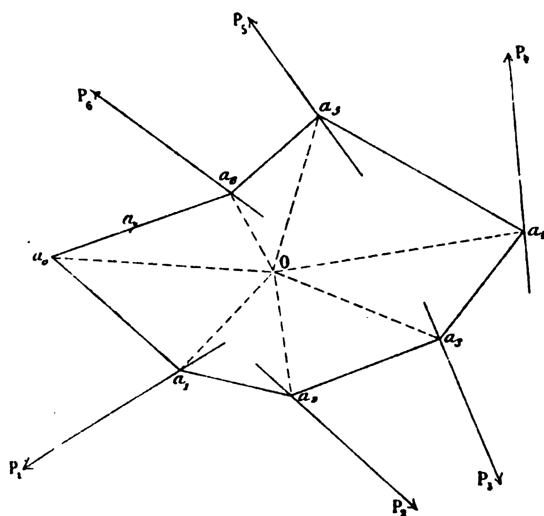
De tels polygones n'existent pas, en général, à l'égard de forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace En effet, s'il en existe un, chacun de ses sommets doit être en équilibre sous l'action de la force qui y est appliquée et des tensions des deux côtés adjacents. Il faut pour cela, d'après la règle du triangle des forces, que la ligne d'action de chaque force et les deux côtés du polygone qui concourent sur cette ligne soient dans un même plan. Si cette condition est remplie, on pourra décomposer chaque force en deux suivant les deux côtés qui y concourent, ce qui remplacera le système des forces données par un système de forces équivalentes, toutes dirigées suivant les côtés du polygone funiculaire. Suivant chacun des côtés intermédiaires du polygone, seront dirigées deux forces qui devront être égales et opposées pour que le polygone demeure en équilibre lorsqu'on en fixe les deux extrémités.

Ainsi il faut : 1° que chaque force soit située dans le plan des deux côtés du polygone qui lui sont adjacents; 2° que les deux composantes des forces données, dirigées suivant chacun des côtés intermédiaires du polygone, soient égales et opposées.

Quand toutes les forces données sont situées dans un même plan, la première de ces conditions se trouve remplie d'elle-même et l'on peut alors d'une infinité de manières satisfaire à la seconde; mais, dans l'espace, la nécessité de satisfaire à la première suffit pour déterminer un polygone dès qu'un seul de ses côtés est donné, et alors la seconde ne peut pas, en général, être remplie. Ainsi soient (*fig.* 58) les forces données

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots.$$

Fig. 58.



Proposons-nous de déterminer, s'il se peut, un polygone funiculaire dont a_0a_1 soit un des côtés. Si, par les deux lignes a_0a_1 et P_1, on fait passer un plan qui coupe P_2 en a_2, la ligne a_1a_2 sera nécessairement le deuxième côté du polygone cherché; si, par cette ligne et par P_2, on fait passer un plan qui coupe P_3 en a_3, la ligne a_2a_3 sera le troisième côté du polygone cherché, et ainsi de suite. Si maintenant on décompose chacune des forces données en deux, suivant les deux côtés qui y concourent, il n'y aura aucune raison

pour que la composante de P_1 suivant le côté $a_1 a_2$ soit égale et opposée à celle de P_2 suivant ce même côté, pour que la composante de P_2 suivant le côté $a_2 a_3$ soit égale et opposée à celle de P_3 suivant le même côté, et ainsi de suite.

On voit donc qu'en général un système de forces, dans l'espace, n'admet pas de polygones funiculaires.

§ 267.

POLYÈDRE FUNICULAIRE DE RANKINE, SA COMPLICATION. — Rankine a considéré, à l'égard des forces de l'espace, ce qu'il a appelé des *polyèdres funiculaires*. Le polyèdre funiculaire de Rankine est fondé sur ce théorème facile à établir : *Des forces concourantes, normales aux faces d'un polyèdre fermé et proportionnelles aux aires de ces faces, forment un système en équilibre* (¹). Mais la conception de Rankine, qui conduit à représenter les forces par des aires et à considérer dans l'espace des figures formées d'une suite de *cellules polyédrales* accolées comme les cellules d'une ruche, n'a pas eu jusqu'ici d'applications : nous ne nous y arrêterons donc pas (²).

§ 268.

PYRAMIDE FUNICULAIRE. — Voici une autre extension du polygone funiculaire qui nous semble plus conforme à la nature des choses. Sans y attacher plus d'importance qu'il ne convient, tant du moins qu'on n'en aura pas déduit des conséquences graphiques faciles, nous l'exposerons en quelques mots, d'autant qu'elle nous fournira une démonstration simple du théorème fondamental de la composition des forces dans l'espace.

Nous ferons d'abord ces deux remarques évidentes.

Remarque I. — Une force peut toujours être décomposée en

(¹) M. Chasles a démontré ce théorème dès 1829 dans le *Bulletin* de M. le baron de Férussac.

(²) La plus simple de ces figures serait composée des cinq tétraèdres ayant pour arêtes les dix lignes joignant cinq points de l'espace. Ce serait l'analogue de la figure plane, formée par les six lignes joignant quatre points d'un plan.

deux autres, dont l'une passe par un point donné O, et dont l'autre rencontre une droite donnée D.

Car, si C est la trace de la droite donnée sur le plan passant par O et par la ligne d'action F de la force donnée, et qu'on prenne, sur cette dernière ligne, un point quelconque a, on pourra toujours décomposer la force donnée suivant les lignes aO et aC, puisque ces lignes et la ligne F sont dans un même plan.

Remarque II. — On peut toujours décomposer une force F en trois autres : l'une donnée arbitrairement en grandeur, direction et sens; la deuxième passant par un point donné, la troisième rencontrant une droite donnée.

Car, prenant un point a sur la ligne d'action de la force F, on peut d'abord décomposer cette force en deux autres, dont l'une passe par a et soit égale en grandeur, direction et sens à une force donnée; la seconde composante sera alors entièrement déterminée, d'après la règle du parallélogramme des forces. Cette seconde composante pourra, à son tour, d'après la Remarque ci-dessus, être décomposée en deux, l'une passant par un point donné, l'autre rencontrant une droite donnée. La force F sera ainsi décomposée en trois, suivant les conditions indiquées.

Cela étant, soit un système de forces

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots,\ P_i.$$

Ces forces sont représentées sur la *fig.* 58 du § 254, où $i = 6$.

Prenons sur la ligne d'action de la force P_1 un point quelconque a_1, et décomposons cette force en trois autres : l'une suivant une ligne $a_1 a_0$, arbitraire en grandeur, direction et sens, la deuxième a_1O passant par un point quelconque O de l'espace, la troisième $a_1 a_2$ rencontrant la ligne d'action de la force P_2. Soit a_2 ce point de rencontre; décomposons P_2 en trois : l'une suivant $a_2 a_1$ égale et opposée à la composante de P_1 dirigée suivant cette ligne, la deuxième passant par O, la troisième rencontrant la ligne d'action de la force P_3. Soit a_3 ce point de rencontre; décomposons P_3 en trois : l'une suivant $a_3 a_2$ égale et opposée à la composante de P_2, dirigée suivant cette ligne, la deuxième passant par O, la troisième rencontrant la ligne d'action de la force P_4.

On continuera ainsi jusqu'à la dernière force P_i qu'on décom-

posera en trois : l'une suivant $a_i a_{i-1}$, égale et opposée à la composante de P_{i-1}, dirigée suivant cette ligne; la seconde passant par le point O, la troisième rencontrant *la ligne arbitrairement donnée* $a_1 a_0$.

Nous avons donc remplacé le système des forces données par un système de forces équivalentes, les unes passant par le point O, les autres dirigées suivant les côtés du polygone $a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_i$. Les premières étant concourantes se composent en une seule; celles qui sont dirigées suivant les côtés intermédiaires du polygone sont supprimables comme étant deux à deux égales et opposées; celles qui sont dirigées suivant les deux côtés extrêmes du polygone se composent en une seule, puisque ces côtés se rencontrent. Le système des forces données se trouve donc réduit à deux forces, dont l'une passe par le point arbitraire O. Ainsi, nous arrivons à ce théorème fondamental de la Statique :

THÉORÈME. — *Des forces distribuées d'une manière quelconque, dans l'espace, peuvent être réduites à deux, dont l'une passe par un point arbitraire.*

Si nous considérons la pyramide ayant pour sommet le point O, pour base le polygone $a_0 a_1 a_2 a_3, \ldots, a_i$ et qu'on fixe : 1° un point de chacun des côtés extrêmes de ce polygone; 2° le sommet O, la pyramide sera évidemment en équilibre sous l'action des forces données, puisque les forces passant par O et celles dirigées suivant les deux côtés extrêmes du polygone sont détruites par la fixité des trois points O, a_0, a_i et que les autres forces dirigées suivant les côtés intermédiaires du polygone peuvent être supprimées. Cette pyramide a donc la plus grande analogie avec le polygone funiculaire, et on pourrait l'appeler la *pyramide funiculaire* relative au point O.

Si le système des forces données est en équilibre, alors les deux forces auxquelles on le réduit doivent être égales et opposées, ce qui exige que la résultante des forces passant par le point O et des deux forces dirigées suivant les côtés extrêmes du polygone funiculaire soient dans un même plan; en d'autres termes, la pyramide funiculaire sera, dans ce cas, fermée.

Si le point O passe à l'infini suivant une direction quelconque,

la pyramide devient un prisme et la section du prisme par un plan quelconque (P) est un polygone funiculaire, à savoir : un des polygones funiculaires du système des forces données, projetées sur le plan (P), suivant une direction parallèle à l'arête du prisme.

Nous ne nous arrêterons pas davantage à ces considérations et à ces analogies de la pyramide funiculaire avec le polygone funiculaire, et nous passons de suite à l'étude des conséquences que l'on peut déduire de la réduction d'un système de forces à deux.

§ 269.

DÉFINITIONS. — Soit un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace. Concevons qu'on les transporte toutes en un même point. Les forces ainsi transportées auront une résultante unique qu'on appelle la *résultante de translation* des forces données, de sorte que la résultante de translation et la somme géométrique d'un système de forces sont une seule et même chose.

Lemme. — Quelle que soit la manière dont on réduit un système de forces à deux, la résultante de translation de ces deux forces est la même que celle des forces données.

En effet, pour réduire un système de forces à deux, on ne fait que composer des forces entre elles et les décomposer suivant la règle du parallélogramme des forces. Si l'on fait, sur les forces transportées, exactement les mêmes compositions ou décompositions que sur les forces prises dans les positions qu'elles occupent réellement, on réduira ces dernières à deux et les premières à deux autres qui leur sont égales et parallèles, et dont la résultante représentera indifféremment la résultante de translation des forces données ou celle des forces auxquelles on les a réduites.

THÉORÈME. — *Les deux résultantes, quelles qu'elles soient, d'un système de forces, se projettent sur un plan perpendiculaire à la résultante de translation de ces forces, suivant deux lignes égales, parallèles et de sens opposés, c'est-à-dire suivant deux lignes formant un couple.*

En effet, soient R et $\mathfrak{R}$ les deux résultantes auxquelles on a réduit un système de forces.

Si l'on transporte ces deux forces parallèlement à elles-mêmes en un point de l'espace et qu'on les compose suivant la règle du parallélogramme des forces, on obtiendra la résultante de translation des forces données. Or, si l'on projette les forces ainsi transportées sur un plan perpendiculaire à leur résultante, leurs projections seront évidemment deux forces égales et directement opposées. Donc, avant leur transport, ces forces se projetaient suivant deux forces égales, parallèles et de sens opposés formant un couple.

§ 270.

Théorème. — *Lorsqu'un système de forces n'est réductible ni à une force unique, ni à un couple, on peut toujours le réduire à deux forces, dont l'une ait pour ligne d'action une droite arbitrairement donnée dans l'espace, pourvu que cette droite ne soit pas parallèle à la résultante de translation des forces données; la ligne d'action de la seconde force est alors entièrement déterminée.*

En effet, soit D une droite arbitrairement donnée: Prenons sur D un point quelconque O (*fig.* 59, p. 436). On peut toujours (§ 268) réduire un système de forces à deux, R et $\mathfrak{R}$, dont l'une R passe par le point O. Observons d'ailleurs que ces deux résultantes ne sauraient être dans un même plan, autrement elles seraient réductibles à une force unique ou formeraient un couple, ce qui est contraire à notre hypothèse.

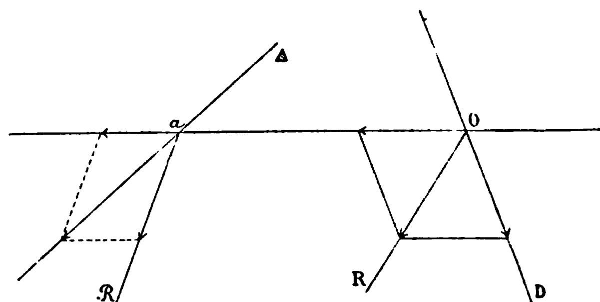
Ceci posé, si R coïncide avec la droite donnée D, la proposition est établie; dans le cas contraire, par R et D faisons passer un plan; si ce plan rencontre $\mathfrak{R}$, soit a le point de rencontre. On pourra décomposer R en deux : l'une suivant D, l'autre suivant Oa, puis composer cette dernière force avec $\mathfrak{R}$: soit Δ la ligne d'action de la résultante; les forces R et $\mathfrak{R}$ sont ainsi remplacées par deux autres, dont l'une a pour ligne d'action la droite donnée D; et l'on voit que la ligne d'action Δ de la seconde est entièrement déterminée.

Si $\mathfrak{R}$ est parallèle au plan passant par R et D, on mènera, par

le point O une parallèle à $\mathcal{R}$. Cette parallèle ne saurait coïncider avec R, puisque $\mathcal{R}$ et R ne sont pas dans un même plan. Donc, on pourra décomposer R suivant D et cette parallèle ; on composera ensuite cette dernière composante avec $\mathcal{R}$, ce qui est toujours possible lorsque, comme nous le supposons, la droite donnée D n'est pas parallèle à la direction de la résultante de translation des forces données. Car alors les deux forces à composer ne sauraient former un couple, leur somme géométrique ajoutée à la force D devant être égale, en grandeur, direction et sens, à la résultante de translation des forces données.

Remarque I. — A toute droite D de l'espace correspond ainsi, relativement à un système de forces données, une autre droite Δ et une seule, pourvu que les forces données ne soient réductibles ni à une force unique, ni à un couple et que la droite donnée D

Fig. 59.



ne soit pas parallèle à la résultante de translation des forces données, conditions que nous supposerons remplies dans ce qui va suivre ; et il est clair alors que, réciproquement, à la droite Δ correspond celle D. Ces deux droites *réciproques* sont dites *conjuguées* ou *correspondantes* relativement au système des forces données. Ainsi, deux droites correspondantes relativement à un système de forces sont deux droites telles que le système de forces soit réductible à deux forces dirigées suivant ces deux droites.

Remarque II. — Deux droites conjuguées, relativement à un système de forces, se projettent sur un plan perpendiculaire à la

résultante de translation de ces forces, suivant deux droites parallèles (§ 269).

§ 271.

Théorème. — *A deux droites concourantes correspondent deux autres droites concourantes dont le plan passe par le point de concours des premières.*

En effet, à la droite 𝒜 (*fig.* 59) répond, par définition, la droite R; à celle Δ répond (§ 270) celle D. Ainsi, aux deux droites 𝒜 et Δ qui concourent en *a* correspondent les droites R et D qui concourent en O; et le plan de R et D passe bien par le point *a*.

Inversement, aux droites R et D concourant en O, correspondent les droites concourantes 𝒜 et Δ, dont le plan passe par O.

Corollaire I. — A un polygone gauche correspond un autre polygone gauche; si le premier polygone est fermé, le second l'est également.

Corollaire II. — A toutes les droites concourant en un point de l'espace correspondent les droites d'un plan passant par ce point. Réciproquement, à toutes les droites d'un plan correspondent toutes les droites concourant en un point de ce plan.

§ 272.

Définitions. — Le point où concourent toutes les droites conjuguées à celles qu'on peut tracer dans un plan est ce que nous appellerons le *foyer* de ce plan.

Inversement, le plan qui contient toutes les droites conjuguées à celles qui se croisent en un point de l'espace est ce que nous nommerons le *plan focal* de ce point.

Ainsi, relativement à un système de forces données, tout plan traversant l'espace renferme un foyer, et, inversement, parmi tous les plans se croisant en un point de l'espace, il en existe un, et un seul, qui est le plan focal de ce point.

§ 273.

Théorème. — *Le lieu des foyers d'un faisceau de plans, c'est-à-dire de plans passant par une droite, est une autre droite, à savoir : la conjuguée de la première.*

En effet, le foyer d'un plan est (§ 272) la trace, sur ce plan, de la droite conjuguée à une droite quelconque D située dans ce plan : donc le lieu des foyers de tous les plans passant par D est la droite Δ conjuguée de D.

Corollaire. — En particulier, le lieu des foyers d'un faisceau de plans parallèles est une droite.

CHAPITRE XXIII.

POLYÈDRES RÉCIPROQUES.

§ 274.

THÉORÈME. — *Étant donné un polyèdre, on peut toujours trouver un second polyèdre tel que les sommets de chacun de ces deux polyèdres soient, relativement à un système de forces données, les foyers des faces de l'autre, et qu'en outre les arêtes des deux polyèdres soient conjuguées : ces deux polyèdres sont dits réciproques.*

En effet, soit (P) un polyèdre : menons les plans focaux de ses différents sommets. Ces plans, par leurs intersections mutuelles, déterminent un second polyèdre (P′). Je dis d'abord que les arêtes de ce second polyèdre sont conjuguées de celles du premier; car, si (A) est une arête du polyèdre donné, dont a et b sont les extrémités, les plans focaux de a et b seront, par construction, deux faces du second polyèdre, et l'intersection de ces plans sera une arête de ce second polyèdre. Or, d'après le théorème du § 273, cette arête est conjuguée de celle (A).

Maintenant, les arêtes des deux polyèdres étant conjuguées, les arêtes conjuguées aux côtés d'une face plane du polyèdre donnée concourent en l'un des sommets du nouveau polyèdre, en sorte que ces sommets sont bien les foyers des faces du polyèdre donné.

Remarque I. — Si m, n, p représentent le nombre des arêtes, le nombre des sommets et le nombre des faces planes du polyèdre donné, on a, d'après un théorème d'Euler,

$$n + p - m = 2.$$

Si m', n', p' sont les nombres analogues pour le second polyèdre, on a

$$m' = n, \quad n' = m, \quad p' = p;$$

d'où, comme cela doit être,

$$n' + p' - m' = n + p - m = 2,$$

Remarque II. — Deux polyèdres réciproques sont inscrits et circonscrits l'un à l'autre.

§ 275.

Théorème. — *Les projections de deux polyèdres réciproques, relativement à un système de forces, sur un plan perpendiculaire à sa résultante de translation, sont des figures planes réciproques* (1).

Car ces projections ont (§ 269) leurs côtés correspondants parallèles; d'ailleurs à tout système d'arêtes concourantes de l'un des polyèdres réciproques correspond, dans l'autre, un polygone plan fermé; donc à tout nœud de l'une des figures projetées correspond, dans l'autre, un polygone fermé.

Corollaire. — *Toute figure plane susceptible d'être regardée comme la projection d'un polyèdre admet une figure réciproque.*

Cette manière d'envisager les figures réciproques de la Statique graphique est due à M. Cremona. Elle conduit facilement aux principales propriétés de ces figures.

Ainsi, considérons une pyramide ayant pour base un polygone plan fermé. Son polyèdre réciproque sera une seconde pyramide ayant pour base le polygone fermé, réciproque des arêtes émanant du sommet S de la pyramide donnée, et pour sommet le foyer de la base de cette pyramide.

Si l'on projette ces deux pyramides, on aura deux figures réciproques (*fig.* 15 et 15, *Pl. III*), formées chacune d'un polygone fermé et de rayons partant des sommets de ces polygones. Si les

(1) Quand, dans ce qui va suivre, nous parlerons de projections de figures réciproques, il sera entendu que la projection aura toujours lieu sur un plan perpendiculaire à la résultante de translation du système de forces relativement auquel les figures sont réciproques.

pyramides se réduisent à des tétraèdres, on aura la figure formée par les six lignes qui joignent quatre points d'un plan et sa réciproque (*fig.* 13 et 13, *Pl. III*).

§ 276.

Considérons une pyramide ayant son sommet en O et pour base un polygone fermé *gauche*. Sa projection sera un polygone fermé et des rayons issus d'un point O (*fig.* 22, *Pl. VI*). Cherchons la réciproque de cette pyramide.

La réciproque des arêtes émanées du point O sera un polygone plan fermé P situé dans le plan focal de O. Les réciproques des côtés du polygone gauche formeront (§ 271) un autre polygone gauche dont les côtés passeront par les sommets du polygone P; car, si A et A′ sont deux arêtes consécutives issues de O, le côté du polygone gauche situé dans le plan de ces deux arêtes aura pour conjuguée une droite passant par l'intersection des conjuguées de A et de A′ : donc la réciproque sera formée d'un polygone plan et de lignes passant par les sommets de ce polygone. Si nous la projetons, le polygone plan fermé P se projettera suivant un polygone fermé P′ et les côtés du polygone gauche se projetteront suivant des lignes partant des sommets de P′. Les côtés de P′ seront d'ailleurs parallèles aux rayons issus de O, et les autres lignes seront parallèles au polygone fermé de la figure. On voit donc que la réciproque se projettera suivant un système de forces et le polygone funiculaire de ces forces relativement au pôle O (*fig.* 22, *Pl. VI*).

§ 277.

Considérons maintenant un polygone gauche fermé dont les sommets soient unis à deux points O et O′ de l'espace. Les figures réciproques des arêtes émanées de O et O′ sont deux polygones plans P et P′ situés dans les plans focaux des points O et O′ et les réciproques des côtés du polygone gauche sont les droites qui joignent les sommets correspondants de P et P′ : donc, en projetant les deux polyèdres, on aura, d'une part, un polygone fermé et les rayons issus de deux points O et O′, et d'autre part un système de lignes et leurs polygones funiculaires relatifs aux pôles O et O′. On

voit d'ailleurs de suite que les points d'intersection des côtés correspondants de deux polygones funiculaires doivent être tous placés sur une droite parallèle à OO'; car, dans l'espace, les côtés correspondants des polygones P et P' se coupent tous sur la ligne d'intersection des plans de ces polygones, laquelle ligne est conjuguée de celle OO' (*fig.* 16 et 16, *Pl. IV*). Nous retrouvons ainsi une des propriétés des polygones funiculaires.

§ 278.

Considérons enfin une portion quelconque de surface polyédrique, une sorte de calotte polyédrique dont le bord soit un polygone gauche fermé P. Joignons les sommets de ce polygone à un point O de l'espace. Cherchons la réciproque de la figure ainsi formée.

La réciproque du polygone gauche P est un autre polygone gauche fermé 𝔓 (§ 271); les réciproques des lignes issues de O et aboutissant aux divers sommets de P forment un polygone plan Π dont les sommets sont sur les côtés de 𝔓, en sorte que la réciproque de cette première partie de la figure se compose du polygone plan Π des divers sommets duquel partent les lignes formant les côtés d'un polygone gauche 𝔓.

Maintenant toute arête L de la surface polyédrique aboutissant en un sommet du bord P admettra pour réciproque une ligne 𝔏, partant d'un des sommets de 𝔓. On aura donc une série de lignes 𝔏, partant des sommets de 𝔓; de ces lignes 𝔏 partiront de nouvelles lignes, réciproques de celles qui, dans la figure proposée, rencontrent les lignes L, et ainsi de suite. Si l'on projette la figure donnée et sa réciproque, la première se projettera suivant une figure comme celle 64 (*Pl. XIII*), où O est la projection du point O de l'espace et où la projection P' du bord P de la surface polyédrique donnée est indiquée par des lignes doubles.

La figure réciproque se projettera suivant une figure comme celle 64 (*Pl. XIII*). La projection Π' du polygone plan Π est indiquée en pointillé : ce sont les lignes réciproques de celles issues de O, dans la *fig.* 64. Les lignes partant de Π' sont les projections des côtés du polygone 𝔓; elles sont réciproques de celles indiquées en doubles lignes sur la *fig.* 64: les autres lignes de la figure peu-

vent évidemment être considérées comme les lignes d'une ossature plane en charpente, et alors les lignes réciproques du polygone P′ peuvent être regardées comme les lignes d'action de forces agissant sur cette charpente et ayant pour grandeurs les côtés du polygone P′. Ces forces admettent donc le polygone pointillé Π′ pour polygone funiculaire relatif au pôle O; et, comme la figure formée par la charpente, les lignes d'action des forces qui la sollicitent et les côtés du polygone funiculaire admet une figure réciproque, les forces dont il s'agit maintiennent la charpente en équilibre et les lignes de la figure réciproque indiquent un mode de tension des barres de la charpente. Nous n'insisterons pas davantage sur cette nouvelle manière d'envisager les figures réciproques de la Statique graphique, après la théorie élémentaire que nous en avons donnée dans le cours de cet Ouvrage.

CHAPITRE XXIV.

MOMENTS RELATIFS A UN AXE DE FORCES DISTRIBUÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE.

§ 279.

Nous venons de faire la composition des forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace, comme nous avons fait précédemment celle des forces parallèles ou situées dans un plan, sans faire usage des moments. Cependant nous allons exposer ici brièvement la théorie des moments des forces relativement à un axe, comme nous avons exposé plus haut la théorie des moments relativement à un point ou relativement à un plan. De même que ces derniers, les moments relatifs à un axe se ramènent aux moments relativement à un point; par suite, leur construction graphique ne souffre aucune difficulté (§ 118).

On appelle *moment d'une force* relativement à une droite ou relativement à un axe le produit de la projection de la force sur un plan perpendiculaire à la droite par la plus courte distance entre la ligne d'action de la force et la droite.

Cette plus courte distance est dite le *bras de levier* de la force relativement à la droite.

On considère le moment d'une force relativement à une droite comme positif ou comme négatif, suivant que, pour un observateur placé suivant l'axe, la force tend à faire tourner son bras de levier dans un sens convenu, ou en sens contraire.

On voit, d'après cela, qu'on peut encore définir en grandeur et en signe le moment d'une force relativement à une droite, le moment de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à la droite, relativement au point d'intersection de ce plan et de la droite.

Remarque I. — Le moment d'une force relativement à une droite, comme le moment d'une force relativement à un point, est indépendant de la position qu'on attribue au point d'application de la force sur sa ligne d'action.

Remarque II. — Le moment d'une force relativement à une droite située dans un même plan avec la ligne d'action de cette force est nul ; et, réciproquement, si le moment d'une force relativement à une droite est nul, cette droite est nécessairement située dans un même plan avec la ligne d'action de la force.

§ 280.

Soit un système de forces concourantes ; projetons-les sur un plan perpendiculaire à une droite quelconque (L). Le moment de la résultante des forces projetées, relativement au point d'intersection de la droite (L) avec le plan de projection, est égal à la somme des moments relativement au même point, des forces projetées. Mais ces derniers moments ne sont autres que les moments des forces données relativement à la droite (L) ; et comme la projection, sur un plan de la résultante d'un système de forces concourantes n'est autre que la résultante des forces projetées, le moment de cette dernière relativement au point d'intersection de la droite (L) avec le plan de projection est aussi égal au moment de la résultante des forces données relativement à cette droite. Donc : *le moment, relativement à une droite, de la résultante d'un système de forces concourantes est égal à la somme des moments de ces forces relativement à cette droite.*

§ 281.

Dans la réduction (§ 268) à deux d'un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace, on ne fait que trois sortes d'opérations : 1° composer entre elles des forces concourantes, ou décomposer une force en deux autres qui concourent en un point de sa direction ; 2° déplacer les points d'application de certaines forces sur leurs lignes d'action. Aucune de ces deux opérations n'altérant, d'après ce qui précède, la somme des moments des forces primitives, on a ce théorème :

THÉORÈME. — *Quand on réduit à deux un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace, la somme des moments des deux résultantes relativement à un axe quelconque est égale à la somme des moments des forces primitives relativement à cet axe.*

§ 282.

Soit donné un plan quelconque ; traçons-y une droite quelconque D. Nous pouvons toujours, sous les réserves indiquées (§ 269), ramener un système de forces à deux, dont l'un ait la droite D pour ligne d'action. Soit Δ la ligne d'action de la seconde résultante ; le foyer F du plan donné est (§ 272) son intersection avec la ligne Δ. Or une droite quelconque, située dans ce plan et issue du point F, est située dans un même plan avec chacune des deux droites D et Δ ; donc (§ 279) le moment relativement à cette droite de chacune des deux résultantes dirigées suivant D et Δ est nul. Il en est, par suite, de même de la somme des moments des forces données relativement à la droite dont il s'agit : ainsi, étant donné un système de forces distribuées d'une manière quelconque dans l'espace et un plan quelconque, il existe, dans ce plan, une infinité de droites telles que la somme des moments des forces données relativement à chacune de ces droites soit nulle. Ces droites concourent toutes en un point F. Ce point est ce que nous avons appelé le *foyer* du plan relativement au système de forces données. Möbius l'appelait le *point nul* (*nul punct*) du plan, expression justifiée par la propriété que nous venons d'indiquer.

Réciproquement, étant donné un point F de l'espace, par ce point il passe une infinité de droites telles que la somme des moments d'un système de forces relativement à ces droites soit nulle. Ces droites sont toutes situées dans un plan que nous appelons le *plan focal* du point F relativement aux forces données.

C'est par ces propriétés des moments des forces que M. Cremona définit le foyer et le plan focal (qu'il nomme *pôle* et *plan polaire*). Nous avons vu qu'on peut établir leurs propriétés sans faire usage des moments. On pourrait aussi les définir géométriquement en dehors de toute considération mécanique ; car les droites D et Δ sont celles dont Chasles et M. Mannheim ont tiré un si grand parti dans l'étude géométrique du mouvement des systèmes invariables. Nous ne pouvons, à cet égard, que renvoyer aux Mémoires de M. Mannheim et à son Traité de Géométrie cinématique, ainsi qu'aux travaux nombreux publiés par et depuis Plücker sur les complexes linéaires.

§ 283.

CONDITIONS D'ÉQUILIBRE ET D'ÉQUIVALENCE EXPRIMÉES A L'AIDE DES MOMENTS. — Pour que des forces soient en équilibre, il faut et il suffit que les deux résultantes auxquelles on peut les réduire soient égales, dirigées suivant la même ligne et de sens opposés, ce qui exige que les sommes des projections de ces deux forces sur trois axes rectangulaires arbitrairement choisis et les sommes de leurs moments relativement à ces axes soient nulles, et, comme les sommes des projections et des moments des deux résultantes sont les mêmes que celles des forces qui les fournissent, on a :

Théorème I. — *Pour que des forces quelconques appliquées à un solide invariable soient en équilibre, il faut et il suffit que les sommes de leurs projections sur trois axes rectangulaires arbitrairement choisis soient nulles, ainsi que les sommes de leurs moments relativement à ces axes.*

De là et des principes relatifs à l'équivalence (§ 21) résulte immédiatement :

Théorème II. — *Pour que deux systèmes de forces appliquées à un solide invariable soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient mêmes sommes de projections sur trois axes rectangulaires arbitrairement choisis et mêmes sommes de moments relativement à ces axes.*

Remarque. — Si les conditions du Théorème I pour un système de forces ou celles du Théorème II, pour deux systèmes de forces, sont remplies à l'égard d'un système d'axes de coordonnées, elles le sont à l'égard de tous les axes de l'espace.

§ 284.

COMPOSITION DES COUPLES ET DES FORCES EN GÉNÉRAL. — Convenons de représenter le moment d'une force par rapport à un axe par une longueur portée sur cet axe dans un sens tel qu'un observateur placé suivant cet axe, la tête du côté duquel on a porté la longueur

représentative du moment, voie la force tourner son bras de levier dans un sens convenu, par exemple de gauche à droite.

D'autre part, on comptera positivement sur chaque axe les moments portés sur cet axe dans un sens convenu et négativement ceux qui sont portés en sens contraire.

La somme algébrique des moments d'un système quelconque de forces relativement à un axe est ainsi elle-même représentée par une longueur définie en grandeur et sens portée sur cet axe.

La somme des moments des deux forces d'un couple relativement à un axe se nomme le *moment du couple* relativement à cet axe.

Le moment d'un couple relativement à un axe perpendiculaire à son plan est égal à la somme des moments des deux forces du couple relativement au point où l'axe perce le plan. Il est donc constant (§ 115), quelle que soit la position de l'axe et égal au produit de la force du couple par son bras de levier.

La longueur qui le représente se nomme l'*axe du couple*. Ainsi, l'axe d'un couple est une droite perpendiculaire au plan du couple, égale, à une échelle convenue, au produit de la force du couple par son bras de levier ou, si l'on veut, à l'aire du parallélogramme défini par les deux forces du couple et dirigé dans un sens tel que, si on le place, par exemple, au milieu du bras de levier, un observateur placé suivant sa direction, les pieds sur le plan du couple, voie celui-ci entraîner son bras de levier, dans le sens des moments positifs, soit de gauche à droite suivant nos conventions habituelles.

On observera d'ailleurs que l'axe d'un couple est une droite définie en grandeur, direction et sens, mais non en position. On peut le placer dans une position quelconque.

De la définition même des moments d'une force relativement à un axe et de ce qui précède, résulte le théorème suivant :

Théorème III. — *Le moment d'un couple relativement à un axe quelconque est égal, en grandeur, direction et sens, à la projection sur cet axe de l'axe du couple.*

Théorème IV. — *Pour que deux systèmes de couples soient équivalents, il faut et il suffit que leurs axes aient mêmes sommes géométriques.*

En effet, deux systèmes de couples sont deux systèmes de forces auxquels nous pouvons appliquer les conditions générales d'équivalence fournies par le Théorème II; mais deux systèmes de couples, quels qu'ils soient, ont des sommes de projections nulles et, par suite, égales, sur n'importe quels axes. Donc, pour que deux systèmes de couples soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient mêmes sommes de moments relativement à trois axes; ou, en vertu du théorème III, que les sommes des projections de leurs axes sur trois axes rectangulaires soient les mêmes, ce qui exige que leurs axes, dans l'espace, aient mêmes sommes géométriques.

Ainsi, pour vérifier si deux systèmes de couples sont équivalents, on portera bout à bout les axes de chacun d'eux, on formera ainsi deux polygones; l'équivalence a lieu si les droites qui ferment ces deux polygones ont même grandeur, même direction et même sens, ou encore, on porte les axes de chaque système à partir d'un même point de l'espace; on les compose comme si c'étaient des forces, et les résultantes obtenues doivent être les mêmes pour les deux systèmes de couples.

Corollaire I. — *Pour que deux couples soient équivalents, il faut et il suffit que leurs axes soient égaux, parallèles et de même sens : il faut donc et il suffit que les couples soient placés dans des plans parallèles, qu'ils tendent à faire tourner leurs bras de levier dans le même sens et que leurs moments* (produits de la force par le bras de levier) *soient égaux.*

Corollaire II. — *Un couple est,* d'après ce qui précède, *entièrement défini par son axe, et toutes les modifications qui ne changent pas son axe peuvent être faites sans que le couple cesse d'être équivalent à lui-même.* Ainsi :

Corollaire III. — *On peut déplacer un couple d'une manière quelconque dans son plan ou dans un plan parallèle, modifier en même temps arbitrairement sa force, pourvu qu'on modifie le bras de levier de façon que le produit de la force par le bras de levier reste invariable.*

Corollaire IV. — *Tout système de couples est réductible à un*

couple unique ayant pour axe la somme géométrique des axes des couples composants.

COROLLAIRE V. — *On peut décomposer un couple en plusieurs autres ; il suffit pour cela de décomposer son axe en plusieurs autres lignes dont il soit la somme géométrique.*

En particulier, un couple peut être remplacé par trois couples dont les plans coïncident avec trois plans coordonnés donnés, et ayant pour axes les projections de l'axe du couple donné sur les axes de coordonnées. Par suite, un système quelconque de couples peut être remplacé par trois couples dont les axes sont dirigés suivant trois axes de coordonnées rectangulaires ou obliques.

THÉORÈME V. — *Tout système de forces est réductible à une force unique* S *égale à leur résultante de translation en un point* O *arbitrairement choisi de l'espace et à un couple unique qui prend le nom de* couple résultant *de la translation.*

En effet, chaque force peut être (§ 116) transportée au point O pourvu qu'on lui adjoigne le couple dû à cette translation. Toutes les forces ainsi transportées se composent en une seule égale à leur somme géométrique, et tous les couples en un seul, ayant pour axe la somme géométrique des axes des couples composants.

COROLLAIRE I. — 1° *La projection de la force unique* S *sur un axe quelconque* Ox *issu du point* O *est égale à la somme des projections des forces données sur cet axe ;* 2° *la projection de l'axe* Γ *du couple résultant sur un tel axe est égale à la somme des moments, relativement à cet axe, des forces données.*

La partie 1° est évidente ; la partie 2° résulte des conditions d'équivalence même. La force S et le couple d'axe Γ formant un système de forces équivalent au système des forces données, la somme de leurs moments, relativement à un axe Ox, est égale à la somme des moments des forces données relativement à cet axe. Mais le moment de la force S par rapport à l'axe Ox est nul, puisque cette force rencontre l'axe, et la somme des moments des deux forces du couple relativement à l'axe Ox est la projection, sur cet axe, de l'axe Γ du couple.

COROLLAIRE II. — *Considérons trois axes de coordonnées; soient*

$$A,\ B,\ C$$

les sommes des projections d'un système de forces quelconques sur ces axes, et

$$L,\ M,\ N$$

les sommes des moments de ces forces relativement à ces mêmes axes.

Les forces données sont équivalentes à trois forces A, B, C *et à trois couples ayant pour axes les longueurs* L, M, N.

Car, si l'on réduit les forces données à une force unique S passant par l'origine des coordonnées et à un couple correspondant d'axe Γ, la force S pourra être décomposée en trois forces dirigées suivant les axes de coordonnées et le couple en trois couples ayant leurs axes dirigés suivant ces mêmes lignes. Mais, en vertu du corollaire I, les composantes de S sont précisément A, B, C et celles de Γ sont précisément L, M, N.



NOTES.

NOTE I.

DÉTERMINATION DES DIMENSIONS DES PIÈCES D'UNE CONSTRUCTION D'APRÈS LA MÉTHODE FONDÉE SUR LES EXPÉRIENCES DE WÖHLER.

1. WEYRAUCH, *Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisen- und Stahl-Constructionen.* — 2. WINCKLER, *Wahl der zulässigen Inanspruchnahme der Eisenconstructionen.* — 3. KARL VON OTT, *Vorträge über Bau-Mechanik.* — SÉJOURNÉ, *Méthode suivie pour calculer les sections des pièces dans les ponts de la ligne d'Ax à Tarascon.*

§ 1.

LOI DE WÖHLER. — Jusque dans ces dernières années, on déterminait les dimensions des diverses parties d'une construction par la condition qu'en aucun point la force élastique (tension ou pression *par unité de surface*) ne dépassât une certaine fraction $\frac{1}{n}$ de celle qui produirait la rupture de la matière et qu'on nommait la *charge ou le module de rupture.*

Nous la nommerons, dans ce qui va suivre, le *module de la rupture immédiate* et nous la désignerons par la lettre ρ. Ainsi, en prenant le millimètre carré pour unité de surface, le module ρ de la rupture immédiate relatif au fer serait la charge qu'il faudrait appliquer à un fil de fer d'un millimètre carré de section, suspendu par une de ses extrémités, pour le rompre.

Le coefficient $\frac{1}{n}$, qui était généralement voisin de $\frac{1}{6}$, se nommait le *coefficient de sécurité,* et la fraction $\frac{\rho}{n}$ de la charge de rupture, qu'on ne dépassait pas, se nommait la *charge de sécurité.*

Cette manière de déterminer la charge de sécurité est aujourd'hui proscrite à peu près partout, notamment en Allemagne, en Angleterre, en Autriche, en Suède, etc.

En France, les jeunes ingénieurs l'abandonnent à leur tour, ainsi que l'auteur a pu s'en assurer.

Son tort est de procéder comme s'il n'existait qu'une façon de rompre la matière : celle qui consisterait à lui appliquer une charge égale ou supérieure à celle dite de rupture. Or un corps qui se brise à la première fois qu'on lui applique une telle charge se brise aussi sous l'effort de charges notablement moindres, pourvu qu'elles se répètent un nombre suffisant de fois. Nous en faisons l'épreuve journellement quand nous voulons briser un objet avec la main; quoique nous ne soyons pas en mesure de développer une force musculaire égale à celle qui serait nécessaire pour en opérer la rupture du premier coup, nous arrivons à nos fins en nous y prenant à plusieurs fois.

Et l'on doit ajouter cette remarque importante : si nous nous apercevons que l'effort maximum que nous pouvons développer, même répété, ne produit pas l'effet voulu lorsqu'il est toujours exercé dans le même sens, nous avons soin de l'alterner, de sorte qu'un bâton que nous tenons par ses deux bouts et que nous ne parvenons pas à briser lorsque nous le fléchissons toujours dans le même sens, instinctivement nous le fléchissons alternativement dans un sens et en sens opposé, parce que nous avons le sentiment que nous acquérons par là un moyen plus puissant d'arriver au but.

On peut donc énoncer cette loi établie par quelques expériences faites en 1860 et 1861 par Fairbairn en Angleterre, mais surtout par celles poursuivies en Allemagne, avec autant de persévérance que de succès, de 1859 à 1870, par Wöhler, puis par Spangenberg.

LOI DE WÖHLER. — *La matière se brise non seulement lorsqu'elle est soumise une seule fois à des forces élastiques (tensions ou pressions par unité de surface) supérieures à celle dite de rupture et que nous appellerons le module de la rupture immédiate, mais encore:*

1° *Lorsqu'elle est soumise à des forces élastiques notablement*

moindres, toutes de même sens (tensions ou pressions), pourvu qu'elles se répètent un nombre suffisant de fois;

2° *Lorsqu'elle est soumise à des forces élastiques moindres encore que les précédentes à nombre égal de répétitions, pourvu qu'elles agissent de façon à y produire alternativement des tensions et des pressions.*

Il résulte de là que la méthode de calcul des dimensions des constructions anciennement en usage est rationnelle pour des ouvrages qui ont à supporter toujours la même charge, mais qu'elle est vicieuse pour ceux qui, comme les ponts, outre une charge permanente, sont appelés à recevoir des charges passagères fréquemment renouvelées, en vertu desquelles il se développe, en chaque point de l'ouvrage, des forces élastiques qui se reproduisent sans cesse et qui, par conséquent, peuvent, à la longue, produire la rupture, quoiqu'elles restent partout très inférieures à la charge dite de rupture ρ.

On voit de plus qu'il y a à cet égard à distinguer les points des ouvrages qui sont soumis constamment à des efforts de même sens et ceux qui sont tantôt tendus, tantôt comprimés, ces derniers étant exposés à périr sous l'influence de forces encore plus faibles que les premiers.

L'influence de la répétition des charges peut s'expliquer ainsi: considérons un fil de fer de 1^{mmq} de section suspendu à l'une de ses extrémités, tandis qu'à l'autre on peut attacher des poids. La rupture se produira sous une charge qui, suivant la nature du fer, pourra varier de 28^{kg} à 50^{kg} ou même 60^{kg}.

Supposons, pour fixer les idées, qu'elle se produise ici sous une charge de 32^{kg}, de sorte que le millimètre carré étant pris pour unité de surface et le kilogramme pour unité de poids, on aura, pour le module de la rupture immédiate du fer soumis à l'épreuve, $\rho = 32$.

Si l'on charge le fil d'un poids $R < \rho$, il ne se brisera pas; mais, si petite que soit la charge, il s'allongera. Si la charge est supprimée, il reprend sensiblement sa longueur première, pourvu qu'elle ait été suffisamment faible. Et, dans ce cas, on peut recommencer autant de fois qu'on le voudra la double opération qui consiste à placer et supprimer alternativement la charge; à la fin, la longueur du fil n'aura pas éprouvé de variation sensible.

Mais, si le poids R dépasse une certaine valeur, qui marque ce qu'on appelle d'ordinaire la *limite d'élasticité*, le fil chargé une première fois conservera, après l'enlèvement de la charge, un allongement permanent.

Si on la rétablit pour l'enlever une seconde fois, il s'allongera encore, de sorte qu'on conçoit que, après un nombre suffisant d'épreuves, la distance moléculaire se soit accrue assez pour qu'il y ait rupture du fil.

Sans attacher à cette explication plus d'importance qu'il ne convient [1], ce qui est certain, c'est que l'expérience prouve que pour chaque matière il existe une tension μ bien inférieure à celle de rupture immédiate et qui est telle que toute tension R comprise entre μ et ρ produit la rupture, pourvu qu'elle soit répétée un nombre suffisant de fois, nombre de fois d'autant plus grand que R est plus faible, c'est-à-dire se rapproche davantage de μ, tandis qu'une force élastique R égale ou inférieure à μ ne produit jamais la rupture, quel que soit le nombre des répétitions [2].

Cette tension μ, nous l'appellerons *le module d'élasticité relatif à des actions de même sens*. Ainsi, le module d'élasticité μ d'une matière pour des forces élastiques de même sens est une force élastique (par unité de surface) telle qu'une force un peu inférieure ne produit jamais la rupture, quel que soit le nombre de fois qu'elle agit, pourvu que ce soit toujours dans le même sens, tandis que toute force supérieure, en agissant un nombre suffisant de fois toujours dans le même sens (et, comme nous le verrons, à plus forte raison en agissant dans des sens alternés), la produirait.

Fairbairn a constaté les faits sur lesquels se fondent ces définitions en opérant sur une poutre en tôle de $6^m,00$ de portée. La tôle employée pouvait supporter, sans se rompre, une charge de plus de 30^{kg} par mm^2, de sorte qu'on a $\rho > 30$.

Or, sous un effort de $12^{kg},90$ seulement (par mm^2), elle se rompit après 5175 répétitions de la surcharge. Sous les efforts moindres

---

[1] Le coefficient d'élasticité du fer ainsi étiré ne paraît pas se modifier ainsi qu'il résulte des expériences de M. Tresca; mais il résiste de moins en moins au choc à mesure que sa structure s'est modifiée.

[2] Du moins, on n'a pas pu, quoiqu'on soit allé jusqu'à quarante-huit millions de répétitions, produire jusqu'ici cet effet.

qu'on a tentés, elle n'a, au contraire, pas pu être rompue. Ainsi, sous un effort de $9^{kg},14$, elle a résisté à 400 000 épreuves et, sous un effort de $7^{kg},03$, à 600 000.

On doit conclure que μ est compris entre $9^{kg},14$ et $12^{kg},90$.

Wöhler, opérant sur un essieu en fer, a obtenu les résultats suivants :

Valeur de la tension maxima par mm^2 due à la charge répétée.	Nombre de répétitions ayant amené la rupture.
kg 45	170,000
35	450,000
30	860,000
25	1,500,000
22	On n'a pas obtenu la rupture après 48 millions d'épreuves.

MODULE D'ÉLASTICITÉ POUR DES EFFORTS DE SENS OPPOSÉS. — Supposons maintenant qu'au lieu de charges et de décharges appliquées successivement au corps on le soumette à des forces élastiques alternativement *égales et de sens opposés en chacun de ses points*. Pour cela, concevons, par exemple, une poutre AB (*fig.* 60, p. 458) appuyée en ses deux extrémités et dont la fibre moyenne soit verticale. En son milieu C_0 attachons :

1° Un fil horizontal passant sur une poulie portant à son extrémité un plateau M pouvant recevoir des poids ;

2° Un autre fil symétrique du précédent est terminé par un plateau semblable M'.

Plaçons un poids P dans le plateau M ; la poutre fléchira et prendra la forme ACB ; puis enlevons ce poids et plaçons-le dans le plateau M' ; la poutre prendra la forme symétrique AC'B.

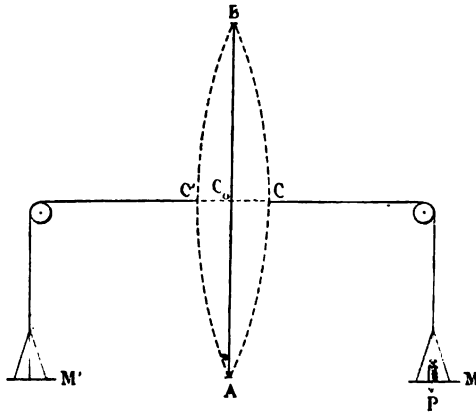
Reportons ensuite le poids dans le plateau de droite, puis dans celui de gauche, de façon à faire exécuter à la fibre moyenne de la poutre une série de flexions alternées ACB, AC'B.

Les forces élastiques maxima se produisent dans la section C_0 et les fibres extrêmes de cette section (fibres supposées à égale distance de la fibre moyenne) supporteront des actions égales et de sens opposés ; si une de ces fibres supporte une tension Rmax dans la

position ACB, elle supportera dans la position symétrique une *pression* R′ max exactement égale à cette tension, en sorte que R max = R′ max.

Si le poids P est suffisamment faible, l'expérience prouve qu'on pourra répéter les oscillations indéfiniment sans déterminer la rupture; mais, si l'on prend le poids P graduellement croissant, on arrivera à des valeurs pour lesquelles un nombre suffisant de répétitions déterminera la rupture.

Fig. 60.



Pour chaque valeur de P, il est aisé, par les formules que nous avons données (§ 208 et suivants), de calculer les tensions et pressions (de valeurs égales) déterminées dans les fibres extrêmes de la section C_0.

Si μ' est la valeur de cette tension pour une charge P′ telle qu'une charge plus faible ne produise pas la rupture, même répétée indéfiniment, tandis qu'une charge plus forte la produit après un nombre suffisant d'épreuves, cette force μ' joue dans l'expérience actuelle le même rôle que celle μ dans l'expérience où les forces agissaient toujours dans le même sens. Elle marque en quelque sorte *la limite d'élasticité de la matière lorsqu'elle est soumise à des efforts égaux et de sens alternés.* Nous l'appellerons le *module d'élasticité* relatif à de tels efforts.

L'expérience prouve qu'il est très inférieur à celui μ relatif aux efforts de même sens. Pour le fer, μ' est les 0,5 à 0,6 seulement de μ.

§ 2.

DÉFINITION DU MODULE DE SÉCURITÉ THÉORIQUE. — 1° Pour une pièce ne supportant qu'une charge permanente, nous appellerons *module de sécurité théorique* une force élastique telle que des tensions inférieures à cette force (si peu que ce soit) ne déterminent pas la rupture de la pièce, quelle que soit la durée de leur action, tandis qu'une tension légèrement supérieure la détermine immédiatement.

Ce module n'est donc autre que le module de la rupture immédiate ρ et la sécurité d'un ouvrage ne portant qu'une charge permanente est théoriquement assurée, si, en aucun de ses points, la tension n'est supérieure à ρ.

2° Si une pièce supporte des charges temporaires pouvant être indéfiniment répétées, avec ou sans charge permanente, il se produit en chacun de ses points des forces élastiques variables avec les surcharges. Nous appellerons f max et f min les valeurs absolues extrêmes de ces forces élastiques rapportées à l'unité de surface et exprimées avec les mêmes unités que les forces élastiques μ et ρ (ici, pour fixer les idées, en kilogrammes par millimètre carré) lorsqu'elles sont constamment de même sens.

Lorsqu'elles sont tantôt d'un sens, tantôt d'un autre (tantôt pressions, tantôt tensions) nous désignerons par f max le maximum en valeur absolue de la plus grande des deux espèces de forces, et par f' max le maximum en valeur absolue de l'autre. Ainsi, si la plus grande des deux espèces de forces élastiques par unité de surface qui peuvent se produire en un point est de 10^{kg}, que ce soit une tension ou une pression, et que la plus grande de l'autre espèce soit de 6^{kg}, on fera f max $= 10$, f' max $= 6$.

Nous appellerons *module de sécurité théorique* une force élastique telle que si f max lui est inférieure si peu que ce soit, les répétitions de la surcharge, quel qu'en soit le nombre, ne puissent pas déterminer la rupture, tandis que si f max lui est légèrement supérieure, un nombre suffisant de répétitions la déterminera.

§ 3.

EXPRESSION DE LAUNHARDT POUR LE MODULE DE SÉCURITÉ THÉORIQUE R_t DANS LE CAS D'EFFORTS DE SENS CONSTANTS. — Nous désignerons par R_t la force élastique qui représente ce module. Considérons d'abord le cas où, par suite de l'action des surcharges, les forces élastiques ne changent pas de sens au point que l'on considère.

Le module cherché R_t est fonction des forces élastiques extrêmes $f$max, $f$min qui peuvent se produire et de certains coefficients constants dépendant de la matière que l'on considère.

Cette fonction ne peut être établie qu'empiriquement.

A cet effet, observons que la force $f$min est nécessairement comprise entre zéro et $f$max. Dire que $f\text{min} = 0$, c'est dire que les tensions sont nulles chaque fois que la surcharge cesse d'agir. Alors le module R_t coïncide, par définition même, avec le module d'élasticité μ, tel qu'il a été défini au § 1.

Dire que $f\text{max} = f\text{min}$, c'est dire que la force élastique au point considéré reste toujours la même. C'est le cas d'une charge permanente sans surcharge. Alors R_t coïncide avec le module de rupture ρ d'après la définition 1° ci-dessus. Ainsi :

Pour $f\text{min} = 0$, on doit avoir $R_t = \mu$.

Pour $f\text{min} = f\text{max}$, on doit avoir $R_t = \rho$.

Dans le cas général où la force élastique f conservant son signe varie entre $f$min et $f$max, Launhardt a proposé de représenter le module de sécurité théorique R_t (qu'il appelle le module de résistance au travail, *arbeits-festigkeit*) par la formule empirique

$$R_t = \mu + (\rho - \mu)\frac{f\text{min}}{f\text{max}}. \tag{1}$$

On voit que, dans les deux cas extrêmes que nous venons de considérer, elle est exacte. Dans les cas intermédiaires, elle représente, avec une approximation très remarquable, les résultats des expériences faites par Wöhler sur une barre d'acier pour laquelle

$\rho = 80^{\text{kg}},41$ par mm^2 (module de rupture immédiate),
$\mu = 36^{\text{kg}},56$ par mm^2 (module d'élasticité).

On trouve pour diverses valeurs du rapport $\frac{f\text{min}}{f\text{max}}$:

Par les expériences de Wöhler.	36,56	51,17	58,48	65,79	80,41
Par la formule de Launhardt..	36,56	51,97	58,48	65,76	80,41

On voit, par la formule (1), que R_t est supérieur à μ, toutes les fois que $f\min > 0$; d'où cette conséquence extrêmement remarquable : *s'il y a une charge permanente, les forces élastiques développées par cette charge et des surcharges répétées peuvent dépasser le module d'élasticité sans qu'il en résulte de rupture, quel que soit le nombre des répétitions de la surcharge.*

§ 4.

EXPRESSION DE WEYRAUCH DU COEFFICIENT DE SÉCURITÉ THÉORIQUE POUR DES EFFORTS EXTRÊMES DE SENS OPPOSÉS. — Supposons à présent que les forces élastiques qui peuvent naître dans une section soient de sens opposés, c'est-à-dire puissent être tantôt des tensions, tantôt des pressions. Appelons, comme il a été dit plus haut, $f\max$ et $f'\max$ les valeurs maxima des deux espèces de forces, $f\max$ désignant la plus grande des deux, de sorte que, si la tension maxima qui se produit est supérieure à la pression maxima, $f\max$ désignera la première et $f'\max$ la seconde et inversement.

La force $f'\max$ est nécessairement comprise entre zéro et $f\max$.

Pour $f'\max = 0$, nous rentrons dans le cas examiné plus haut où $f\min = 0$. Ainsi, pour $f'\max = 0$, on doit avoir $R_t = \mu$.

D'autre part, dire que $f\max = f'\max$, c'est dire que la barre est soumise à des efforts de grandeur invariable et de sens alternés. En ce cas, on a par définition (§ 1) $R_t = \mu'$.

Dans les cas intermédiaires, Weyrauch a proposé, pour représenter R_t, la formule

$$R_t = \mu - (\mu - \mu')\frac{f'\max}{f\max}. \tag{2}$$

On voit que, si les modules μ et μ', c'est-à-dire les limites d'élasticité de la matière répondant le premier à des efforts toujours de même sens, le second à des efforts égaux et de sens alternés étaient les mêmes, R_t serait indépendant de $f\max$ et $f'\max$; mais c'est ce qui n'a pas lieu, comme le montre la simple expérience d'un bâton

qu'on cherche à rompre à la main (§ 1) et les expériences de Wöhler montrent, en effet, que μ' est voisin des 0,6 de μ et peut descendre jusqu'à $0,5\,\mu = \frac{\mu}{2}$.

§ 5.

MODULE OU CHARGE DE SÉCURITÉ PRATIQUE EN GÉNÉRAL. — Dans la pratique, on n'admet comme tension limite R qu'une fraction $\frac{1}{n}$ de la tension de sécurité théorique, soit

$$R = \frac{1}{n} R_t,$$

de sorte que :

1° Pour les pièces soumises à des efforts de même sens (tensions ou pressions),

$$(3) \qquad R = \frac{\mu}{n}\left[1 + \left(\frac{\rho}{\mu} - 1\right)\frac{f\min}{f\max}\right];$$

2° Pour les pièces soumises à des efforts extrêmes de sens contraires,

$$(4) \qquad R = \frac{\mu}{n}\left[1 - \left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right)\frac{f'\max}{f\max}\right].$$

En Allemagne, on prend le coefficient de sécurité $\frac{1}{n} = \frac{1}{3}$.

M. Knüt Styffe, directeur de l'École polytechnique de Stockholm a établi, par de nombreuses expériences, que le rapport $\frac{\rho}{\mu}$ du module de résistance à la rupture immédiate au module d'élasticité varie entre $\frac{1}{1,4}$ et $\frac{1}{1,8}$ et que, dans le cas le plus défavorable, il descend à $\frac{1}{2}$.

§ 6.

MODULE DE SÉCURITÉ PRATIQUE DU FER. — Le module ρ de la rupture immédiate par extension varie beaucoup avec les qualités du fer. Navier donne des chiffres compris entre 39,4 et 50,1.

Weyrauch, dans son Ouvrage cité plus haut, donne les résultats suivants :

Fers ronds et carrés (d'après Kirkaldy, de 37,8 à 43,3; moyenne 40,20.

Fers ronds (d'après Wöhler), de 37,3 à 45,3; moyenne 41,1.

Fers cornières, de 29 à 43; moyenne 38,50.

Pour des fils de fer, de 50 à 80, suivant le diamètre; moyenne 60.

Tôle (d'après Kirkaldy), de 32 à 38; moyenne 35,70.

D'autres auteurs trouvent de 23 à 37.

Si l'on admet comme résultat moyen des expériences de Wöhler $\rho = 40,20$, $\mu = 21,95$, $\frac{\rho}{\mu} = \frac{11}{6}$, on aura :

Pour des pièces travaillant toujours dans le même sens,

$$R_t = 21,95\left(1 + \frac{5}{6}\frac{f\min}{f\max}\right).$$

Mais, pour plus de sûreté, il convient de prendre les valeurs les plus défavorables de ρ et de μ, ce qui conduit à prendre $\rho = 32,9$, $\frac{\rho}{\mu} = \frac{3}{2}$; d'où

(5) $$R_t = 21\left(1 + \frac{1}{2}\frac{f\min}{f\max}\right),$$

et si l'on prend $\frac{1}{n} = \frac{1}{3}$, le module de sécurité pratique sera

(I) $$R = 7\left(1 + \frac{1}{2}\frac{f\min}{f\max}\right).$$

Pour des efforts de sens différents,

$$\mu = 21,9, \quad \mu' = 11,7,$$

on aurait

$$R_t = 21,9\left(1 - \frac{5}{11}\frac{f'\max}{f\max}\right)$$

ou, en nombres ronds,

(6) $$R_t = 21\left(1 - \frac{1}{2}\frac{f'\max}{f\max}\right)$$

et, pour le coefficient de sécurité pratique,

(II) $$R = 7\left(1 - \frac{1}{2}\frac{f'\max}{f\max}\right).$$

Si, dans les formules de Launhardt et de Weyrauch, on adopte

les données suivantes

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{3},\quad \rho=32^{kg},\quad \mu=\frac{\rho}{2}=16^{kg},\quad \mu'=0,6\,\mu=9^{kg},6,$$

on aura :

1° Pour les pièces soumises à des efforts toujours de même sens, tensions ou pressions ayant pour valeurs extrêmes f min et f max par millimètre carré,

$$\text{(I')}\qquad R=5^{kg},3\left(1+\frac{f\,\text{min}}{f\,\text{max}}\right);$$

2° Pour les pièces tantôt tendues, tantôt comprimées,

$$\text{(II')}\qquad R=5^{kg},3\left(1-\frac{2}{5}\frac{f'\,\text{max}}{f\,\text{max}}\right).$$

Ce sont les formules que M. Séjourné, Ingénieur des Ponts et Chaussées, a proposées pour les ouvrages d'art du projet de chemin de fer d'Ax à Tarascon.

En Suède, M. Almgvist, Professeur à l'École polytechnique de Stockholm, a calculé les ponts de la ligne de Gottembourg à Falun par les formules

$$\text{(I'')}\qquad R=6\left(1+\frac{f\,\text{min}}{f\,\text{max}}\right),$$

$$\text{(II'')}\qquad R=6\left(1-\frac{2}{5}\frac{f'\,\text{max}}{f\,\text{max}}\right),$$

qui sont celles ci-dessus, où le coefficient 5,3 est remplacé par celui 6, ce qui s'explique par les qualités supérieures des fers dont on dispose en Suède. Les formules de M. Almgvist ont d'ailleurs été déduites directement des expériences de Wöhler.

§ 7.

MODULE DE SÉCURITÉ PRATIQUE POUR L'ACIER. — Pour les tôles d'acier, le coefficient de rupture, par extension, est généralement supérieur à 50^{kg} par millimètre carré. M. Tresca l'a trouvé sur deux échantillons, de 54 et 57,6; Stevens, dans six épreuves de tôle d'acier et essieux, l'a trouvé de 52,4 à 60,90.

Pour les pièces d'acier, la résistance à la rupture varie de 50^{kg} à 80^{kg} et 90^{kg}.

Elle varie, pour le fer comme pour l'acier, beaucoup avec la proportion de carbone qu'il renferme.

Knüt Styffe estime que la valeur maxima de la résistance à la rupture, par extension, a lieu, pour le fer et l'acier puddlés, lorsqu'ils renferment 0,8 pour 100 de carbone et pour l'acier des essieux lorsqu'il en contient 1,2 pour 100.

Weyrauch, à qui nous empruntons ces indications, résume de belles expériences faites à ce sujet par Bauschinger, sur l'acier Bessemer, à l'aide de la formule

$$\rho = 43,50\,(1 + c^2),$$

c désignant la quantité pour 100 de carbone contenue dans l'acier.

Pour toutes les valeurs de c, les expériences ont donné

$$\rho > 37\,(1 + c^2).$$

En prenant $\rho = 37\,(1 + c^2)$, on aurait donc une certitude absolue.

Weyrauch propose pour le module de sécurité pratique relatif à l'acier les formules suivantes :

$$\text{(III)} \qquad R = 10\left(1 + \frac{3}{4}\frac{f\,\text{min}}{f\,\text{max}}\right)$$

lorsque les efforts ont lieu dans le même sens, et

$$\text{(IV)} \qquad R = 10\left(1 - \frac{1}{2}\frac{f'\,\text{max}}{f\,\text{max}}\right)$$

pour des efforts de sens variables.

Ces formules supposent le coefficient de sécurité

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{3}, \quad \rho = 52^{kg},5, \quad \mu = 30^{kg}, \quad \mu' = \frac{\mu}{2} = 15^{kg},$$

et répondraient à de l'acier renfermant 0,45 pour 100 de carbone (¹).

(¹) *Voir* une Note sur l'*emploi du fer et de l'acier dans les constructions*, par M. Considère, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées (*Annales des Ponts et Chaussées*, avril 1885).

§ 8.

MODULE DE SÉCURITÉ RELATIF AU CISAILLEMENT OU A LA TORSION. — Les expériences de Wöhler, comme celles plus anciennes de MM. Molinos et Pronier, d'accord avec les théories de Navier et Poisson, indiquent que, si l'on désigne par ρ_1, μ_1, μ'_1 le module de rupture immédiate par torsion ou cisaillement et les modules d'élasticité pour efforts de torsion ou de cisaillement, suivant qu'ils ont lieu ou non dans un sens constant, on peut admettre

$$\rho_1 = \tfrac{4}{5}\rho, \quad \mu_1 = \tfrac{4}{5}\mu, \quad \mu'_1 = \tfrac{4}{5}\mu'.$$

On aura donc les coefficients de sécurité théorique pour efforts de même sens ou de sens variables, en remplaçant dans les formules de Launhardt ou de Weyrauch les modules ρ, μ, μ' par ρ_1, μ_1, μ'_1, c'est-à-dire en les multipliant par $\frac{4}{5}$, ce qui donne :

1° Pour efforts de sens constant,

(V) $$R'_t = \tfrac{4}{5}\left[\mu + (\rho - \mu)\frac{f\,\text{min}}{f\,\text{max}}\right];$$

2° Pour efforts de sens variable,

(V') $$R'_t = \tfrac{4}{5}\left[\mu - (\mu - \mu')\frac{f'\,\text{max}}{f\,\text{max}}\right].$$

Soit, dans les deux cas,

(VI) $$R'_t = \tfrac{4}{5}\,R_t,$$

et, par suite, aussi pour le coefficient de sécurité pratique R' relatif à des efforts de torsion ou de cisaillement, les $\frac{4}{5}$ du coefficient R pour des efforts de traction ou de compression

(VI') $$R' = \tfrac{4}{5}R.$$

§ 9.

CALCUL DES DIMENSIONS DES PIÈCES. — *a*. Si une pièce est soumise uniquement à l'extension ou à la compression simple, on détermine, par les méthodes indiquées dans le cours de ce Volume et qui seront complétées dans la seconde Partie de cet Ouvrage, les valeurs extrêmes des tensions (ou pressions) qu'elle a à supporter

sous l'influence des diverses charges qu'elle est destinée à recevoir.

La plus grande et la plus petite de ces tensions (si elles sont de mêmes signes) seront désignées respectivement en valeur absolue par Fmax et Fmin et, si elles sont de signes variables, la plus grande de toutes, en valeur absolue, que ce soit une tension ou une pression, sera désignée par Fmax et la plus grande des forces de signe contraire à celle Fmax sera désignée en valeur absolue par F′max. Donc la section S de la pièce doit être calculée par la formule

$$\frac{F\max}{S} \leqq R,$$

et, en prenant le signe d'égalité,

$$S = \frac{F\max}{R},$$

où R sera remplacé par l'une ou l'autre des deux expressions données plus haut, suivant que les forces extrêmes qu'elle subit sont de même sens ou de sens opposés, de sorte que, dans le premier cas, on a

$$S = \frac{F\max}{\frac{\mu}{n}\left[1 + \left(\frac{\rho}{\mu} - 1\right)\frac{f\min}{f\max}\right]}.$$

Mais, dans une pièce soumise uniquement à l'extension ou à la compression simple, les forces élastiques sont uniformément réparties dans toute l'étendue de chaque section; donc les forces élastiques $f\min$, $f\max$ rapportées à l'unité de surface sont entre elles comme les forces totales; soit

$$\frac{f\min}{f\max} = \frac{F\min}{F\max}.$$

Donc

$$(A) \qquad S = \frac{F\max}{\frac{\mu}{n}\left[1 + \left(\frac{\rho}{\mu} - 1\right)\frac{F\min}{F\max}\right]} \quad \text{(Launhardt)},$$

où tout est connu dans le second membre.

On aurait de même, dans le cas d'efforts extrêmes de sens opposés,

$$(B) \qquad S = \frac{F\max}{\frac{\mu}{n}\left[1 - \left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right)\frac{F'\max}{F\max}\right]} \quad \text{(Weyrauch)},$$

et, s'il s'agit de pièces en fer et qu'on adopte les données numériques indiquées plus haut dans les formules I et II,

$$(A') \qquad S = \frac{F\max}{7\left[1 + \frac{1}{2}\frac{F\min}{F\max}\right]} \quad \text{(Launhardt)},$$

ou

$$(B') \qquad S = \frac{F\max}{7\left[1 - \frac{1}{2}\frac{F'\max}{F\max}\right]} \quad \text{(Weyrauch)}.$$

Si la pièce ne subit qu'une charge permanente, on emploiera la formule de Launhardt, en y faisant $F\max = F\min =$ à la force élastique due à la charge permanente.

Cela revient à admettre comme charge de sécurité une fraction $\frac{1}{n}$ de la charge de rupture immédiate ρ suivant l'ancienne méthode de calcul des dimensions. Mais, en admettant la formule numérique où $\frac{1}{n} = \frac{1}{3}$, on voit qu'on est ainsi conduit, dans le cas d'une charge permanente sans surcharge, à admettre des tensions allant jusqu'au $\frac{1}{3}$ de la charge de rupture et à faire travailler le fer à $10^{kg},67$ par millimètre carré.

b. Considérons à présent une pièce soumise à une flexion simple sans extension, ni compression de la fibre moyenne. Dans ce cas, les dimensions de la pièce varieront généralement d'une section à l'autre et devront être calculées pour chaque section, à moins qu'il ne s'agisse de petits ouvrages où l'on fait les calculs pour la section la plus défavorable et où l'on adopte pour toutes les sections les dimensions obtenues pour celle-là.

Considérons une section quelconque. Supposons d'abord que le moment de flexion qui s'y développe conserve le même signe quelles que soient les surcharges. Soient M max et M min ses valeurs extrêmes (en valeur absolue), I le moment d'inertie de la section, u la distance entre la fibre moyenne et la fibre qui en est la plus éloignée. On aura (§ 209)

$$f\max = \frac{M\max \times u}{I},$$

$$f\min = \frac{M\min \times u}{I},$$

d'où

$$\frac{f \max}{f \min} = \frac{\mathrm{M} \max}{\mathrm{M} \min}.$$

Ce que l'on veut, c'est que $f\max$ ne dépasse pas la charge de sécurité pratique R, c'est-à-dire que

$$f \max \leqq \mathrm{R}.$$

En prenant le signe d'égalité, on a (§ 5)

$$f \max = \frac{\mu}{n}\left[1 + \left(\frac{\rho}{\mu} - 1\right)\frac{f \min}{f \max}\right],$$

ou

$$(\mathrm{C}) \qquad \frac{\mathrm{M} \max \times u}{\mathrm{I}} = \frac{\mu}{n}\left[1 + \left(\frac{\rho}{\mu} - 1\right)\frac{\mathrm{M} \min}{\mathrm{M} \max}\right],$$

où tout est connu, sauf le rapport $\frac{\mathrm{I}}{u}$ que l'on peut ainsi déterminer. Pourvu qu'on choisisse les dimensions de la pièce (la forme de sa section, sa hauteur, etc., restent arbitraires), de façon que ce rapport ait la valeur trouvée ou une valeur supérieure, on sera certain de ne dépasser nulle part la charge de sécurité.

Supposons, en second lieu, que les moments de flexion dans la section considérée changent de signes, suivant la nature des surcharges. Soient M max et M′ max les valeurs absolues des grandeurs extrêmes (de signes contraires) qu'il atteint, M max désignant la plus grande des deux valeurs absolues. On aura

$$f \max = \frac{\mathrm{M} \max \times u}{\mathrm{I}}, \quad f' \max = \frac{\mathrm{M}' \max \times u}{\mathrm{I}},$$

d'où

$$\frac{f' \max}{f \max} = \frac{\mathrm{M}' \max}{\mathrm{M} \max},$$

et, par suite, la formule de Weyrauch donne pour calculer le rapport $\frac{\mathrm{I}}{u}$

$$(\mathrm{D}) \qquad \frac{\mathrm{M} \max \times u}{\mathrm{I}} = \frac{\mu}{n}\left[1 - \left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right)\frac{\mathrm{M}' \max}{\mathrm{M} \max}\right].$$

Les deux dernières formules donnent pour le fer, si l'on adopte les données numériques indiquées plus haut, dans le cas de mo-

ments extrêmes de mêmes signes,

$$(C') \qquad \frac{I}{u} = \frac{M\max}{7\left[1 + \frac{1}{2}\frac{M\min}{M\max}\right]},$$

et, dans le cas de moments de signes contraires,

$$(D') \qquad \frac{I}{u} = \frac{M\max}{7\left[1 - \frac{1}{2}\frac{M'\max}{M\max}\right]}.$$

c. Considérons enfin une pièce qui subisse à la fois une flexion et une tension ou compression le long de la fibre moyenne.

Nous avons vu que, dans ce cas, on commence généralement dans la pratique, par négliger la compression longitudinale et par déterminer les moments de flexion comme si la pièce était de section uniforme; les moments de flexion connus dans cette hypothèse, on en conclut les valeurs des moments d'inertie des diverses sections. Cette première détermination se fera par la méthode qui vient d'être indiquée. On connaîtra ainsi pour chaque section le rapport $\frac{I}{u}$. La section S elle-même reste indéterminée, ainsi que la distance u de la fibre moyenne à la fibre extrême.

On se les donnera ou, d'après la forme qu'on aura adoptée pour la section de la pièce, son aire S résultera d'ordinaire de la connaissance de son moment d'inertie, et la valeur de u résulte aussi de la forme des lignes d'intrados et d'extrados qu'on aura adoptées.

Généralement ces premières déterminations suffisent. Si l'on veut pousser les calculs plus loin et faire une seconde détermination de I, soit, sous l'influence d'une charge quelconque, M la valeur absolue du moment de flexion dans la section dont le moment d'inertie est I. Soient u et u' les distances de la fibre moyenne aux deux fibres extrêmes (ou les plus éloignées) placées de chaque côté d'elle. Ces deux fibres supporteraient, sous l'influence de la flexion seule, des forces élastiques de signes contraires représentées en valeur absolue par

$$\frac{Mu}{I} \quad \text{et} \quad \frac{Mu'}{I}.$$

Soient N la valeur absolue de la tension ou pression longitudinale dans la section que nous considérons et S l'aire de cette section.

Convenons de désigner par u la distance qui se rapporte à celle des deux fibres extrêmes qui subit, par suite de la flexion simple, un effort de même sens que l'effort longitudinal. Il en résulte que la force élastique totale rapportée à l'unité de surface de cette fibre est

$$(a) \qquad f = \frac{Mu}{I} + \frac{N}{S},$$

et celle de l'autre fibre extrême

$$(a') \qquad f = \frac{Mu'}{I} - \frac{N}{S}.$$

Le second terme de ces égalités regardé comme terme de correction est plus petit que le premier.

C'est donc la première de ces deux égalités qui donne la plus grande valeur de f.

Connaissant, à une première approximation, les valeurs variables d'une section à l'autre de $\frac{I}{u}$ et S, on a pu déterminer les valeurs correspondantes de M et N et, par suite, la valeur de f pour chaque charge. On peut donc savoir si les valeurs extrêmes de f sont de mêmes signes ou de signes contraires et trouver dans les deux cas les valeurs absolues extrêmes désignées, dans le premier cas, par $f$max et $f$min et, dans le second, par $f$max et f'max.

Désignons par $\overline{M}$ et $\overline{N}$ les valeurs de M et N répondant à la charge qui donne $f$max. On doit avoir

$$f\text{max} \leqq R \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{M}u}{I} + \frac{\overline{N}}{S} \leqq R$$

ou, en prenant le signe d'égalité :

1° Si les valeurs extrêmes trouvées pour f en utilisant les valeurs de première approximation de $\frac{I}{u}$ et S sont de mêmes signes,

$$\frac{\overline{M}u}{I} + \frac{\overline{N}}{S} = \frac{\mu}{n}\left[1 + \left(\frac{\rho}{\mu} - 1\right)\frac{f\text{min}}{f\text{max}}\right];$$

2° Si les valeurs extrêmes trouvées pour f sont de signes con-

traires,

$$\frac{\overline{M}u}{I} + \frac{\overline{N}}{S} = \frac{\mu}{n}\left[1 - \left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right)\frac{f'\max}{f\max}\right].$$

Dans les seconds membres, on mettra pour $f\max$ et $f\min$ ou pour $f\max$ et $f'\max$ les valeurs de f dont nous venons de parler, c'est-à-dire celles résultant des premières valeurs approchées de $\frac{I}{u}$ et S. Quant au terme $\frac{\overline{N}}{S}$, on pourra également y conserver pour S la valeur de première approximation trouvée, de sorte que $\frac{\overline{N}}{S}$ est connu et les deux dernières équations (l'une ou l'autre suivant le cas où l'on se trouvera) fourniront une nouvelle valeur approchée de $\frac{I}{u}$, d'où résultera, par les proportions mêmes qu'on aura admises pour la section, une nouvelle valeur de S.

On pourrait poursuivre ainsi l'approximation aussi loin qu'on le voudrait, mais on n'aura guère à le faire dans la pratique.

§ 10.

REMARQUE AU SUJET DES PIÈCES COMPRIMÉES. — Une barre de fer comprimée ne peut se rompre que par écrasement ou parce que, ne restant pas droite, elle fléchit.

Le phénomène extrêmement complexe de l'écrasement a été élucidé pour la première fois par les belles expériences de M. Tresca sur l'écoulement des corps solides. Comme l'écrasement, d'après les expériences et la théorie de M. Tresca, n'a lieu que par cisaillement ou glissement transversal, dans les cas où il est à craindre, il serait sans doute prudent de réduire le coefficient de sécurité pratique des pièces comprimées, aux $\frac{4}{5}$ de ce qu'il est pour l'extension, d'adopter en un mot le coefficient R' du paragraphe précédent, en place de celui de R, les coefficients numériques des formules restant pour chaque matière ce qu'elles sont pour l'extension.

Dans les cas où l'écrasement n'est pas à craindre, il n'y a à éviter que la flexion. En ce cas, Wöhler a observé que c'est toujours du côté des fibres tendues que la pièce se rompt. On commencera donc par calculer sa section en la regardant comme sim-

plement comprimée, à l'aide du coefficient de sécurité R par la règle *a* du paragraphe précédent.

Il faut ensuite examiner si elle n'est pas exposée à rompre par flexion.

On démontre dans la théorie de l'élasticité qu'une pièce droite AB, fixée à l'une de ses extrémités A (sans encastrement), dont l'autre extrémité B est assujettie à demeurer sur une direction fixe ABX et qui est soumise en B à une force de compression N dirigée suivant BA, ne peut pas fléchir, si

$$N < \frac{\varpi^2 EI}{l^2},$$

Fig. 61.



où $l =$ AB est la longueur de la pièce, E et I son coefficient d'élasticité et le moment d'inertie minimum de sa section transversale, c'est-à-dire celui relatif à un axe passant par son centre de gravité et coïncidant avec le grand axe de son ellipse d'inertie.

Si la pièce était encastrée à ses deux extrémités, il suffirait, pour qu'elle ne fléchît pas, que

$$N \leq 4\varpi^2 \frac{EI}{l^2}.$$

Quelles que soient les circonstances auxquelles la pièce est soumise, on conçoit que, pour qu'elle ne fléchisse pas, il faut que N

soit plus petit ou au plus égal à une certaine quantité qui doit dépendre de E, I et l; et de la nécessité que la formule soit homogène, c'est-à-dire indépendante du choix des unités de longueur, de temps et de force, on pourrait conclure aisément, suivant une méthode que M. J. Bertrand a appliquée avec succès à des questions souvent complexes de Mécanique ou de Physique mathématique, que cette fonction doit être de la forme $k\frac{EI}{l^2}$, k étant un coefficient purement numérique, c'est-à-dire indépendant du choix de toutes les unités. Nous écrirons donc, qu'il s'agisse de pièces encastrées, ou appuyées, ou *semi-encastrées,* c'est-à-dire reliées plus ou moins complètement à d'autres pièces d'une charpente,

$$(b) \qquad N \leqq k\frac{EI}{l^2},$$

comme condition de non-flexion, sachant que dans le cas de deux appuis simples, $k = \varpi^2$, dans le cas d'encastrement complet, $k = 4\varpi^2$ et, par suite, dans les cas intermédiaires, k devra aussi avoir des valeurs intermédiaires qu'il appartient au constructeur d'apprécier.

Ceci posé, la règle a du § 8 ne détermine que l'aire S à donner à la section de la pièce, laissant entièrement arbitraire sa forme et son moment d'inertie. La forme étant choisie d'après la nature de la construction, on calculera le moment d'inertie minimum I et l'on vérifiera si l'on a, pour toutes les charges N que la pièce peut être appelée à subir, $I > \frac{Nl^2}{kE}$.

Si cette condition n'était pas remplie, il faudrait augmenter certaines dimensions de la pièce.

Pour le fer, on peut prendre $E = 16 \times 10^9$, si le mètre est pris pour unité de longueur; si c'est le millimètre, on prendra $E = 16 \times 10^5$.

Il est facile de voir, d'ailleurs, comment E varie avec les unités adoptées. C'est ce que nous allons indiquer en démontrant l'inégalité (b).

On doit avoir

$$N \leq \psi(E, I, l),$$

ψ étant une fonction inconnue des trois quantités E, I, l.

L'inégalité doit, par sa nature même, être indépendante du choix

des trois unités de longueur, de temps et de force ; changeons donc ces unités en les prenant respectivement λ, l, φ plus grandes.

Il en résulte qu'une force, qui était d'abord représentée par la grandeur numérique F, le sera maintenant par $F' = \frac{F}{\varphi}$; de même, la longueur, qui était représentée par le nombre l des anciennes unités, le sera par $l' = \frac{l}{\lambda}$ des nouvelles.

Un moment d'inertie est une somme de termes dont chacun est le produit d'un élément de surface par le carré d'une longueur. Il est donc homogène à la quatrième puissance d'une longueur.

Donc le moment d'inertie, qui était d'abord représenté par I, le sera à présent par $I' = \frac{I}{\lambda^4}$.

Le coefficient d'élasticité est défini par l'équation

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{1}{E} \times \frac{t}{S},$$

qui donne l'allongement α d'une barre de longueur a et de section S sous l'action d'une tension ou force t, d'où

$$E = \frac{a}{\alpha} \times \frac{t}{S}.$$

$\frac{a}{\alpha}$, rapport de deux longueurs, est indépendant du choix des unités; S est comme le carré d'une longueur.

Donc E est de degré 1 en force et de degré — 2 en longueur. Si l'on change les unités, ce qui était E devient donc

$$E' = \frac{E\lambda^2}{\varphi}.$$

Ceci posé, l'inégalité cherchée doit être la même avec les nouvelles unités qu'avec les anciennes, c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$N' \leq \psi(E', I', l')$$

ou, en remplaçant les nouvelles valeurs en fonction des anciennes,

$$\frac{N}{\varphi} \leq \psi\left(\frac{E\lambda^2}{\varphi}, \frac{I}{\lambda^4}, \frac{l}{\lambda}\right) \quad \text{ou} \quad N \leq \varphi\psi\left(\frac{E\lambda^2}{\varphi}, \frac{I}{\lambda^4}, \frac{l}{\lambda}\right)$$

et cela quelles que soient les grandeurs φ et λ.

Il faut donc que ces deux quantités disparaissent de l'équation. Pour que φ disparaisse, il faut évidemment que E entre simplement comme facteur dans le second membre, c'est-à-dire que

$$\psi(\mathrm{E}, \mathrm{I}, l) = \mathrm{E}\psi_1(\mathrm{I}, l).$$

Alors l'inégalité devient

$$\mathrm{N} \leq \mathrm{E}\lambda^2\psi_1\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda^4}, \frac{l}{\lambda}\right).$$

Pour que λ disparaisse du second membre, il faut que

$$\lambda^2\psi_1\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda^4}, \frac{l}{\lambda}\right)$$

soit une fonction de degré zéro en λ, ou que $\psi_1\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda^4}, \frac{l}{\lambda}\right)$ soit homogène et de degré -2 en λ, ce qui exige que

$$\psi_1\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda^4}, \frac{l}{\lambda}\right) = k \times \frac{\frac{\mathrm{I}}{\lambda^4}}{\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2},$$

par suite

$$\mathrm{N} \leq k\,\frac{\mathrm{EI}}{\lambda^2}.$$

On voit de plus comment E varie avec les unités. Il varie avec l'unité de force comme une force et avec l'unité de longueur comme l'inverse du carré d'une longueur. En d'autres termes, il varie comme une pression par unité de surface. Donc, si pour le fer, en prenant le mètre et le kilogramme pour unités, on a $\mathrm{E} = 16 \times 10^9$, en prenant le centimètre et le kilogramme, on aura $\mathrm{E} = 16 \times 10^5$, et en prenant le millimètre et le kilogramme, $\mathrm{E} = 16 \times 10^3 = 16000$.

NOTE II.

SUR LE PLANIMÈTRE POLAIRE ET LES INTÉGRATEURS D'AMSLER ET L'INTÉGROMÈTRE DE M. MARCEL DEPREZ.

1. Amsler, *Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren insbesondere über einen neuen Planimeter,* von Jacob Amsler, Professor am Gymnasium in Schaffausen (*Sur la détermination mécanique de l'aire, du moment statique et du moment d'inertie des figures planes, en particulier sur un nouveau planimètre.* Schaffouse, Beck et fils, 1856. Extrait du *Journal trimestriel de la Société des Sciences naturelles de Zurich*). — 2. Ed. Collignon, *Sur un appareil propre à donner la surface, le moment d'inertie et les coordonnées du centre de gravité d'une aire plane* (*Annales des Ponts et Chaussées*, t. III, 1872). — 3. Amsler, *Anwendung des Integrators zur Berechnung des auf- und Abtrages bei Anlage von Eisenbahnen, Strassen und Kanälen* (*Application de l'intégrateur au calcul des déblais et remblais dans les projets de chemins de fer, routes et canaux*). Zurich, imprimerie Orell, Füssli et Cie, 1875.

I. — *Planimètre polaire d'Amsler.*

§ 1.

Théorie de l'appareil. — Le planimètre polaire d'Amsler a pour objet la détermination mécanique de l'aire limitée par un contour fermé de forme quelconque tracé sur le papier.

Réduit à sa plus simple expression, il se compose (*fig.* 112, *Pl. XXVI*) de deux tiges OA et AM articulées entre elles au point A.

La première porte en son extrémité O une pointe en acier qu'on peut fixer en un point quelconque du papier; la seconde porte : 1° en son extrémité M, un style à l'aide duquel on peut suivre le contour de la ligne fermée dont on veut trouver l'aire; 2° en un point quelconque de sa longueur ou de son prolongement, une roulette I dont nous supposons d'abord l'axe en coïncidence avec celui de la tige AM elle-même, mais qui, dans la réalité, se trouve être parallèle

et invariablement lié à la tige AM, suivant une disposition comme celle figurée en pointillé pour la roulette J dont l'axe xy est parallèle à AM et invariablement lié à cette tige par un étrier $x_1 x y_1 y$, ou tout autre moyen.

Ceci posé, pour trouver l'aire d'une courbe, on fixe la pointe O au point du papier qu'on juge le plus commode, soit en dehors, soit à l'intérieur de l'aire à mesurer ; puis on marque sur la courbe un point arbitraire M_0 sur lequel on porte le style M. On s'assure que la roulette appuie bien sur le papier. On fait alors suivre au style tout le pourtour de la courbe en la décrivant de la gauche vers la droite, de façon à revenir au point de départ M_0. Pendant ce mouvement, la roulette, par son adhérence avec le papier, a décrit un certain arc dont nous désignerons la longueur par la lettre u.

Théorème. — 1° *Si la pointe* O *est placée en dehors de la courbe, l'aire de celle-ci est équivalente à un rectangle ayant pour base l'arc* u *et pour hauteur la longueur invariable de la tige* $AM = l$;

2° *Si la pointe* O *a été placée à l'intérieur de la courbe, l'aire cherchée est égale à une aire constante, c'est-à-dire ne dépendant que des dimensions de l'appareil et non de la courbe donnée, augmentée ou diminuée de l'aire du rectangle dont il vient d'être parlé.*

1° Supposons d'abord la pointe O placée en dehors de la courbe. Il faut évidemment la placer assez près de la courbe pour que celle-ci puisse être parcourue en entier par le style M.

Ceci exige que la somme OA + AM des deux tiges soit supérieure à la plus grande distance du point O à la courbe et que la différence AM — OA soit supérieure à la plus courte distance de ce point à la courbe.

Le point O étant ainsi choisi, il s'ensuit que les deux tiges OA et AM ne peuvent jamais se trouver en ligne droite ; l'angle OAM ne peut pas atteindre et encore moins dépasser 180°. Cela équivaut à dire que le point A ne peut pas décrire la circonférence entière, et, comme il revient à son point de départ quand la tige AM revient elle-même dans sa position initiale $A_0 M_0$, le point A exécute une oscillation telle que $A_0 A_1 A A_2 A_0$, dont les extré-

mités A_1 et A_2 sont telles que les normales A_1M_1, A_2M_2 à la courbe soient égales à la longueur l de la tige AM.

Or, si l'on envisage la portion du plan balayée par la tige AM pendant la double oscillation du point A, on voit que, *si la courbe a la forme indiquée sur la figure,* un point pris dans son intérieur n'est rencontré qu'une fois par la tige, tandis que les points situés en dehors de la courbe sont rencontrés deux fois : une fois pendant le mouvement de droite à gauche, une fois pendant le mouvement de gauche à droite du point A.

Donc, chaque portion de l'aire de la courbe n'est décrite qu'une fois, et chaque portion d'aire prise en dehors d'elle l'est deux fois dans des sens opposés. Donc, si l'on convient de compter positivement les aires décrites par la droite AM pendant que le point A se meut de gauche à droite et négativement pendant qu'il se meut en sens inverse, la somme algébrique de ces aires représente l'aire de la courbe.

Si la courbe présentait des sinuosités, chaque élément superficiel pris dans son intérieur pourrait être décrit un nombre impair $2n+1$ de fois et chaque élément pris en dehors un nombre pair $2n$ de fois, n fois avec un signe et n fois avec le signe contraire. Le résultat serait encore le même, c'est-à-dire que la somme algébrique des aires décrites représenterait toujours l'aire de la courbe.

Ceci posé, soit AMA'M' l'aire comprise entre les deux positions infiniment voisines AM et A'M' de la tige. Nous pouvons amener celle-ci de la première à la seconde position par : 1° une translation AA' qui lui fait décrire le parallélogramme AA'Mm, lequel devra être compté positivement ou négativement suivant la convention qui vient d'être faite; 2° une rotation autour du point A' qui lui fera décrire l'aire du triangle A'mM', laquelle sera à ajouter à l'aire du parallélogramme ou à en soustraire, suivant que la rotation a lieu de gauche à droite ou de droite à gauche. Donc, l'aire AMA'M' sera la somme des aires du parallélogramme et du triangle, pourvu que l'on compte la première positivement ou négativement suivant que le point A se meut de gauche à droite ou inversement, et la seconde positivement ou négativement suivant que la rotation a lieu de gauche à droite ou de droite à gauche.

Le parallélogramme a pour base la longueur constante $AM = l$.

Soit h sa hauteur comptée positivement si $A'm$ est à droite de AM; son aire sera en grandeur et signe

$$l \times h.$$

Soit ε l'angle $mA'M$ compté positivement s'il a été décrit de gauche à droite; l'aire du triangle sera en grandeur et signe

$$\frac{l^2 \varepsilon}{2}.$$

Donc l'aire AMA'M' est en grandeur et signe

$$lh + \frac{l^2}{2}\varepsilon$$

et, par suite, l'aire S de la courbe, qui est, comme nous l'avons vu, la somme algébrique des aires AMA'M', est

$$S = l\Sigma h + \frac{l^2}{2}\Sigma\varepsilon.$$

Mais $\Sigma\varepsilon$ est l'angle total décrit par la droite AM et, comme elle part d'une position pour y revenir, cet angle est nul. Donc

$$S = l\Sigma h. \tag{1}$$

Examinons à présent quel est l'arc décrit par la roulette I. Soit I son point de contact avec le papier. Pendant la translation de la droite, le point I est venu en i et, pendant la rotation, il a décrit l'arc iI'.

Abaissons iK perpendiculaire sur AM. Nous pouvons remplacer la translation Ii par les deux translations IK, Ki; la première ayant lieu parallèlement à l'axe de la roulette, la seconde perpendiculairement à cet axe; pendant le premier de ces deux déplacements, la roulette glissera sur le papier sans décrire d'arc; pendant le second, elle roulera et développera l'arc Ki dont la valeur absolue est h.

Mais l'arc total que décrira la roulette est évidemment la somme des arcs qu'il décrit pendant qu'elle roule dans un sens, par exemple de gauche à droite, moins la somme de ceux qu'elle décrit pendant qu'elle roule en sens inverse ou la somme algébrique des arcs décrits comptés positivement dans un sens (le sens de la graduation de la roulette qui est faite de gauche à droite). Nous

devons donc considérer h comme représentant en grandeur et signe l'arc décrit pendant que la ligne AM vient en Am; à cet arc vient s'ajouter, positivement ou négativement, celui iI' décrit pendant la rotation de la droite autour de A' suivant que l'angle ε est positif ou négatif. Donc, si $\rho = \text{AI} = \text{A}'i =$ const. est le rayon de cet arc, l'arc total, déployé par la roulette pendant que la tige a passé de AM en A'M', est

$$h + \rho\varepsilon$$

et l'arc total qu'elle a développé pendant l'évolution complète de la tige, arc que nous avons appelé u, est

$$u = \Sigma h + \rho\,\Sigma\varepsilon = \Sigma h, \tag{2}$$

puisque $\Sigma\varepsilon = 0$.

Si l'on compare les équations (1) et (2), on voit que

$$\text{S} = l \times u, \tag{3}$$

ce qui établit la première partie de la proposition énoncée.

Remarque. — Si la roulette, au lieu d'avoir son axe coïncidant avec l'axe de la tige AM, était placée en J, de façon à avoir son axe parallèle et invariablement lié à cette tige, les résultats qui précèdent subsisteraient encore.

Soit JP $= p$ la distance invariable de l'axe de la roulette ou de son point de contact J à la tige AM.

Le triangle JAP est invariable; nous désignerons par θ l'angle A de ce triangle.

Pendant la translation de la tige de AM en A'm, le point J décrit un chemin Jj égal et parallèle à Ii; l'arc déployé par la roulette est donc le même qu'elle soit en I ou en J.

Par suite de ce premier déplacement, le triangle AJP vient en A'jp.

Le point de contact de la roulette avec le papier passe de J en j et l'axe de la roulette est alors dirigé suivant une parallèle (non indiquée sur la figure) à mA'p ou à MAP menée par le point j.

Pendant la rotation mA'M' $= \varepsilon$ autour de A', le point de contact j décrit un arc jJ' répondant à un angle jA'J' $= \varepsilon$ et vient en J'.

Ce déplacement jJ' peut être remplacé par les deux déplacements jk et kJ', le premier dans le prolongement de pj et, par

suite, perpendiculaire à l'axe de la roulette, le second kJ' parallèle à cet axe. Dans ce dernier mouvement, la roulette glisse sans rouler; dans le premier, elle roule en déployant l'arc jk.

Or l'angle kjJ' est égal à l'angle $jA'p$ ou à θ, ces deux angles ayant leurs côtés perpendiculaires. Donc

$$kj = jJ' \cos\theta - \rho\varepsilon \cos\theta,$$

en désignant toujours par ρ la distance constante $JA = jA'$ entre le point de contact de la roulette et le point d'articulation A.

Ainsi, l'arc développé par la roulette, dans la translation, est toujours égal à la hauteur h du parallélogramme $AMA'm$; dans la rotation il est $\rho\varepsilon \cos\theta$, au lieu qu'il était $\rho\varepsilon$, lorsque l'axe de la roulette coïncidait avec AM.

De plus, comme la roulette est ici sur le prolongement de MA, on voit que les arcs jp et jk déployés successivement le sont en sens inverses ou se retranchent.

On peut donc dire, d'une manière générale, que l'arc élémentaire déployé est

$$h \pm \rho \cos\theta \times \varepsilon,$$

θ étant l'angle constant JAP que fait la tige avec le rayon issu du point A et allant au point d'articulation; ou

$$(4) \qquad h \pm \varepsilon \sqrt{\rho^2 - p^2},$$

p étant la distance de l'axe de la roulette à l'axe de la tige AM, le signe + convenant au cas où la roulette est placée sur la ligne AM, c'est-à-dire entre son point d'articulation et le style M, le signe — lorsqu'elle est sur le prolongement de MA.

On aura, par suite,

$$(5) \qquad u = \Sigma h \pm \sqrt{\rho^2 - p^2}\, \Sigma\varepsilon$$

et, comme ici $\Sigma\varepsilon = 0$, on aura encore

$$u = \Sigma h;$$

d'où

$$l \times u = l \times \Sigma h = S.$$

2° Supposons, à présent, le point O placé à l'intérieur de la courbe (*fig.* 61 *bis*, p. 483).

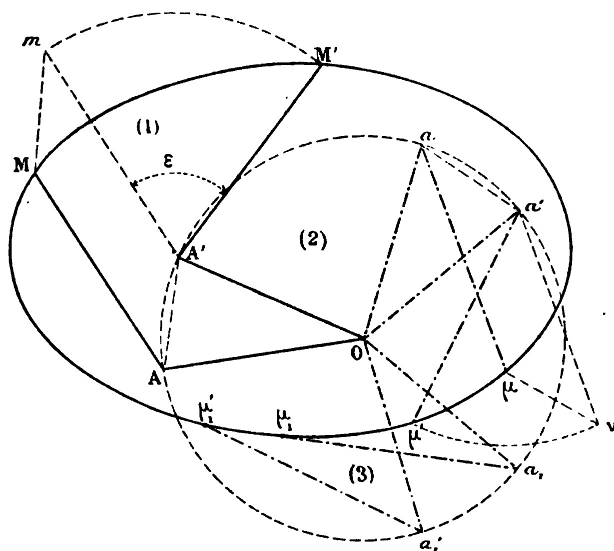
Alors l'angle total décrit par AM ne sera plus nul, mais 360°,

c'est-à-dire qu'on n'aura plus $\Sigma\varepsilon = 0$, mais

$$\Sigma\varepsilon = 2\varpi. \tag{6}$$

Examinons comment sera engendré l'arc total u développé par la roulette. Admettons d'abord que la circonférence coupe la

Fig. 61 *bis*.



courbe donnée, de sorte qu'on puisse considérer trois sortes d'aires :

1° L'aire ou les aires, telles que (1), extérieures à la circonférence et intérieures à la courbe;

2° Les aires, telles que (3), qui sont, au contraire, extérieures à la courbe et intérieures à la circonférence;

3° Les aires, telles que (2), intérieures à la fois à la courbe et à la circonférence.

Si la tige AM passe en A'M' et qu'on décompose encore le mouvement en une translation et une rotation, on voit que pendant la translation, si le point A se déplace de gauche à droite, la roulette développera un arc positif comme dans le cas précédent, *lorsque* AM *est du côté opposé au pôle* O *par rapport à la tangente à*

la circonférence en A, ce qui dans la *fig.* 112, *Pl. XXVI*, a été implicitement supposé.

Il en est autrement lorsque la tige est du même côté que le pôle par rapport à cette tangente. Ainsi, dans le passage de la tige de $a\mu$ en $a'\mu'$, la translation est égale à aa', et la tige, par suite de ce premier déplacement, passe de $a\mu$ en $a'\nu$. Or, tandis que dans la position AM un observateur placé en A et regardant M verra la roulette tourner de droite à gauche, un observateur placé en a et regardant μ verra le sens inverse. Il en est de même pour un observateur placé en a_1 et regardant μ_1.

Pour les rotations ε, le développement est toujours positif quand la rotation autour de A′ se fait de gauche à droite. Nous n'avons donc rien à changer à la convention sur le sens des angles positifs ε; mais, pour que la formule (5), à savoir

$$(7) \qquad u = \Sigma h \pm \sqrt{\rho^2 - p^2}\, \Sigma \varepsilon,$$

donne encore l'arc u, il faut convenir que le point A se déplaçant de gauche à droite, h sera positif ou négatif selon que la tige AM sera ou non du côté opposé à la tangente à la circonférence en A par rapport au centre O de cette circonférence.

Considérons à présent l'aire décrite par la tige AM. On voit que tout point de la partie (2) sera atteint deux ou un nombre pair de fois et les parties (1) et (3) une ou un nombre impair de fois.

Et si l'on compte positivement les aires lorsque, le point A se mouvant de gauche à droite, la tige AM est du côté opposé à la tangente en A par rapport au point, on voit que les aires balayées deux fois ont, dans les deux cas, des signes opposés. Il résulte de là : 1° que la somme des aires balayées dans (2) est nulle; 2° que la somme des aires balayées dans (1) est égale à cette aire comptée positivement; 3° que la somme des aires balayées dans (*b*) est égale à cette aire comptée négativement. Donc l'aire totale balayée est

$$(1) - (3)$$

ou, en ajoutant (2) aux deux termes,

$$S - \varpi R^2,$$

S étant l'aire de la courbe et $R = OA$ le rayon de la circonférence.

Mais l'aire $AMA'M' = AMA'm + A'mM'$ est toujours

$$l \times h + \frac{l^2}{2}\varepsilon$$

en grandeur et en signe, pourvu qu'on fasse sur le signe de h la même convention que celle faite sur l'aire du parallélogramme $AMA'm = l \times h$.

Donc l'aire totale $S - \varpi R^2$ est

$$(8) \qquad S - \varpi R^2 = l \Sigma h + \frac{l^2}{2} \Sigma\varepsilon.$$

Retranchons de cette équation celle (7) multipliée par l, on aura

$$S - \varpi R^2 - l \times u = \left(\frac{l^2}{2} \mp l\sqrt{\rho^2 - p^2}\right) \Sigma\varepsilon.$$

Mais $\Sigma\varepsilon$ représente l'angle total décrit par la tige AM, angle qui est ici 2ϖ. Donc

$$S = \varpi(R^2 + l^2 \mp 2l\sqrt{\rho^2 - p^2}) + l \times u,$$
$$S = \text{const.} + l \times u,$$

ce qui établit la seconde partie de la proposition.

Remarque. — Si la circonférence était tout entière placée à l'intérieur de la courbe, les résultats précédents se verraient d'une façon à peu près immédiate.

§ 2.

CONSTANTE DE L'APPAREIL. — Si l'on pose

$$R^2 + l^2 \mp 2l\sqrt{\rho^2 - p^2} = K^2$$

le signe — se rapportant au cas où la roulette est placée entre les points A et M, le signe + au cas où elle est placée sur le prolongement de la tige MA, on aura

$$S = \varpi K^2 + l \times u.$$

La constante ϖK^2 qu'il faut ajouter au rectangle $l \times u$ pour avoir l'aire cherchée S est donc la surface d'un cercle de rayon K. Ce rayon est facile à obtenir avec l'appareil lui-même. Supposons,

pour fixer les idées, la roulette placée sur le prolongement de MA (*fig.* 61 *ter*, p. 486); ayant donné à la tige OA une position fixe quelconque, faisons varier la direction de MA jusqu'à ce que le plan JP du rebord de la roulette, c'est-à-dire du plan passant par le point de contact J et perpendiculairement à l'axe de la roulette,

Fig. 61 *ter*.

M
l
A
ρ
R
J
p
P
O

passe par le point O. A ce moment, la distance $OM = K$; car on a

$$AP = \sqrt{\overline{AJ}^2 - \overline{JP}^2} = \sqrt{\rho^2 - p^2},$$

et dans le triangle OAM

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AM}^2 + 2AM \times AP$$

ou

$$\overline{OM}^2 = R^2 + l^2 + 2l\sqrt{\rho^2 - p^2} = K^2.$$

Le même procédé donne K si la roulette est calée entre A et M.

§ 3.

DISPOSITIONS PRATIQUES. — 1° La roulette est habituellement divisée en 100 ou 200 parties et un vernier permet d'apprécier les

dixièmes de division. Elle communique à l'aide d'une vis sans fin avec un petit pignon qui indique le nombre entier de tours qu'elle a faits pendant une opération.

Un repère est fixé sur l'appareil près des circonférences du pignon et de la roulette.

2° Après avoir placé l'appareil dans sa position initiale et s'être assuré que la roulette porte bien sur le papier, on note les divisions du pignon et de la roulette placées au droit du repère.

Quand le style a décrit la courbe qu'il s'agit de quarrer, on note de nouveau ces divisions.

La différence des deux chiffres lus sur le pignon donne le nombre entier de tours de la roulette, et la différence des deux chiffres lus sur la roulette elle-même donne, à l'aide du vernier, les fractions de tour à $\frac{1}{1000}$ ou $\frac{1}{2000}$ de tour près, suivant que la roulette est divisée en 100 ou 200 parties.

On a donc ainsi l'arc décrit u avec une grande approximation exprimée en tours et fractions de tour.

L'appareil est disposé pour que les chiffres ainsi obtenus donnent directement l'aire cherchée exprimée en unités connues.

Supposons, par exemple, qu'on veuille que ce chiffre fournisse l'aire en décimètres carrés. Il faut, pour cela, qu'un tour de la roulette réponde à une aire d'un décimètre carré. Or, si le périmètre de la roulette a une longueur de c décimètres et si la longueur de la tige AM est de l décimètres, l'aire correspondant à un tour de la roulette est de $c \times l$ décimètres carrés. Donc il suffit que

$$c \times l = 1 \quad \text{ou} \quad l = \frac{1}{c}.$$

Si l'on veut que la différence des deux chiffres lus exprime l'aire S en une autre unité carrée, il suffit que cette dernière équation ait lieu, l et c étant exprimés dans l'unité linéaire correspondante.

3° Pour que l'on puisse, avec le style M, parcourir des courbes très diverses, la tige AM est disposée de façon qu'on puisse augmenter ou diminuer sa longueur l. A cet effet, elle a la forme d'une petite règle en cuivre à section carrée et pénètre à frottement dur dans un petit manchon en cuivre de même section. Des points de division, marqués de distance en distance sur la règle, indiquent diverses longueurs l qu'on peut lui donner en l'enfonçant plus ou

moins dans son manchon. Pour ces diverses longueurs, le nombre de tours de la roulette fournit naturellement l'aire que l'on cherche exprimée en unités différentes. Ces unités sont indiquées pour chaque division à laquelle on s'est arrêté sur la règle elle-même.

Si l'on était amené exceptionnellement à donner à l une longueur ne répondant pas à l'une des divisions marquées, il faudrait multiplier les chiffres résultant des lectures par le rapport de la longueur adoptée l à celle qui répond à la division la plus voisine, pour avoir l'aire cherchée exprimée en unités indiquées par cette division.

4° Quand on le pourra, on placera le point fixe O en dehors de la courbe; c'est alors que les lectures précédentes donnent directement l'aire.

5° Si l'on est amené à placer ce point à l'intérieur, il faut au chiffre dont il vient d'être parlé ajouter l'aire constante dont la mesure est donnée au paragraphe précédent. Cette aire est gravée sur l'appareil.

6° Dans le premier cas, si le point est extérieur, la seconde des lectures indiquées ci-dessus (2°) donne toujours un chiffre plus fort que la première, et l'excès *nécessairement positif* du second chiffre sur le premier représente l'aire cherchée.

Mais, si le point O est intérieur, il arrivera que cet excès du second chiffre sur le premier sera tantôt positif, tantôt négatif ou même nul, suivant que l'aire à trouver est supérieure, inférieure ou égale à l'aire constante ϖK^2.

Il faudra toujours l'ajouter *avec son signe* à cette aire constante.

II. — *Intégrateurs d'Amsler.*

§ 4.

PRINCIPE GÉNÉRAL D'AMSLER. — Soit donnée une courbe fermée G tracée sur le papier (*fig.* 114, *Pl. XXVI*) et rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy. Concevons qu'une tige ou ligne matérielle de longueur invariable AM $= l$ se meuve de façon que son extrémité A parcoure l'axe des x, tandis que son extrémité M décrit la courbe en cheminant de gauche à droite.

Cette tige est accompagnée dans son mouvement par une roulette dont l'axe Cz parallèle au plan du papier est relié à la tige de la manière suivante :

1° Un point C de l'axe est invariablement lié à la tige, de façon que le triangle ACM soit invariable;

2° A chaque inclinaison α de la droite mobile AM sur l'axe Ox, répond pour l'axe CZ une inclinaison β qui est une fonction linéaire de α, de sorte que

$$(1) \qquad \beta = a\alpha + b,$$

a et b étant deux constantes.

Nous ne nous occupons pas, quant à présent, des moyens qui permettent de réaliser matériellement cette relation. Nous la supposons réalisée et nous nous proposons de déterminer l'arc total u que développera la roulette en roulant sur le papier pendant que la tige AM fait une évolution complète, c'est-à-dire pendant qu'elle part d'une position pour y revenir.

A cet effet, considérons deux positions infiniment voisines AM, A'M' de la tige. Soient Cz la position de l'axe de la roulette répondant à la position AM, et I son point de contact avec le papier. Désignons par $\xi =$ OA l'abscisse du point A.

Nous pouvons amener AM en A'M' par une translation AA' $= d\xi$ qui lui donnera la position A'm, puis, par une rotation mA'M' autour du point m; l'angle mA'M' compté positivement de gauche à droite est égal à $-d\alpha$.

Pendant que la tige s'est déplacée parallèlement à elle-même, de AM en A'm, l'axe CZ, de son côté, conserve une direction constante en vertu de la relation (1). Il est donc arrivé en cz faisant toujours avec l'axe Ox l'angle β.

Pendant que la tige a tourné autour de A' de l'angle $-d\alpha$, amenant le point c en C', l'axe cz a tourné de

$$(2) \qquad -d\beta = -a\,d\alpha.$$

Soit C'Z' sa position définitive.

Nous pouvons concevoir qu'on l'amène de cz en C'Z' par une translation égale à cC' et une rotation $-d\beta$ autour de C'.

Le point de contact I de la roulette avec le papier a ainsi éprouvé :

1° Une translation Ii parallèle à l'axe des x et égale à $d\xi$;

2° Une translation ii' égale et parallèle à cC';

3° Une rotation égale à l'arc $i'I'$ décrit du point C' comme centre.

Menons $I'K$ perpendiculaire à l'axe CZ jusqu'à sa rencontre en K avec cet axe.

Nous pouvons encore amener la roulette de sa première position à la dernière par une translation IK parallèle à son axe et pendant laquelle elle ne fait que glisser et un déplacement KI' perpendiculaire, pendant lequel elle développera un arc de longueur KI'. C'est donc là l'arc réellement développé; il est égal à la projection du chemin $Iii'I'$ sur une perpendiculaire à l'axe CZ.

La projection de $Ii = AA' = d\xi$ est évidemment $d\xi \sin\beta$.

La ligne ii' est égale et parallèle à l'arc de cercle cC'; sa grandeur est donc $-\rho\,d\alpha$, en appelant ρ la longueur invariable $CA = cA'$.

D'ailleurs cC', et par suite ii' étant perpendiculaire à $A'c$ ou à CA, l'angle de ii' avec IK est égal à l'angle de cz ou de CZ avec CA.

Or l'angle ZCA extérieur au triangle ACD est égal à

$$\beta + \text{DAC} = \beta + 180 - \alpha - \theta,$$

en appelant θ l'angle invariable CAM.

Donc la projection de ii' est

$$ii' \cos(\beta + 180° - \alpha - \theta) = -ii' \sin(\theta + \alpha - \beta) = \rho\,d\alpha \sin(\theta + \alpha - \beta).$$

L'arc $i'I' = -\rho\,d\beta$ est à lui-même sa projection.

Si donc on appelle du cet arc $I'K$ développé par la roulette pendant le passage de la tige de la position AM caractérisée par l'inclinaison α à celle infiniment voisine caractérisée par l'inclinaison $\alpha + d\alpha$, on aura

$$du = d\xi \sin\beta - \rho[1 - \sin(\theta + \alpha - \beta)]\,d\alpha.$$

Soient x, y et $x + dx$, $y + dy$ les coordonnées des points M et M'.

Au lieu de $d\xi$, il est plus commode d'introduire dx dans la formule précédente. On a

$$\xi = x - l\cos\alpha, \quad d\xi = dx + l \sin\alpha\, d\alpha.$$

Donc

$$du = dx \sin\beta - \rho\, d\alpha + [l \sin\alpha \sin\beta + \rho \sin(\theta + \alpha - \beta)]\,d\alpha$$

ou, en observant que

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\beta-\alpha)-\cos(\beta+\alpha)}{2} \quad \text{et} \quad \beta = a\alpha + b,$$

$$du = dx\sin\beta - \rho\,d\alpha + \frac{l}{2}\{\cos[(a-1)\alpha+b]-\cos[(a+1)\alpha+b]\}\,d\alpha$$
$$+\rho\sin[(1-a)\alpha+\theta-b]\,d\alpha$$

et pour l'arc u développé pendant un déplacement fini de la droite AM, par suite duquel l'angle α passe de la valeur α_0 à celle α_1,

$$\begin{aligned} u = {} & \int dx\sin\beta - \rho(\alpha_1-\alpha_0) \\ & - \frac{l}{2(a+1)}\{\sin[(a+1)\alpha_1+b]-\sin[(a+1)\alpha_0+b]\} \\ & + \frac{1}{a-1}\Big(\frac{l}{2}\{\sin[(a-1)\alpha_1+b]-\sin[(a-1)\alpha_0+b]\} \\ & \qquad + \rho\{\cos[(1-a)\alpha_0+\theta-b]-\cos[(1-a)\alpha_1+\theta-b]\}\Big). \end{aligned}$$

Pour un tour complet du point M sur la courbe, la droite AM décrit un angle nul ou un nombre entier n de circonférences, en sorte que

$$\alpha_1 = \alpha_0 + 2n\varpi,$$

n étant nul si la tige AM ne fait qu'osciller, c'est-à-dire si elle décrit un angle total nul. Par suite, en remplaçant les différences de sinus et cosinus par des produits, il vient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} u = {} & \int dx\sin\beta - 2n\varpi\rho - \frac{l}{a+1}\sin(a+1)n\varpi\cos(a+1)(\alpha_0+n\varpi) \\ & + \frac{\sin(a-1)n\varpi}{a-1}\{l\cos(a-1)(\alpha_0+n\varpi)-\rho\sin[(1-a)(\alpha_0+n\varpi)+\theta-b]\}. \end{aligned}\right.$$

De là résultent les conséquences suivantes :

a. Si la tige AM ne fait qu'osciller, ce qui arrive toutes les fois que la droite Ox ne coupe pas la courbe décrite par le point M, on a $n = 0$ et par suite, *quel que soit a*,

$$(4)\qquad u = \int dx\sin\beta \quad \text{ou} \quad u = \int dx\sin(a\alpha+b),$$

l'intégrale étant étendue à tout le périmètre de la courbe.

C'est là la formule fondamentale d'Amsler que nous utiliserons.

b. Si la tige AM fait n tours et que a soit entier, la formule (3)

devient, quel que soit cet entier,

$$u = \int dx \sin\beta + C, \tag{5}$$

C étant une constante; car, a étant entier, on a

$$\sin(a+1)n\varpi = \sin(a-1)n\varpi = 0.$$

Par suite, si a est différent de 1 et de -1, tous les termes du second membre de (3) sont nuls, sauf les deux premiers, et

$$C = -2n\varpi\rho.$$

Si $a = 1$, on a

$$\frac{\sin(a-1)n\varpi}{a-1} = n\varpi.$$

Donc

$$C = -2n\varpi\rho[1 + \sin(\theta - b)].$$

De même, si $a = -1$,

$$C = -n\varpi(2\rho + l).$$

Ainsi, toutes les fois que a est entier, c'est une simple constante dépendant de l'instrument qu'il faut ajouter à l'expression $\int dx \sin\beta$ pour avoir l'arc décrit, lorsque la tige AM, au lieu d'osciller, décrit une ou plusieurs fois l'angle de 360°.

c. Si a n'est pas entier et que la tige fasse un ou plusieurs tours, l'arc u développé par la roulette n'est pas déterminé en ce sens qu'il dépend de l'angle initial α_0, c'est-à-dire du point de départ de l'extrémité M de la tige sur la courbe fermée qu'elle décrit.

Nous nous placerons désormais dans le cas de $n = 0$, appliquant ainsi la formule (4) où l'intégrale est étendue à tout le périmètre de la courbe fermée.

§ 5.

OBJET ET PRINCIPE DES INTÉGRATEURS D'AMSLER. — Le but des intégrateurs d'Amsler est de résoudre ce triple problème : Trouver mécaniquement :

1° L'aire d'une courbe plane fermée tracée sur le papier;

2° Le centre de gravité de cette aire;

3° Son moment d'inertie relatif à un axe quelconque situé dans son plan.

Soient (*fig.* 114, *Pl. XXVI*) S l'aire de la courbe donnée, rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy; η l'ordonnée de son centre de gravité G et I son moment d'inertie par rapport à l'axe Ox supposé placé en dehors de la courbe.

Si l'on connaît l'ordonnée η du centre de gravité G par rapport à un axe placé en dehors de la courbe, on le connaît par rapport à tout axe parallèle qui couperait la courbe; de même, si l'on connaît le moment d'inertie I relatif à l'axe Ox, on le connaît (§ 230) par rapport à tout axe parallèle.

L'axe Ox étant ainsi placé, la ligne matérielle AM considérée au paragraphe précédent ne peut qu'osciller, c'est-à-dire décrire un angle total nul pendant que son extrémité M décrit la courbe, et la formule fondamentale (4) est applicable, quels que soient les coefficients a et b qui entrent dans l'expression de l'angle β. Si x, y désignent les coordonnées d'un point quelconque a pris à l'intérieur de la courbe et que l'on considère le rectangle infiniment petit $abcd$ dont les côtés ab, ac, parallèles aux axes, sont représentés respectivement par dx, dy, on a

$$S = \int\int dy\,dx, \quad S\eta = \int\int y\,dy\,dx, \quad I = \int\int y^2 dy\,dx,$$

l'intégration double s'étendant à tous les éléments rectangulaires compris dans l'aire. Si l'on intègre relativement à y, on obtient

$$(5) \qquad S = \int y\,dx, \quad S\eta = \tfrac{1}{2}\int y^2 dx, \quad I = \tfrac{1}{3}\int y^3 dx,$$

où l'intégration simple n'est plus à faire que suivant le périmètre de la courbe, de sorte que, dans ces nouvelles formules (qu'il serait aisé de démontrer directement en décomposant l'aire de la courbe en bandes parallèles à l'axe des y, de largeur dx et de hauteurs égales aux portions d'ordonnée limitées par le périmètre), les coordonnées x et y sont celles d'un point quelconque M de la courbe elle-même.

Soit AM la position de la droite mobile considérée au paragraphe précédent. En conservant les notations de ce paragraphe, on a

$$y = l \sin\alpha,$$

de sorte que les expressions ci-dessus deviennent

$$(6) \qquad S = l\int \sin\alpha\,dx, \quad S = \eta\frac{l^2}{2}\int \sin^2\alpha\,dx, \quad I = \frac{l^3}{3}\int \sin^3\alpha\,dx.$$

Or

$$(7) \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}.$$

D'ailleurs on a évidemment

$$\int dx = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tout le périmètre de la courbe.

Donc

$$(8) \begin{cases} S = l\int \sin\alpha dx, \\ S\eta = -\frac{l^2}{4}\int \cos 2\alpha dx = \frac{l^2}{4}\int \sin(2\alpha - 90)\, dx = \frac{l^2}{4}\int \sin(2\alpha + 90) dx. \\ I = \frac{l^2}{4} S - \frac{l^3}{12}\int \sin 3\alpha dx. \end{cases}$$

On pourra donc déterminer S, η, I, en disposant sur l'appareil décrit au paragraphe précédent trois roulettes telles que les angles β que décrivent leurs axes aient respectivement pour valeurs

(9) $\beta = \alpha$ (surface),
(9') $\beta = 2\alpha - 90$ ou $\beta = 2\alpha + 90$ (ordonnée du centre de gravité).
(9") $\beta = 3\alpha$ (moment d'inertie).

§ 6.

DISPOSITIONS DES INTÉGRATEURS D'AMSLER. — La relation $\beta = \alpha$ se réalise sans difficulté. Il suffit de placer l'axe CZ de la roulette parallèlement à la tige AM et de relier ces deux lignes invariablement l'une à l'autre; alors elles resteront parallèles dans toutes les positions.

En ce qui touche les deux autres relations, Amsler, dans son Mémoire de 1856, observe qu'il y a bien des moyens de les réaliser.

Parmi ces moyens, il en indique deux : le premier, très simple théoriquement et très ingénieux, serait peut-être d'une réalisation pratique plus difficile que le second.

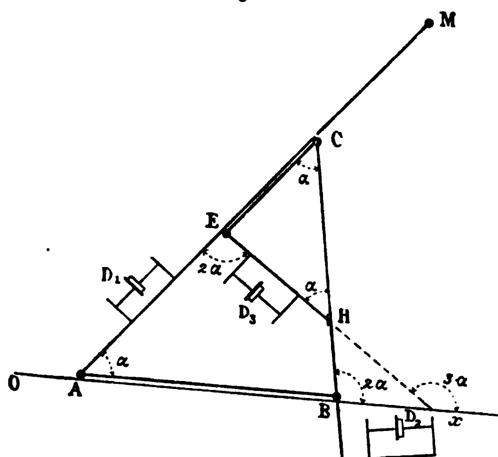
Aussi ne l'indiquerons-nous que sommairement :

Première disposition. — La droite AM (*fig.* 62, p. 495) est celle dont l'extrémité M porte un style auquel on peut faire parcourir une courbe donnée, pendant que son extrémité A parcourt une droite donnée Ox.

Une ligne CE est assujettie à glisser le long de AM.

Une tige AB, qu'on maintient constamment dirigée suivant l'axe Ox que doit parcourir le point A, est articulée en ce point à la tige AM, tandis que son extrémité B est articulée à une tige BC, articulée elle-même en C à la tige CE. Enfin, celle-ci est articulée à une dernière tige EH, dont l'extrémité H est assujettie à glisser le long de CB.

Fig. 62.



Les tiges AB et BC sont égales, ainsi que celles CE et EH. Il en résulte que, si à un instant quelconque la tige AM fait avec Ox l'angle α, les angles C et H seront aussi égaux à α. Par suite, l'angle CBx extérieur au triangle isoscèle ABC est 2α.

Il en est de même de l'angle AEH extérieur au triangle ECH; par suite, l'angle de EH avec Ox est 3α.

D'après cela, si aux deux tiges AM et EH on fixe deux roulettes D_1 et D_3, dont les axes soient respectivement parallèles et invariablement liés à ces tiges, et qu'à la tige CB, supposée prolongée et retournée à angle droit, on fixe une roulette D_2 dont l'axe soit d'équerre sur la tige, lorsque la tige OM fait avec Ox l'angle α, les axes des trois roulettes D_1, D_2, D_3 feront bien avec Ox les angles respectifs

$$\beta = \alpha, \quad \beta = 2\alpha + 90, \quad \beta = 3\alpha.$$

(Pour la seconde, ce serait $2\alpha - 90$, si l'on avait retourné d'équerre la tige CB vers la gauche.)

Si donc on observe, comme nous l'avons expliqué à l'occasion du planimètre, les arcs développés par ces roulettes pendant que le point M parcourt une courbe fermée et qu'on désigne ces arcs par

$$u_1, \; u_2, \; u_3,$$

on aura, d'après la formule (5) du paragraphe précédent,

$$u_1 = \int \sin\alpha \, dx, \quad u_2 = \int \sin(2\alpha + 90)\, dx, \quad u_3 = \int \sin 3\alpha \, dx$$

et, par suite, à cause de (8), pour l'aire, le moment statique et le moment d'inertie de la courbe donnée

$$(9) \qquad S = l u_1, \quad S\eta = \frac{l^2}{4} u_2, \quad I = \frac{l^3}{12}(3u_1 - u_3).$$

Dans la disposition qui précède, il va de soi que tous les glissements indiqués sur la figure théorique (p. 495) seraient en réalité remplacés par des roulements à l'aide de galets.

Deuxième disposition. — Un chariot à deux roues (*fig.* 113, *Pl. XXVI*) parcourt la droite Ox. Ce chariot porte l'axe vertical A, autour duquel peut tourner le levier AM auquel est invariablement liée une roue V_1 dont le centre coïncide avec l'axe de rotation A. Cette roue communique, soit à l'aide de dents d'engrenage, soit par simple adhérence avec deux pignons V_2 et V_3, dont les axes sont portés comme l'axe A par le chariot roulant.

Le diamètre de la roue V_1 est double de celui de V_2 et triple de celui de V_3.

Le bras AM porte une roulette D_1 dont l'axe lui est parallèle et invariablement lié.

Suivant l'un des rayons de la roue V_2 et invariablement lié à cette roue, est fixé l'axe horizontal d'une autre roulette D_2; de même, suivant l'un des rayons de V_3, est fixé l'axe horizontal d'une roulette D_3.

Les rayons suivant lesquels sont dirigés les axes des deux roulettes sont les suivants : concevons que, le chariot restant fixe, on fasse simplement tourner le bras AM et, par suite, la roue V_1 avec laquelle il est solidaire, autour de leur axe commun A, jusqu'à ce que AM soit devenu parallèle à Ox.

L'axe de D_2 est dirigé suivant le rayon de V_2 qui, à cet instant,

est perpendiculaire à Ox et l'axe de D_3 suivant le rayon de V_3 qui, à cet instant, est parallèle à Ox.

Ceci posé, supposons que le chariot chemine suivant Ox pendant que le style M parcourt une courbe donnée.

Soit, à un certain instant, α l'angle de AM avec Ox et désignons par β_1, β_2, β_3 les angles correspondants des axes des roulettes D_1, D_2, D_3 avec le même axe.

On a évidemment $\beta_1 = \alpha$.

En ce qui touche β_2 et β_3, pour un déplacement infiniment petit du chariot qui fait tourner AM et, par suite, la roue V_1 d'un angle $d\alpha$, les roues V_2, V_3 et, par suite, les axes des roulettes D_2 et D_3, qui sont invariablement liés aux disques de ces roues, tournent respectivement de

$$2\,d\alpha \text{ et } 3\,d\alpha;$$

ainsi

$$d\beta_2 = 2\,d\alpha, \quad d\beta_3 = 3\,d\alpha,$$

d'où

$$\beta_2 = 2\alpha + \text{const.}, \quad \beta_3 = 3\alpha + \text{const.}$$

Mais, par la façon dont on a choisi les rayons suivant lesquels sont dirigés les axes des roulettes, pour $\alpha = 0$, on a

$$\beta_2 = 90, \quad \beta_3 = 0;$$

donc

$$\beta_2 = 2\alpha + 90, \quad \beta_3 = 3\alpha.$$

On réalise donc bien les relations voulues et, par suite, la connaissance des arcs u_1, u_2, u_3 développés par les roulettes, pendant que le style M parcourt une courbe fermée, donne l'aire de la courbe, le moment statique et le moment d'inertie de cette aire.

Remarque. — En modifiant les proportions des roues et les positions des rayons des pignons suivant lesquels sont dirigés les axes des roulettes, on peut ainsi réaliser toutes les relations

$$\beta = a\alpha + b,$$

supposées au § 1.

§ 7.

OBSERVATION SUR L'EMPLOI PRATIQUE DE L'INSTRUMENT. — Si u_1, u_2, u_3 sont les arcs développés par les trois roulettes, nous avons vu que l'aire S, le moment statique $S\eta$ et le moment d'inertie I sont

donnés par les formules (9), à savoir

$$S = l u_1, \quad S\eta = \frac{l^2}{4} u_2, \quad I = \frac{l^3}{4} u_1 - \frac{l^3}{12} u_3.$$

On peut évidemment graduer les roulettes de façon que, si u_1, u_2, u_3 désignent non les longueurs, mais les nombres de tours et fractions de tour lus sur les roulettes, on ait

$$S = u_1, \quad S\eta = \mathbf{a} u_2, \quad I = u_1 + \mathbf{b} u_3,$$

les constantes **a** et **b** dépendant de l'appareil et de l'unité de longueur adoptée.

Ces constantes sont indiquées sur chaque appareil; l'unité de longueur est généralement le décimètre.

En 1875, Amsler a publié une nouvelle Note sur ses intégrateurs. Dans cette Note, il donne le dessin détaillé de l'instrument décrit plus haut avec trois roulettes, et les dessins de deux autres dispositions dont l'une donne les aires, moments statiques et moments d'inertie à l'aide d'une seule roulette, et dont l'autre, un peu simplifiée, donne seulement les aires et moments statiques aussi avec une roulette. La théorie de ces instruments est facile à déduire de ce qui précède et les instructions jointes à chacun d'eux en rendent l'usage facile.

Pour l'appareil à trois roulettes, les coefficients sont

$$\mathbf{a} = 0{,}6, \quad \mathbf{b} = 0{,}4.$$

Pour l'appareil complet à une roulette

$$\mathbf{a} = 0{,}5, \quad \mathbf{b} = \tfrac{1}{3}.$$

Pour l'appareil qui donne seulement les aires et moments statiques

$$\mathbf{a} = 0{,}5.$$

§ 8.

INTÉGROMÈTRE DE M. MARCEL DEPREZ. — M. Marcel Deprez a décrit, en 1872, sous le nom d'*intégromètre,* un appareil fondé sur le même principe que l'intégrateur d'Amsler (qui lui était alors inconnu), ayant le même objet, mais en différant un peu dans ses

dispositions matérielles. Revenons à la *fig.* 113, *Pl. XXVI*, du second modèle décrit par Amsler, dans son Mémoire de 1856. On peut réduire les deux roulettes D_2 et D_3 à une seule, à la condition de remplacer la roulette supprimée par une roue.

En effet, supposons qu'on monte les deux pignons V_2 et V_3 sur un même axe en remplaçant, par exemple, ce dernier par celui w_3 qui lui est égal et qui est monté sur le même axe que celui V_2. Ajoutons une nouvelle roue w_1 indiquée en traits discontinus, qui engrène avec le pignon w_3 figuré aussi en traits discontinus.

Les deux pignons V_2 et w_3 sont *calés* sur le même axe, lequel est solidaire de l'axe horizontal de la seule roulette conservée D_2.

Supposons de plus que les deux roues V_1 et w_1, qui ont toutes deux pour axe l'axe de rotation A de la tige décrivante AM, soient folles sur cet axe et qu'elles portent chacune un trou dans lequel on puisse enfoncer un goujon qui permette de fixer invariablement soit l'une, soit l'autre, à la tige AM. Si l'on fixe la roue V_1 en laissant celle w_1 folle, rien n'est changé au mouvement du pignon V_2 et de la roulette D_2. Celle-ci donne donc le moment statique.

Si, au contraire, on fixe la roue w_1 en laissant celle V_1 folle, alors c'est le pignon w_3 qui sera actionné et la roulette D_2 fonctionnera comme fonctionne dans l'appareil d'Amsler la roulette D_3. Elle donnera le moment d'inertie.

C'est par ce changement de position de l'un des trois pignons que se distingue l'appareil de M. Marcel Deprez. On en trouve la description aux *Annales des Ponts et Chaussées*, tome III, 1872, donnée par M. Ed. Collignon.

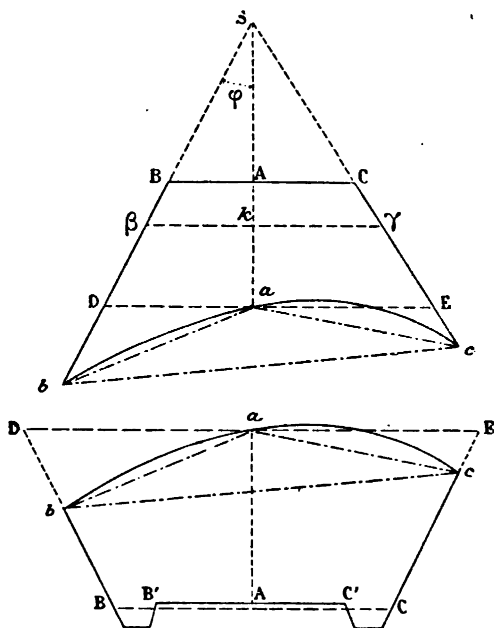
§ 9.

APPLICATION DE L'INTÉGRATEUR AU CALCUL DES DÉBLAIS ET REMBLAIS. — Dans l'étude d'un projet d'une voie de communication, route, chemin de fer ou canal, on a, en général, un certain nombre de tâtonnements à faire, avant d'arrêter définitivement le tracé en plan et le profil en long. Dans chacun des essais que l'on fait, il est important de pouvoir se rendre compte rapidement des cubes de déblais et de remblais que le tracé mis à l'épreuve entraînera.

Pour le calcul des surfaces des profils, les ingénieurs se servent depuis longtemps du planimètre polaire. Mais la détermination

mécanique directe des éléments du mouvement des terres, c'est-à-dire des volumes de remblai et de déblai, est beaucoup moins usitée; le planimètre n'y suffirait pas, tandis que l'intégrateur ou planimètre des moments fournit la solution du problème, ainsi que le montre Amsler dans sa brochure de 1875. Il envisage trois cas qui sont comme trois approximations successives. Nous nous bornerons ici à indiquer la première comme étant la plus pratique et peut-être la plus importante, en ce qu'elle procure très rapide-

Fig. 63.



ment les éléments nécessaires pour décider entre deux tracés lorsque c'est le mouvement des terres qui est déterminant.

Pour plus de détails, nous ne saurions mieux faire que de renvoyer à la brochure même d'Amsler (¹).

(¹) *Anwendung des Integrators, etc., Application de l'intégrateur au calcul des déblais et remblais dans l'étude des chemins de fer, routes et canaux,* par Amsler-Laffon, à Schaffouse (Zurich, imprimerie Orell-Füssli et Cie, 1875).

Les trois approximations considérées par l'auteur résultent de ceci : dans les profils en travers (*fig.* 63), il remplace la ligne d'intersection *bac* de chaque profil en travers avec le terrain naturel par :

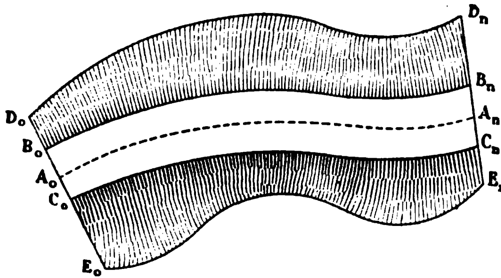
1° Une droite horizontale DE, (première approximation);
2° Par une droite inclinée *bc* (deuxième approximation);
3° Par deux droites *ab*, *ac* (troisième approximation);

La plate-forme BC en remblai ou B′C′ en déblai de la voie a naturellement une largeur constante dans tout le tracé. Cependant dans les déblais on peut remplacer la section vraie, comprenant les fossés, par une section équivalente limitée à l'horizontale BC.

Divisons le profil en long en sections telles, que, dans la longueur d'une section : 1° la pente ou rampe ne change pas; 2° qu'il n'y ait que des remblais ou des déblais.

Soit, par exemple, une section en remblai et représentons en plan (*fig.* 64) son axe $A_0 A_n$, les deux arêtes $B_0 B_n$, $C_0 C_n$, équi-

Fig. 64.



distantes de l'axe, qui limitent la plate-forme de la route et les lignes plus ou moins irrégulières $D_0 D_n$, $E_0 E_n$ d'intersection avec le sol.

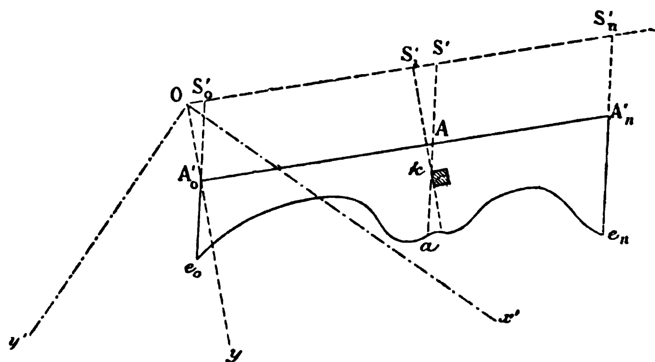
Considérons le profil en long (*fig.* 65) correspondant $e_0 A'_0 e_n A'_n$, *à l'échelle du dessin,* où les hauteurs et largeurs sont à une échelle différente de celle des longueurs et où, par suite, les pentes et rampes sont amplifiées; soit i l'inclinaison de l'axe du profil, *mesurée sur le dessin*, c'est-à-dire amplifiée.

Pour déterminer la valeur du remblai compris entre les profils $e_0 A'_0$ et $e_n A'_n$, soit k un point quelconque pris à l'intérieur du con-

tour $e_0 A'_0 e_n A'_n$ formé par : 1° l'axe $A'_0 A'_n$ de la voie ; 2° la ligne d'intersection $e_0 a e_n$ avec le sol ; 3° les profils extrêmes $e_0 A'_0$, $e_n A'_n$, et ω un élément d'aire infiniment petit, par exemple rectangulaire, tracé autour du point k.

Par ce point, menons le profil en travers, c'est-à-dire vertical akA. Comme nous nous bornerons à la première approximation, ce profil sera un trapèze isoscèle BCDE (*fig.* 63, p. 500). Prolongeons les talus DB et EC jusqu'à leur rencontre en S ; le lieu des points S sera sur le profil en long (*fig.* 65) une parallèle $S'_0 S'_n$ à l'axe de la voie. Représentons le point k sur le profil en travers (*fig.* 63) et menons par ce point l'horizontale $\beta k \gamma$.

Fig. 65.



Le volume de terre projeté sur le profil en long suivant l'élément de surface ω, indiqué par des hachures, a pour expression

$$\omega \times \beta\gamma = 2\omega \times k\gamma = 2\omega \times kS \tang \varphi,$$

φ étant l'inclinaison donnée, des talus sur la verticale. La ligne kS est aussi représentée sur le profil en long par la verticale kS'. Du point k (*fig.* 65) menons kS'_1 perpendiculaire à $S'_0 S'_n$. On aura

$$kS = kS' = \frac{kS'_1}{\cos i} = \frac{y}{\cos i},$$

en posant $y = kS'_1$.

Donc le volume de l'élément projeté en ω est

$$\frac{2 \tang \varphi}{\cos i} \omega y,$$

et le volume total du remblai projeté suivant $e_0 A'_0 e_n A'_n$ est

$$\frac{2 \tang \varphi}{\cos i} \Sigma \omega y.$$

Mais la somme indiquée n'est autre que le moment statique de l'aire $A'_0 e_0 e_n A'_n$ par rapport à la droite $S'_0 S'_n$.

Si donc on fait parcourir au style de la tige du planimètre le contour de cette aire, pendant que son autre extrémité parcourt la ligne $S'_0 S'_n$ et qu'on note les divisions u'_2, u''_2 de la roulette D_2 (en se servant du planimètre à trois roulettes) qui sont en face du vernier, au début et à la fin du mouvement, et qu'on fasse la différence $u''_2 - u'_2 = u$, on aura (§ 7)

$$\Sigma \omega y = 0{,}6 u,$$

et le volume est, par suite,

$$1{,}2 \frac{\tang \varphi}{\cos i} u.$$

Ceci est le volume réduit aux échelles du dessin. Mais, si l'échelle des longueurs est $1 : m$ et l'échelle commune des largeurs et des hauteurs $1 : n$, le volume vrai sera

$$1{,}2 \times n^2 m \times \frac{\tang \varphi}{\cos i} u.$$

Ainsi le seul calcul à faire consiste à multiplier le nombre u : 1° par le facteur $\frac{\tang \varphi}{\cos i}$ variable d'une des sections à l'autre dans lesquelles on a divisé le profil en long; 2° la somme des produits ainsi obtenus pour la longueur totale du projet, par le nombre $1{,}2 \times n^2 m$ commun à toutes les sections.

§ 10.

APPLICATION AU MOUVEMENT DES TERRES. — Pour le mouvement des terres on a à chercher aussi le centre de gravité du volume de chaque section. Dans les mêmes limites d'approximation, on pourrait, pour cet objet, utiliser le planimètre à trois roulettes de la manière suivante.

Par le point A'_0 (*fig.* 65, p. 502) du profil en long, menons une

perpendiculaire à $S'_n S'_0$ et rapportons les points k de l'aire $e_0 A'_0 e_n A'_n$ à l'axe $S'_0 S'_n$ pris comme axe des x et à cette perpendiculaire prise pour axe des y. Soient x, y les coordonnées du point k.

Si ξ et η sont les coordonnées du centre de gravité du volume du remblai qui vient d'être calculé, on aura, ce volume étant proportionnel à $\Sigma\omega y$,

$$\xi\,\Sigma\omega y = \Sigma\,\omega x y, \quad \eta\,\Sigma\,\omega y = \Sigma\,\omega y^2,$$

et ces équations, telles qu'elles sont, fournissent ξ à l'échelle des longueurs et η à celle des hauteurs, soit la vraie position du centre de gravité sur le dessin sans réduction d'échelle.

Le facteur $\Sigma\omega y$ vient d'être déterminé à l'aide de la roulette D_2; on a

$$\Sigma\,\omega y = 0{,}6\,u.$$

La somme $\Sigma\omega y^2$ est le moment d'inertie de l'aire plane $e_0 A'_0 e_n A'_n$ par rapport à l'axe Ox. Elle est donc fournie par la roulette D_3. Quant à $\Sigma\omega x y$, on peut écrire

$$\Sigma\omega x y = \tfrac{1}{4}\left[\Sigma\omega\,\overline{(x+y)}^2 - \Sigma\omega\,\overline{(x-y)}^2\right].$$

Si l'on mène les bissectrices Ox' et Oy' des axes, les distances du point k à ces bissectrices sont respectivement

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \frac{x+y}{\sqrt{2}}.$$

Donc, si $I_{x'}$ et $I_{y'}$ sont les moments d'inertie de l'aire $e_0 A'_0 e_n A'_n$ par rapport à Ox' et Oy', on aura

$$I_{y'} = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\omega\,\overline{(x+y)}^2, \quad I_{x'} = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\omega\,\overline{(x-y)}^2;$$

$I_{x'}$, $I_{y'}$ sont donc fournis par deux nouvelles opérations de l'intégrateur à l'aide de la roulette D_3 en promenant le style M sur le pourtour du profil en long et l'autre extrémité de la tige désignée par AM dans la théorie de l'intégrateur, successivement sur Ox' et Oy'. Donc

$$\Sigma\omega x y = \tfrac{1}{2}(I_{y'} - I_{x'}).$$

On a donc les coordonnées du centre de gravité ξ et η du remblai.

§ 11.

REMARQUE AU SUJET DU DÉVELOPPEMENT MÉCANIQUE D'UNE FONCTION EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE. — Dans son Mémoire de 1856, Amsler indique aussi un moyen de déterminer mécaniquement les coefficients de la série de Fourier qui représenterait l'ordonnée d'une portion de courbe donnée, tracée sur le papier. Le principe est analogue à celui du § 1. Mais, si x est l'abscisse de la courbe, il faut qu'à chaque inclinaison α de la tige corresponde pour l'axe de la roulette une inclinaison β qui soit liée à α non plus par la relation

$$\beta = a\alpha + b,$$

mais par celle

$$\beta = a\alpha + a'x + b.$$

On peut obtenir ce résultat en plaçant à l'extrémité A de la tige une roue folle sur l'axe A et assujettie à rouler sur l'axe des x ou une parallèle à cet axe, pendant que le point M décrit la courbe donnée, et reliant cette roue à une roue concentrique *calée* sur l'axe, par un train épicycloïdal. Mais, comme cette ingénieuse disposition, qui peut être réalisée de diverses façons parmi lesquelles Amsler en indique une, n'a pas, à notre connaissance, reçu jusqu'ici la sanction de la pratique, nous nous bornerons à l'indiquer et à renvoyer, pour le détail, au Mémoire d'Amsler.

NOTE III.

SUR LES COURBES FUNICULAIRES, PARTICULIÈREMENT CELLES D'ÉGALE RÉSISTANCE.

§ 1.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES COURBES FUNICULAIRES D'APRÈS LEUR DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE (¹). — Soient AB (*fig.* 66, p. 507) une courbe funiculaire d'un système de forces se succédant d'une manière continue, relativement à un pôle O, et ab la courbe de ces forces.

Soit M un point de la première courbe; par le pôle O menons un rayon vecteur Om parallèle à la tangente en M à la courbe funiculaire; nous déterminons ainsi (§ 45 *bis*) le point m de la *courbe des forces* correspondant au point M.

Soient, de même, M′ un point infiniment voisin de M et m' son correspondant sur la courbe des forces.

L'élément mm' représentera en grandeur, direction et sens la force qui agit sur l'élément MM′ de la courbe funiculaire. Désignons par s l'arc AM par ds l'élément MM′, par Fds la force qui y agit.

Soient x, y les coordonnées du point M; ξ, η les coordonnées de son correspondant m par rapport à deux axes rectangulaires quelconques Cx, Cy;

Soient de même $x + dx$, $y + dy$ et $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ les coordonnées des points correspondants M′ et m'.

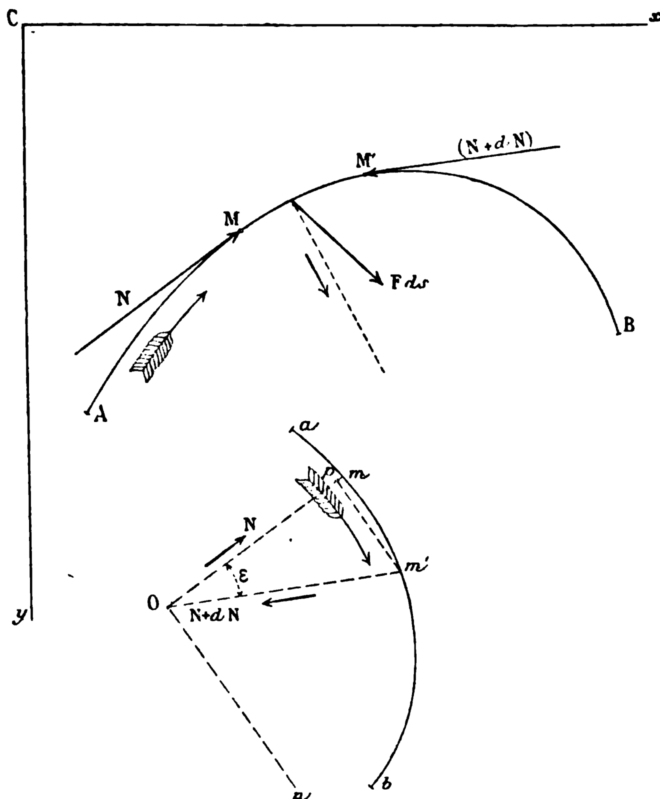
Désignons enfin par N le rayon polaire Om compté positivement de O vers m, et par α l'angle qu'il fait avec l'axe des x. Si l'on écrit que les projections sur les deux axes de coordonnées du contour fermé Omm' sont nulles, on obtient les deux équations

$$-d\mathrm{N}\cos\alpha + d\xi = 0, \quad -d\mathrm{N}\sin\alpha + d\eta = 0.$$

(¹) *Voir* § 45 *bis*.

Or, puisque mm' représente la force $F\,ds$ en grandeur, direction et sens, les projections de cette force, que nous appellerons $X\,ds$, $Y\,ds$ sont respectivement égales à $d\xi$ et à $d\eta$.

Fig. 66.



D'autre part, le rayon Om étant parallèle à la tangente à la courbe funiculaire en M, on a

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}.$$

Par suite, les deux équations ci-dessus donnent, en divisant par ds,

$$(1)\qquad \frac{dN\,\dfrac{dx}{ds}}{ds} = X, \quad \frac{dN\,\dfrac{dx}{ds}}{ds} = Y,$$

qui peuvent être considérées comme représentant les courbes funiculaires des forces données F.

Car, si on les intègre, et qu'entre les deux équations intégrales on élimine l'inconnue auxiliaire N, on aura une équation entre les coordonnées x et y.

On peut donner à ces équations une autre forme souvent commode.

Au lieu de projeter le triangle Omm' sur les axes de coordonnées, projetons-le sur le rayon Om compté de O vers m et sur la perpendiculaire à ce rayon, c'est-à-dire sur une parallèle à la normale à la courbe funiculaire en M, comptée dans le sens positif que nous adoptons pour cette normale, sens tel que la normale parallèle à Cy ait pour sens positif, celui des y positifs.

On aura, en désignant par p la projection du point m' sur le rayon Om et par ε l'angle infiniment petit des rayons Om et Om',

$$N - (N + dN)\cos\varepsilon + pm = 0, \quad -(N + dN)\sin\varepsilon + pm' = 0,$$

ou, en négligeant les infiniment petits du second ordre par rapport à ceux du premier, ce qui donne $\cos\varepsilon = 1$, $\sin\varepsilon = \varepsilon$,

$$-dN + pm = 0, \quad -N\varepsilon + pm' = 0.$$

Mais, si $F_s ds$ et $F_n ds$ sont les projections de la force $F\,ds = mm'$ sur la tangente et la normale à la courbe funiculaire en M, on a

$$mp = F_s\,ds, \quad pm' = F_n\,ds;$$

d'où, en divisant par ds et observant que ε est l'angle des tangentes en M et en M' à la courbe funiculaire, que, par suite, $\frac{\varepsilon}{ds}$ est la courbure de cette courbe au point M, courbure que nous désignerons par $\frac{1}{\rho}$,

$$(2) \qquad \frac{dN}{ds} = F_s, \quad \frac{N}{\rho} = F_n.$$

§ 2.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES COURBES FUNICULAIRES D'APRÈS LEUR DÉFINITION MÉCANIQUE. — On vérifie de suite, par ce qui précède, que si l'on regarde la courbe AB comme une ligne matérielle parfaite-

ment flexible, fixée en ses extrémités et soumise à l'action de forces données F ds : 1° elle sera en équilibre; 2° la pression positive ou négative qu'elle supporte en chaque point M est représentée par le rayon polaire correspondant Om. En effet, pour que la courbe supposée flexible soit en équilibre, il faut et il suffit que chacun de ses éléments MM′ soit en équilibre sous l'influence de la force F ds qui le sollicite et des pressions inconnues qu'il supporte en ses extrémités M et M′.

Si l'on désigne ces pressions par N et N + dN, il faut donc et il suffit que les trois forces

$$N,\ N + dN \text{ et } F\,ds$$

forment un triangle tel que Omm', ou que les sommes de leurs projections sur deux axes soient nulles, ce qui conduit aux équations (1) ou (2) suivant qu'on projette sur les axes de coordonnées ou sur la tangente et la normale à la courbe AB au point M.

§ 3.

CAS DE FORCES PARALLÈLES. — Lorsque les forces agissantes sont parallèles, la courbe des forces ab se réduit à une ligne droite et la distance du pôle à cette droite est la distance polaire de la courbe funiculaire.

Nous supposerons, pour simplifier le langage, les forces verticales.

THÉORÈME. — *Lorsque les forces qui agissent sur une courbe funiculaire sont verticales, la projection horizontale de la pression ou tension de la courbe est constante en tous ses points et égale à sa distance polaire mesurée à l'échelle des forces.*

En effet, supposons l'axe des y vertical.

Alors X = O et Y = F si l'on compte positivement les forces F parallèles à l'axe des Y, dans le sens des y positifs.

La première équation (2), dont le second membre est nul, s'intègre une fois et donne

$$N \frac{dx}{ds} = q_0 = \text{const.},$$

ce qui établit le théorème.

On tire de là

$$\frac{N}{ds} = \frac{q_0}{dx},$$

et, par suite, la seconde des équations (2) devient, à cause de $Y = F$,

$$(3) \qquad q_0 \frac{d\frac{dy}{dx}}{ds} = F,$$

où $F\,ds$ est la force agissant sur l'élément ds, c'est-à-dire que F est la force agissante *rapportée à l'unité de longueur de la courbe*.

Supposons qu'on se donne la force agissante rapportée à l'unité de longueur de la projection horizontale de la courbe, c'est-à-dire qu'on pose

$$F\,ds = P\,dx,$$

et que ce soit P qu'on se donne.

L'équation ci-dessus devient

$$q_0 \frac{d\frac{dy}{dx}}{ds} = P\frac{dx}{ds} \quad \text{ou} \quad q_0 d\frac{dy}{dx} = P\,dx$$

ou

$$(3') \qquad q_0 \frac{d^2y}{dx^2} = P.$$

L'équation (3) ou celle (3′) représente l'équation différentielle des courbes funiculaires des forces parallèles. On emploiera l'une ou l'autre suivant les données du problème. Elles sont du second ordre. Elles comprennent la constante arbitraire q_0 qui représente la distance polaire, ou, ce qui revient au même, la valeur constante de la projection horizontale de la pression ou tension, suivant que q_0 est positif ou négatif. En les intégrant on introduit deux nouvelles constantes arbitraires, de sorte qu'on a bien le total de trois constantes que nous avons reconnu devoir entrer dans la définition de tout polygone, et par suite de toute courbe funiculaire.

§ 4.

COURBE FUNICULAIRE RÉPONDANT A UNE CHARGE VERTICALE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE SUIVANT UNE HORIZONTALE. — Supposons la charge verticale uniformément répartie suivant une horizontale, par exemple suivant le tablier horizontal d'un pont suspendu ou supporté. Cela signifie que P est constant; par suite, en intégrant deux fois de suite l'équation (3′), on a

$$q_0 y = \frac{px^2}{2} + Bx + C, \tag{4}$$

$P = p$ étant la charge constante par mètre et B et C deux constantes.

On voit, comme nous le savions, que la courbe est une parabole à axe vertical tournant sa concavité vers le bas ou vers le haut, suivant que q_0 est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que la courbe est pressée ou tendue (supportée ou suspendue).

On peut disposer des trois constantes q_0, B, C, de façon à faire passer la parabole par trois points donnés. En prenant le sommet pour origine et la tangente au sommet pour axe des x, l'équation se réduit à

$$q_0 y = \frac{px^2}{2}. \tag{4′}$$

Si $2a$ est la distance des points d'appui de niveau et f la flèche, pour $x = a$ on a $y = f$, d'où la poussée

$$q_0 = \frac{pa^2}{2f}. \tag{4″}$$

§ 5.

CHAINETTE DE SECTION CONSTANTE. — On appelle *chaînette* la courbe d'équilibre d'une ligne matérielle de section constante suspendue ou supportée à ses extrémités. Ici, c'est le poids par unité de longueur de la chaînette ou courbe funiculaire qui est constant.

Appelons-le p. On devra employer l'équation (3) en faisant $F = p$.

On aura

$$q_0 \frac{d\frac{dy}{dx}}{ds} = p.$$

Soit

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

On a d'ailleurs

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2};$$

d'où

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{p}{q_0}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{p}{q_0}dx$$

et, en intégrant,

$$L(y' + \sqrt{1+y'^2}) = \frac{p}{q_0}(x - x_0),$$

x_0 étant une constante arbitraire, ou

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{p}{q_0}(x-x_0)}.$$

Par suite

$$-y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{-\frac{p}{q_0}(x-x_0)},$$

d'où

$$y' = \frac{e^{\frac{p}{q_0}(x-x_0)} - e^{-\frac{p}{q_0}(x-x_0)}}{2},$$

qui montre que le point d'abscisse x_0 est celui où la tangente est horizontale, et

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{e^{\frac{p}{q_0}(x-x_0)} + e^{-\frac{p}{q_0}(x-x_0)}}{2}.$$

La première, où l'on remplace y' par sa valeur $\frac{dy}{dx}$, étant intégrée, donne

$$(5) \qquad y = \frac{q_0}{p}\,\frac{e^{\frac{p}{q_0}(x-x_0)} + e^{-\frac{p}{q_0}(x-x_0)}}{2} + C.$$

C'est l'équation de la courbe où entrent les trois constantes arbitraires q_0, p, C dont on peut disposer de façon à faire passer la courbe par trois points donnés.

On peut aussi calculer la longueur d'une portion quelconque de la courbe.

A cause de

$$ds = dx\sqrt{1+y'^2},$$

l'avant-dernière équation multipliée par dx donne

$$ds = \frac{e^{\frac{p}{q_0}(x-x_0)} + e^{-\frac{p}{q_0}(x-x_0)}}{2}\,dx,$$

d'où

(6) $$s = \frac{q_0}{p}\,\frac{e^{\frac{p}{q_0}(x-x_0)} - e^{-\frac{p}{q_0}(x-x_0)}}{2} + C',$$

C′ étant une constante qui dépend du point à partir duquel on compte les arcs.

Supposons qu'on les compte à partir du point d'abscisse x_0 où la tangente est horizontale. On devra avoir $s = 0$ pour $x = x_0$; d'où $C' = 0$ et

(6′) $$s = \frac{q_0}{p}\,\frac{e^{\frac{p}{q_0}(x-x_0)} - e^{-\frac{p}{q_0}(x-x_0)}}{2}.$$

Supposons en outre qu'on prenne pour origine des coordonnées le point où la tangente est horizontale, ce qui donnera $x_0 = 0$, $C = -\frac{q_0}{p}$; l'équation de la courbe sera

(7) $$y = \frac{q_0}{p}\,\frac{e^{\frac{p}{q_0}x} + e^{-\frac{p}{q_0}x} - 2}{2}.$$

En déplaçant l'axe des x de la quantité $\frac{q_0}{p}$, on la ramène à la forme

(8) $$\frac{p}{q_0}y = \frac{e^{\frac{p}{q_0}x} + e^{-\frac{p}{q_0}x}}{2}.$$

Il n'y entre que le paramètre $\frac{p}{q_0}$, de sorte que toutes les chaînettes sont semblables.

§ 6.

COURBES FUNICULAIRES D'ÉGALE RÉSISTANCE SOUS L'ACTION DE CHARGES VERTICALES. — L'équation (3′)

(9) $$q_0\frac{d^2y}{dx^2} = P.$$

est l'équation différentielle des courbes funiculaires de distance polaire q_0, d'une charge verticale constante ou variable P par l'unité de longueur de l'horizontale Cx.

Supposons que P ne représente que les charges verticales, quelles qu'elles soient, autres que le poids propre de l'arc et mettons en évidence ce dernier.

Soient Π le poids spécifique ou poids de l'unité de volume de la matière dont l'arc est formé et S sa section constante ou variable au point défini par les coordonnées x et y. Le poids d'une portion ds de l'arc sera

$$\Pi S ds = \Pi S \frac{ds}{dx} dx.$$

Donc, rapporté à l'unité de longueur de l'axe des x, il est $\Pi S \frac{ds}{dx}$ et l'équation (9) devient

$$(10) \qquad q_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = P + \Pi S \frac{ds}{dx}.$$

Cherchons, la condition pour que l'arc soit d'égale résistance, c'est-à-dire pour que la tension ou pression $\frac{N}{S}$ par unité de surface qu'il supporte soit une constante donnée R_0 positive ou négative selon que N est une pression ou une tension. Ainsi l'on doit avoir

$$(11) \qquad \frac{N}{S} = R_0$$

La projection horizontale de la pression N exercée par la partie de gauche sur celle de droite est constante et égale à la distance polaire q_0

$$N \frac{dx}{ds} = q_0.$$

et par suite, à cause de (11),

$$(12) \qquad S \frac{dx}{ds} = \frac{N \frac{dx}{ds}}{R_0} = \frac{q_0}{R_0} = S_0,$$

qui indique que : *dans un arc d'égale résistance, sous l'influence de charges verticales, la projection verticale de la section de l'arc est une constante.*

Désignons par S_0 cette constante qui n'est autre que la section au point le plus élevé ou le plus bas de l'arc ; l'équation (10) de-

viendra

$$q_0 \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P} + \Pi \mathrm{S}_0 \frac{ds^2}{dx^2},$$

ou, à cause de $ds^2 = dx^2 + dy^2$,

$$\frac{q_0}{\Pi \mathrm{S}_0} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathrm{P}}{\Pi \mathrm{S}_0} + 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

ou, si l'on veut mettre en évidence la résistance R_0 admise par unité de surface, on a, à cause de (12),

$$(13) \qquad \frac{\mathrm{R}_0}{\Pi} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathrm{P}}{\Pi \mathrm{S}_0} + 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

§ 7.

APPLICATION A UN ARC D'ÉGALE RÉSISTANCE SOUS L'ACTION D'UNE CHARGE UNIFORME. — Si le poids propre de l'arc est négligeable, la courbe funiculaire est parabolique. On en a la poussée q_0 par la formule (4″) du § 4.

Par suite, la pression ou tension N est connue en chaque point, puisque sa projection horizontale constante est q_0 et l'on peut déterminer la section S en chaque point de façon que $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{S}} = \mathrm{R}_0$.

Si l'on tient compte du poids de l'arc, il faut intégrer l'équation (13) où P se réduit à une constante p.

Posons

$$(14) \qquad \frac{\mathrm{R}_0}{\Pi} = r_0, \quad \frac{\mathrm{P}}{\Pi \mathrm{S}_0} + 1 = \frac{p}{\Pi \mathrm{S}_0} + 1 = \alpha,$$

r_0 étant une constante connue et α une constante indéterminée puisque la section S_0 au sommet n'est pas connue *a priori*. Cette constante est évidemment positive. Si l'arc ne porte que son propre poids, on a $p = 0$, $\alpha = 1$; on obtient alors la chaînette dite d'égale résistance qu'il ne faut pas confondre avec la chaînette de section constante (§ 5) et qui a été étudiée autrefois par M. Ossian Bonnet.

Quel que soit p, avec les notations (14), l'équation (13) devient

$$(14\ bis) \qquad r_0 \frac{d^2y}{dx^2} = \alpha + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Soit $y = z\sqrt{\alpha}$, on aura

$$\frac{r_0}{\sqrt{\alpha}}\frac{d^2z}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

ou, en appelant z' la dérivée première de z,

$$\frac{dz'}{1+z'^2} = \frac{\sqrt{\alpha}}{r_0}dx;$$

d'où

$$\frac{x\sqrt{\alpha}}{r_0} = \operatorname{arc\,tang} z' \quad \text{ou} \quad x\frac{\sqrt{\alpha}}{r_0} = \operatorname{arc\,tang}\frac{y'}{\sqrt{\alpha}},$$

en posant $y' = \frac{dy}{dx}$.

La constante d'intégration est nulle, si l'on compte les x à partir du point de la courbe où la tangente est horizontale.

On tire de là

$$y' = \sqrt{\alpha}\operatorname{tang} x\frac{\sqrt{\alpha}}{r_0} \quad \text{ou} \quad dy = \sqrt{\alpha}\frac{\sin x\frac{\sqrt{\alpha}}{r_0}}{\cos x\frac{\sqrt{\alpha}}{r_0}}dx,$$

(16) $$y = -r_0 \,\mathrm{L}\cos x\frac{\sqrt{\alpha}}{r_0}.$$

La constante d'intégration est encore nulle si l'on prend l'origine des coordonnées sur la courbe.

Soient (*fig.* 67, p. 517) AOA′ un arc de la courbe considérée, $2a$ sa portée AA′ et f sa flèche OI. On devra avoir $y = f$ pour $x = a$, ou

$$f = -r_0 \,\mathrm{L}\cos\frac{a}{r_0}\sqrt{\alpha},$$

soit

$$f = -\frac{\mathrm{R}_0}{\Pi}\mathrm{L}\cos\frac{\Pi a}{\mathrm{R}_0}\sqrt{\alpha}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{L}\cos\frac{\Pi a}{\mathrm{R}_0}\sqrt{\alpha} = -\frac{f\Pi}{\mathrm{R}_0}$$

ou, en prenant les logarithmes ordinaires,

(17) $$\log\cos\frac{\Pi a}{\mathrm{R}_0}\sqrt{\alpha} = -\frac{f\Pi}{\mathrm{R}_0}\log e.$$

Le second membre est connu. On trouve immédiatement, dans les Tables de logarithmes, l'angle correspondant $\frac{\Pi a}{\mathrm{R}_0}\sqrt{\alpha}$.

Soit θ_0 cet angle exprimé en fraction de 2ϖ. On en conclut

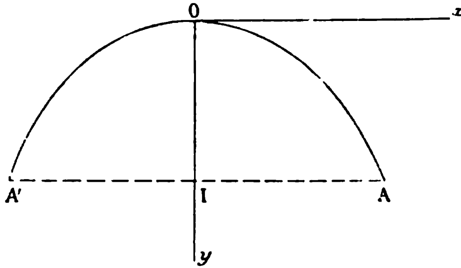
$$\sqrt{\alpha} = \frac{\theta_0 R_0}{\Pi a},$$

(17 a) $$\alpha = \frac{\theta_0^2 R_0^2}{\Pi^2 a^2} = 1 + \frac{p}{\Pi S_0},$$

ce qui donne la section S_0 à adopter au sommet de l'arc. On a ensuite pour une section quelconque S

$$S \frac{dx}{ds} = S_0, \quad S = S_0 \frac{ds}{dx} = S_0 \sqrt{1 + y'^2},$$

Fig. 67.



Or de (15) on tire

$$y' = \sqrt{\alpha} \operatorname{tang} x \frac{\sqrt{\alpha}}{r_0}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \alpha \operatorname{tang}^2 x \frac{\sqrt{\alpha}}{r_0},$$

qui permettrait de calculer S. Mais il est préférable de tracer la courbe et d'observer que la projection d'une section quelconque S sur la section verticale est constante et égale à S_0.

Si donc S_0 est, à une échelle convenable, représentée par une droite, on trouve immédiatement les droites qui, à la même échelle, représentent toutes les sections.

La compression par unité de surface étant R_0, la compression totale de la section S_0 est $R_0 S_0$. Telle est donc aussi la poussée q_0 de l'arc.

§ 8.

APPLICATION A UNE VOUTE EN MAÇONNERIE D'ÉGALE RÉSISTANCE. — Si l'on admet que le remblai et les surcharges que supporte une voûte en maçonnerie puissent être remplacés par une surcharge uni-

forme p, les résultats qui précèdent s'appliquent immédiatement. Considérons, comme on le fait d'habitude, une portion de voûte cylindrique ayant une longueur de génératrice égale à l'unité.

Alors, dans les formules qui précèdent, il suffit de remplacer les sections S_0 et S au sommet et en un point quelconque par les épaisseurs des joints en ces points.

Ayant donc déterminé l'angle θ_0 en observant que Π est le poids du mètre cube de maçonnerie et R_0 la pression qu'on veut admettre par mètre carré, l'équation (17_a) donne l'épaisseur S_0 à la clef. Dans cette équation p est la charge uniforme qu'on substitue au remblai et à la charge permanente.

Ayant S_0, on trouvera l'épaisseur S d'un joint quelconque, comme il vient d'être dit.

On substituera à l'intrados théorique celui qui est donné en prenant les épaisseurs par excès.

L'intrados et l'extrados ainsi déterminés approximativement, on vérifiera si effectivement la voûte résistera aux charges réelles qu'elle a à supporter. Sans anticiper sur les développements que nous aurons à donner à ce sujet dans la deuxième Partie de cet Ouvrage, nous pouvons dire que, suivant la méthode de Méry qu'on peut simplifier encore, on admet qu'une voûte résiste si l'on peut tracer un polygone funiculaire ou polygone des pressions coupant un certain nombre de joints normaux à l'intrados (suffisamment rapprochés) dans le tiers moyen de leurs longueurs.

On peut, sans inconvénient, aux joints normaux substituer des joints verticaux fictifs, ce qui rend la construction extrêmement simple.

Remarque. — Si l'on voulait considérer le remblai réel limité à une horizontale ou y joindre une surcharge constante, il est clair que la charge totale à ajouter au poids propre de la voûte, au lieu d'être une simple constante, serait une fonction linéaire de y; et, au lieu de l'équation (14 *bis*), on aurait à intégrer une équation de la forme

$$r_0 \frac{d^2y}{dx^2} = \alpha + \beta y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

ce qui est facile en posant

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = y'\frac{dy'}{dy} = \frac{d\,\frac{1}{2}y'^2}{dy};$$

d'où

$$\frac{r_0}{2}\frac{d^2y'^2}{dy} = \alpha + \beta y + y'^2,$$

équation linéaire relative à y'^2 qu'on peut intégrer.

Ayant y'^2 ou y', exprimé en y sous la forme

$$y' = \varphi(y) = \frac{dy}{dx},$$

on en tire

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)} + \text{const.}$$

Mais les résultats seraient compliqués comme calculs, et, eu égard aux incertitudes qui règnent sur la façon dont se transmettent les pressions dans une voûte, sur le rôle des mortiers, sur les effets du décintrement, etc., ils ne seraient pas plus approchés de la vérité que ceux très simples qui précèdent.

§ 9.

COURBES NE SUPPORTANT QUE DES PRESSIONS NORMALES. — Si une courbe flexible ne supporte que des pressions normales, les équations (2) deviennent, si l'on y fait $F_s = 0$, $F_n = F$,

$$N = N_0 = \text{const.}, \quad \frac{N_0}{\rho} = F.$$

THÉORÈME. — *Lorsqu'une courbe funiculaire ne porte que des pressions normales : 1° sa pression ou tension est constante en tous ses points; 2° sa courbure en chaque point est proportionnelle à la force qui agit en ce point (rapportée à l'unité de longueur de la courbe).*

Corollaire. — La courbe funiculaire ou courbe d'équilibre répondant à une force normale constante est la circonférence.

Si r_0 est le rayon de la circonférence et $F = p$ la force normale, on a

$$N_0 = pr_0,$$

pour la pression ou tension que supporte l'arc en chacun de ses points, résultat déjà trouvé.

§ 10.

COURBE D'ÉGALE RÉSISTANCE SOUS L'INFLUENCE D'UNE PRESSION NORMALE UNIFORME. — Considérons les deux systèmes d'équations (2) et (3) et écrivons la première de chacun d'eux, c'est-à-dire les équations d'équilibre en projection sur l'axe des x supposé horizontal et sur la tangente à la courbe. On aura

$$\frac{d\mathrm{N}\frac{dx}{ds}}{ds} = \mathrm{X}, \quad \frac{d\mathrm{N}}{ds} = \mathrm{F}_s.$$

Supposons une courbe soumise à son propre poids, qui est $\Pi\mathrm{S}$ par unité de longueur de l'arc et à une pression normale p par unité de longueur de l'arc. La projection de la première de ces forces sur l'axe des X est nulle; il en est de même de celle de la seconde sur la tangente à la courbe, en sorte qu'avec le sens convenu de la normale positive

$$\mathrm{X} = -p\frac{dy}{ds}, \quad \mathrm{F}_s = \Pi\mathrm{S}\frac{dy}{ds}.$$

D'ailleurs, la courbe étant d'égale résistance,

$$\mathrm{N} = \mathrm{R}_0\mathrm{S}.$$

Donc

$$\mathrm{X} = -p\frac{dy}{ds}, \quad \mathrm{F}_s = \frac{\Pi}{\mathrm{R}_0}\mathrm{N}\frac{dy}{ds},$$

et les équations de la courbe sont

$$\frac{d\mathrm{N}\frac{dx}{ds}}{dy} = -p, \quad \frac{d\mathrm{N}}{dy} = \frac{\Pi}{\mathrm{R}_0}\mathrm{N}.$$

La seconde donne

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}'_0\, e^{\frac{\Pi}{\mathrm{R}_0}y},$$

en désignant par N'_0 la compression aux naissances de l'arc.

La première donne

$$(\mathrm{N} - \mathrm{N}'_0)\frac{dx}{ds} = -py$$

ou

$$N'_0 \frac{dx}{ds}\left(e^{\frac{H}{K_0}y}-1\right)=-py,$$

$$N'_0\left(e^{\frac{H}{K_0}y}-1\right)=-py\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

équation d'où l'on tirerait $\frac{dy}{dx}$ en fonction de y et, par suite, x en fonction de y par une quadrature.

Mais le résultat est plus complexe que quand il s'agit de forces verticales et peu propre aux applications.

NOTE III *bis*.

TRACÉ D'UN ARC DE PARABOLE. — Nous avons été conduit souvent à résoudre ce problème élémentaire dont nous rappelons ici la solution : *Tracer un arc de parabole connaissant deux points* A *et* B *de la courbe ainsi que le point* C *où elle est rencontrée par le diamètre conjugué à la corde* AB.

Première solution. — Soit (*fig.* 68, p. 523) I le milieu de la corde AB, de sorte que IC est le diamètre conjugué à cette corde, diamètre que, pour simplifier le langage, nous regardons comme vertical.

Construisons le parallélogramme AA′BB′, dont les côtés verticaux sont égaux à IC et prenons les milieux k et k' des demi-cordes AI et IB.

Ceci fait, divisons chacun des côtés opposés AA′ et BB′ du parallélogramme en un même nombre de parties égales, nombre d'autant plus grand qu'on veut obtenir plus d'exactitude dans le tracé de la courbe ; on a divisé ici en quatre parties dont les longueurs égales entre elles sont désignées par

1, 2, 3, 4,

pour le côté AA′ et par

1′, 2′, 3′, 4′

pour le côté BB′.

Divisons les deux demi-cordes AI et IB dans le même nombre de parties, soit quatre, à l'aide des verticales tracées en pointillé.

Aux milieux des points de division, appliquons des forces verticales

1, 2, 3, 4

pour la partie IB et

1′, 2′, 3′, 4′

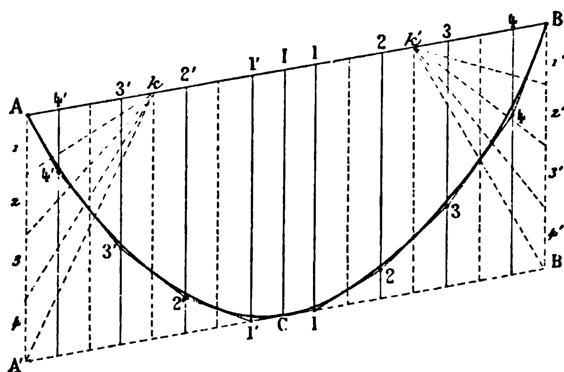
pour la partie IA, et, partant du point C, construisons :

1° Un polygone funiculaire de ces quatre dernières forces sup-

posées représentées par le polygone des forces BB', en prenant le point k' pour pôle. Je dis qu'on obtiendra ainsi un polygone CA passant par le point A;

2° Un polygone funiculaire des quatre premières forces supposées représentées par le polygone des forces AA' en prenant le point k pour pôle. Je dis qu'on obtient le polygone CB passant par le point B.

Fig. 68.



La parabole cherchée est inscrite dans le polygone complet ACB, les points de contact étant en A et B et aux points du polygone déterminés par les verticales pointillées.

Pour justifier ces assertions, concevons qu'à la suite des forces 4', 3', 2', 1' on porte à partir de B et de bas en haut les forces 1, 2, 3, 4 toutes égales entre elles. Appelons B'' l'extrémité (non représentée) de la ligne ainsi obtenue. Il est clair que les rayons polaires issus de k' et qui aboutiraient aux divers points de division des forces ainsi portées sur BB'' sont respectivement parallèles aux rayons correspondants issus de k et aboutissant au point de division de AA'.

De là on conclut que les deux polygones funiculaires AC et CB que l'on a tracés forment ensemble le polygone funiculaire de pôle k' d'un système de huit forces égales qui seraient portées sur la verticale B'BB'' (1). Or je dis que ce polygone funiculaire passe

(1) On aurait pu le tracer ainsi : le mode adopté est un peu plus commode; il est imité d'une disposition souvent employée par Eddy.

par les trois points donnés A, C, B. En effet, le lieu des pôles des polygones funiculaires des charges B′BB″, passant par les deux points A et B, est (§ 43, Th. III) une parallèle à AB menée par le milieu de B′BB″ (puisqu'ici toutes les forces sont égales), c'est-à-dire par le point B. C'est donc la droite AB elle-même.

Le lieu des pôles des polygones de ces mêmes forces, dont le premier côté passe par A et le côté du milieu par C, est de même une parallèle à AC menée par le milieu de la portion du polygone des forces répondant à la portion AC du polygone funiculaire, c'est-à-dire par le milieu de BB′. Or une parallèle à AC menée par le milieu de BB′ rencontre IB en son point milieu k'. C'est donc bien là le pôle du polygone funiculaire relatif aux huit charges égales entre elles considérées, et passant par les points A, C, B. Si l'on regarde à présent la charge totale B′B″ comme uniformément répartie suivant AB, la courbe funiculaire de pôle k' correspondante sera (§ 45 *bis*) inscrite dans le polygone, aux points définis par les verticales pointillées et aux points A et B.

Cette courbe passera donc aussi par les points A, B, C. Nous savons d'ailleurs que c'est une parabole à axe vertical; c'est donc la parabole cherchée et elle peut être ainsi tracée avec une très grande exactitude.

Remarque. — On arriverait aussi au résultat en prenant, au lieu des points k et k', le point I milieu de AB pour pôle commun aux deux portions de polygone AC et CB; mais à la condition de doubler les lignes AA′ et BB′, c'est-à-dire de remplacer le parallélogramme ABA′B′ par un parallélogramme ayant toujours AB pour un de ses côtés et ayant 2IC pour côté vertical.

Deuxième solution. — On peut, si on le préfère, faire le tracé en n'utilisant que les propriétés géométriques élémentaires de la parabole.

Soit toujours I (*fig.* 69) le milieu de la corde AB, de sorte que IC est le diamètre conjugué à cette corde. Si, sur le prolongement de IC, on prend CJ = IC, les droites AJ et BJ sont les tangentes à la courbe en A et B.

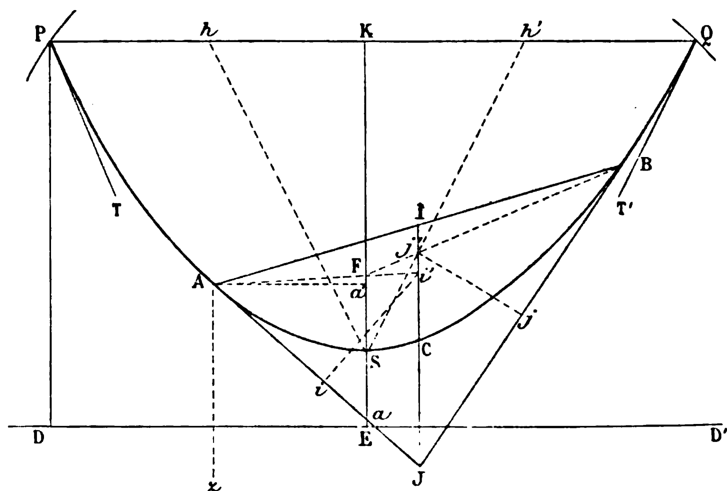
Par le milieu i de AJ, élevons une perpendiculaire à cette ligne jusqu'à sa rencontre en i' avec le diamètre IC. La droite Ai' passera par le foyer; car la tangente AJ est bissectrice de l'angle zAi'

que forme le rayon vecteur Ai' allant au foyer et une parallèle Az à l'axe de la courbe.

De même si, par le milieu j de BJ, on mène une perpendiculaire à cette ligne jusqu'à sa rencontre en j' avec le diamètre IC, la ligne Bj' passe par le foyer.

On a donc ainsi le foyer F par l'intersection des deux droites Ai' et Bj'.

Fig. 69.



En menant par F une parallèle au diamètre IC, on a l'axe de la courbe. Soit a le point où cet axe coupe la tangente AJ en l'un des points donnés A et soit a' la projection du point A sur l'axe. Le sommet S est le milieu de aa'.

Et, si l'on prend $SE = SF$, la perpendiculaire DED' à l'axe menée par le point E est la directrice.

Par suite, si l'on mène une droite quelconque PQ parallèle à DD' et à une distance arbitrairement choisie PD, puis, que du foyer comme centre, avec PD pour rayon, on décrive un arc de cercle, on déterminera deux points P et Q de la courbe. Si, par ces points, on mène des parallèles aux droites Sh, Sh', qui joignent le sommet au milieu des demi-cordes PK et KQ, on obtient les tangentes PT et QT' aux points P et Q.

On peut ainsi déterminer autant de paires de points qu'on le désire et les tangentes en ces points.

Remarque. — Si, en particulier, on donne le sommet S et les deux points symétriques P et Q, on en déduit, comme nous venons de l'indiquer, les tangentes PT et QT′ en ces points; puis, menant PD parallèle à l'axe de la courbe et faisant l'angle TPF = TPD, on obtient le foyer F d'où l'on déduit la directrice et, par suite, la construction d'un point quelconque avec la tangente correspondante.

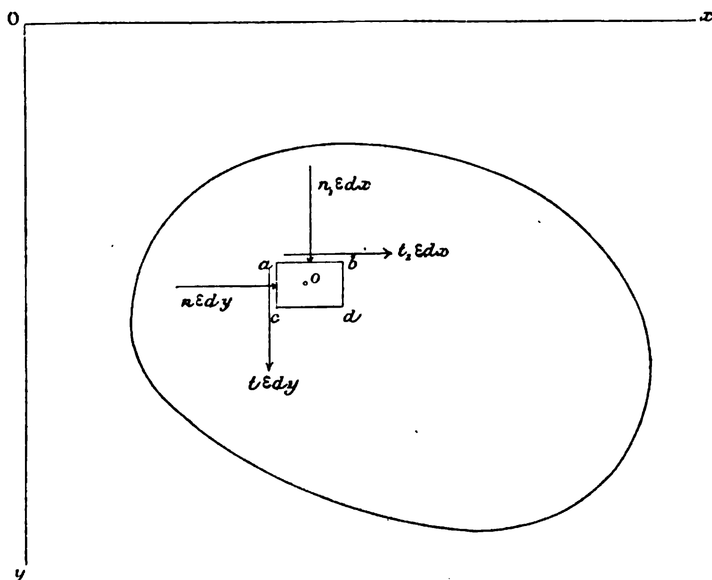
NOTE IV.

SUR LA RÉPARTITION DES PRESSIONS INTÉRIEURES DANS UN CORPS AYANT UN PLAN DE SYMÉTRIE, PARTICULIÈREMENT DANS UNE POUTRE OU UN ARC.

§ 1.

DÉFINITION DES CORPS CONSIDÉRÉS. — Nous considérons (*fig.* 70, p. 527) un corps symétrique par rapport à un plan quelconque pris pour plan des xy et que, pour simplifier le langage, nous regardons comme vertical.

Fig. 70.



Par un point quelconque a de ce plan, menons-lui une perpendiculaire jusqu'à la rencontre de cette ligne avec chacune des deux surfaces symétriques qui limitent le corps à l'avant et à l'arrière.

La longueur de cette perpendiculaire, constante ou variable avec la position du point a, est ce que nous appellerons l'*épaisseur* du corps; nous la désignons par la lettre ε, en sorte que ε est une fonction donnée des coordonnées x et y du point a.

Le corps est supposé en équilibre sous l'action de forces parallèles au plan des xy et symétriquement distribuées par rapport à ce plan.

Ces forces déterminent des pressions à l'intérieur du corps. Nous admettrons que les circonstances sont telles que ces pressions ne varient pas sensiblement le long d'une ligne ε perpendiculaire au plan de symétrie, c'est-à-dire qu'elles peuvent être regardées comme uniformément réparties le long d'une telle ligne.

Cela aura lieu : 1° *rigoureusement* si l'épaisseur ε, grande ou petite, est constante, c'est-à-dire si le corps est un cylindre droit de hauteur ε et si, de plus, toutes les forces extérieures sont uniformément réparties le long de chaque ligne ε suivant laquelle elles agissent; 2° *approximativement,* quelles que soient la forme du corps et la répartition des forces extérieures, si son épaisseur constante ou variable ε est supposée très petite.

§ 2.

ÉQUILIBRE DU PRISME RECTANGLE. — Traçons dans le plan des xy à partir du point quelconque a (*fig.* 70, p. 527) un rectangle $abcd$ dont les côtés infiniment petits $ab = dx$, $ac = dy$ sont respectivement parallèles aux axes des x et des y et considérons la portion du corps projetée suivant l'aire $abcd$: c'est un prisme ayant $abcd$ pour section droite, prisme oblique ou droit suivant que ε est constant ou variable.

Ce prisme est en équilibre sous l'action : 1° des pressions exercées sur ses quatre faces; 2° des forces extérieures telles que la pesanteur agissant sur sa masse entière.

Les forces élastiques exercées aux divers points de la face du prisme projetée suivant ac sont, par hypothèse, uniformément réparties le long de cette face. Soient donc n et t leurs composantes normale et tangentielle rapportées à l'unité de surface, la première comptée positivement si c'est une pression.

Comme la hauteur de la face est ε, et son aire εdy, la résultante

des forces normales sera $n\varepsilon dy$, celle des forces tangentielles sera $t\varepsilon dy$, et ces deux résultantes sont situées dans le plan des xy.

Les résultantes analogues qui agissent sur la face parallèle bd se déduisent des précédentes : 1° en les augmentant de leurs différentielles partielles relatives à x, puisqu'on passe de a en b en changeant x en $x + dx$ sans changer y ; 2° en les changeant de signe, puisque pour l'élément ac on a à considérer l'action qu'il subit de la part de la portion du corps située à sa gauche, tandis que pour l'élément bd, c'est celle qu'il subit de la part de la portion du corps placée à sa droite.

Ainsi, les actions sur la face ac étant

$$(a) \qquad n\varepsilon\, dy,\ t\varepsilon\, dy,$$

celles exercées sur bd sont

$$(a') \qquad -\left(n\varepsilon + \frac{\partial n\varepsilon}{\partial x}dx\right)dy,\quad -\left(t\varepsilon + \frac{\partial t\varepsilon}{\partial x}dx\right)dy.$$

On verrait de même qu'en appelant n_1 et t_1 les composantes normale et tangentielle, rapportées à l'unité de surface, de la force agissant en un point quelconque de la face projetée en ab, la résultante de toutes ces forces est située dans le plan xy et a pour composantes parallèlement aux axes des x et des y, respectivement les forces

$$(b) \qquad t_1\varepsilon\, dx,\ n_1\varepsilon\, dx,$$

et la résultante des forces exercées sur cd a de même pour composantes les précédentes changées de signes et augmentées de leurs différentielles partielles relatives à y, puisqu'on passe de a en c en changeant y en $y + dy$ sans changer x, ce qui donne

$$(b') \qquad -\left(t_1\varepsilon + \frac{\partial t_1\varepsilon}{\partial y}dy\right)dx,\quad -\left(n_1\varepsilon + \frac{\partial n_1\varepsilon}{\partial y}dy\right)dx.$$

Enfin les forces données telles que la pesanteur qui agissent sur le prisme tout entier projeté suivant $abcd$ sont de l'ordre de grandeur du volume de ce prisme, c'est-à-dire du produit $\varepsilon\, dx\, dy$.

Appelons $R_0\varepsilon\, dx\, dy$ la résultante de ces forces, laquelle est, par hypothèse, située dans le plan de symétrie et appliquée au centre

o du rectangle *abcd*. Soient

$$(c) \qquad X_0 \varepsilon\, dx\, dy, \quad Y_0 \varepsilon\, dx\, dy$$

ses composantes parallèlement aux axes.

Ceci posé, toutes les forces (a), (a'), (b), (b'), c étant situées dans le plan $x\,Oy$, pour qu'elles se fassent équilibre, il est *nécessaire* (que le corps donné soit solide, ou fluide ou de tout autre nature) qu'elles satisfassent aux conditions d'équilibre (§ 46) des systèmes invariables; il faut donc : 1° que la somme de leurs projections sur l'axe des x ou, si l'on veut, la somme de leurs composantes parallèles à cet axe soit nulle; ces composantes sont celles de gauche dans les expressions (a), (a'), (b), (b'), (c); 2° qu'il en soit de même de la somme de leurs composantes parallèles à Oy; ces composantes sont celles de droite dans les mêmes expressions; 3° que la somme de leurs moments relativement à un point quelconque du plan soit nulle. Nous prendrons pour ce point le centre o du rectangle *abcd*.

Les conditions 1° et 2° donnent immédiatement les équations

$$(1) \qquad \frac{\partial n\varepsilon}{\partial x} + \frac{dt_1\varepsilon}{\partial y} = X_0\varepsilon, \quad \frac{\partial t\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial n_1\varepsilon}{\partial y} = Y_0\varepsilon.$$

En ce qui touche les moments relativement au centre o du rectangle, observons que les forces extérieures (c) passant par ce point, leurs moments sont nuls, qu'il en est de même des moments de toutes les pressions normales.

Il suffit donc d'écrire que la somme des moments des deux forces

$$(f) \qquad t\varepsilon\, dy, \quad t_1\varepsilon\, dx$$

et de leurs analogues agissant sur les faces opposées, à savoir

$$(f') \qquad -t\varepsilon\, dy - \frac{\partial t\varepsilon}{\partial x}\, dx\, dy, \quad -t_1\varepsilon\, dx - \frac{\partial t_1\varepsilon}{\partial y}\, dx\, dy,$$

est nulle.

Or les deux forces

$$t\varepsilon\, dy, \quad -t\varepsilon\, dy$$

forment un couple dont le bras de levier est dx et dont le moment est par suite

$$-t\varepsilon\, dx\, dy,$$

le signe tenant à ce que, si t est positif, comme le suppose la figure, la rotation du couple se fait dans le sens négatif.

De même les deux forces

$$t_1 \varepsilon\, dx, \quad -t_1 \varepsilon\, dx$$

forment un couple dont le bras de levier est dy et dont le moment est

$$+\, t_1 \varepsilon\, dx\, dy.$$

Donc la somme des moments des forces (f) et de celles qui forment les premiers termes de (f') est

$$(t_1 - t)\varepsilon\, dx\, dy,$$

quantité infiniment petite du second ordre, tandis que les moments des forces formant les seconds termes de (f') seraient du troisième ordre, les forces elles-mêmes étant du second et leurs bras de levier $\frac{dx}{2}$, $\frac{dy}{2}$, du premier.

Donc, ces moments sont négligeables et l'équation obtenue en supprimant le facteur $\varepsilon\, dx\, dy$ est simplement

$$t_1 - t = 0 \quad \text{ou} \quad t_1 = t.$$

De là, et de ce que la direction des axes est quelconque, on conclut :

Théorème. — *Les forces tangentielles sur deux éléments rectangulaires quelconques ab et ac sont égales en grandeur et signe.*

Ce théorème permet de réduire les quatre fonctions inconnues de x et y

$$n, \; t, \; n_1, \; t_1,$$

à trois, et les équations de projection deviennent ainsi définitivement

$$(2) \qquad \frac{\partial n \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial t \varepsilon}{\partial y} = X_0 \varepsilon, \quad \frac{\partial t \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial n_1 \varepsilon}{\partial y} = Y_0 \varepsilon,$$

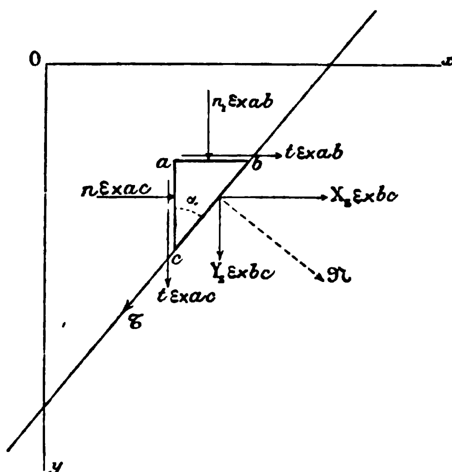
soit deux équations, applicables à des corps de nature quelconque, entre trois fonctions inconnues n, n_1, t des deux variables x et y.

§ 3.

ÉQUILIBRE DU PRISME TRIANGULAIRE. — Considérons encore (*fig.* 71) à l'intérieur du corps et dans le plan de symétrie un triangle rectangle *abc* dont les éléments infiniment petits *ab* et *ac* soient parallèles aux axes et dont l'hypoténuse *bc* ait sur les axes une inclinaison donnée.

Désignons par α l'angle que fait avec l'axe des y la ligne *bc* prolongée de façon que, si elle est parallèle à cet axe, son sens positif soit celui Oy.

Fig. 71.



Ce triangle est la section droite d'un prisme de hauteur ε. Les résultantes des forces qui agissent sur les faces projetées en *ac* et *ab* ont respectivement pour composantes parallèlement aux axes Ox et Oy

$$n\varepsilon \times ac,\ t\varepsilon \times ac \text{ et } t\varepsilon \times ab,\ n_1\varepsilon \times ab;$$

l'aire de la face hypoténuse est $\varepsilon \times bc$ et, par suite, si X_s, Y_s sont les composantes de la force rapportée à l'unité de surface que la partie de gauche du corps exerce sur la partie de droite à travers *bc*, les composantes analogues pour l'action que nous avons à considérer sont $-X_s$, $-Y_s$ et la résultante des forces qui agissent sur

toute la face a pour composantes parallèles aux axes

$$-X_s\varepsilon \times bc, \quad -Y_s\varepsilon \times bc.$$

Les sommes des composantes de toutes ces forces parallèlement à chaque axe sont ici des quantités infiniment petites du premier ordre, c'est-à-dire de l'ordre des côtés ab, ac et bc, tandis que la résultante des forces extérieures agissant sur le volume du prisme triangulaire est du second ordre; ses projections peuvent, par suite, être négligées et les équations de projection qui expriment l'équilibre de ce nouveau prisme sont

$$X_s \times bc = n \times ac + t \times ab, \quad Y_s \times bc = t \times ac + n_1 \times ab.$$

Mais on a

$$ab = bc \sin\alpha, \quad ac = bc \cos\alpha.$$

Par suite les équations ci-dessus deviennent

$$(3) \qquad X_s = n \cos\alpha + t \sin\alpha, \quad Y_s = t \cos\alpha + n_1 \sin\alpha.$$

Désignons par $\mathcal{N}$ et $\mathcal{T}$ les composantes normale et tangentielle de la force rapportée à l'unité de surface qui agit sur l'élément bc. On prend la normale positive, de façon que la force $\mathcal{N}$ soit comptée positivement si c'est une compression. Le sens positif de bc et par suite de $\mathcal{T}$ a été défini.

On aura, d'après ces conventions,

$$\mathcal{N} = X_s \cos\alpha + Y_s \sin\alpha, \quad \mathcal{T} = -X_s \sin\alpha + Y_s \cos\alpha,$$

ou, à cause de (3),

$$\mathcal{N} = n \cos^2\alpha + 2t \sin\alpha \cos\alpha + n_1 \sin\alpha,$$
$$\mathcal{T} = (n_1 - n) \sin\alpha \cos\alpha + t(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

ou

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathcal{N} = t \sin 2\alpha + \dfrac{n}{2}(1 + \cos 2\alpha) + \dfrac{n_1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \\ \mathcal{T} = t \cos 2\alpha + \dfrac{n_1 - n}{2} \sin 2\alpha. \end{cases}$$

§ 4.

PRESSIONS PRINCIPALES. — ÉLÉMENTS ISOSTATIQUES. — *Par chaque point a du plan passent deux éléments rectangulaires qui ne supportent que des pressions (ou tensions) normales. De plus,*

l'un d'eux est celui qui, au point considéré, supporte la force élastique la plus grande; l'autre, la force élastique la plus petite.

Pour établir cette proposition, observons que, dans les équations (3) et (4), les coefficients n, n_1, t ont, en un point donné a, des valeurs fixes et, pour avoir les lois de la variation ucs pressions sur les divers éléments menés par ce point, il suffit de faire varier l'angle α qui définit la direction de l'élément considéré.

Les inclinaisons α des éléments qui ne supportent qu'une pression normale sont, en vertu de la seconde des équations (4), données par l'équation

$$\mathfrak{T} = 0$$

ou

$$t \cos 2\alpha + \frac{n_1 - n}{2} \sin 2\alpha = 0$$

ou

$$\tan 2\alpha = \frac{n - n_1}{2t}.$$

Or il existe toujours deux angles $2\alpha_0$ et $2\alpha_0 + \varpi$ différant entre eux de ϖ ou de 180° qui satisfont à cette équation. Donc il y a toujours deux éléments remplissant la condition voulue, et leurs inclinaisons sur l'axe des y sont α_0 et $\alpha_0 + \frac{\varpi}{2}$, c'est-à-dire qu'ils sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Convenons, avec Lamé, d'appeler *éléments isostatiques* ces deux éléments rectangulaires qui ne supportent que des pressions ou des tensions normales, que nous appellerons les *tensions* ou *pressions principales*.

Soient A et B leurs grandeurs considérées comme positives si ce sont des pressions, de sorte que A et B peuvent être de mêmes signes ou de signes contraires.

Je dis à présent que ces deux éléments supportent, l'un une force élastique plus grande, l'autre une force élastique plus petite que tout autre élément passant par le point considéré, en d'autres termes que les valeurs absolues de A et B sont l'une supérieure, l'autre inférieure à celle de la force élastique totale $\mathfrak{R}$, exercée sur tout autre élément, ou encore si A est en valeur absolue plus grand que B,

$$A^2 > \mathfrak{R}_s^2 > B^2.$$

En effet, prenons les directions des deux éléments isostatiques pour axes de coordonnées, l'axe des x étant perpendiculaire à celui qui supporte la force A.

Les formules (3) et (4), qui sont applicables, quelle que soit la direction des axes, s'appliquent encore : seulement, comme alors c'est pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\varpi}{2}$ qu'on doit avoir $\mathfrak{T} = 0$, il faut que $t = 0$. De plus, on aura $n = A$, $n_1 = B$. Par suite, les équations (3) deviennent

$$X_s = A \cos\alpha, \quad Y_s = B \sin\alpha,$$

d'où

$$\mathfrak{R}_s^2 = X_s^2 + Y_s^2 = A^2 \cos^2\alpha + B^2 \sin^2\alpha = A^2 - (A^2 - B^2)\sin^2\alpha.$$

On voit que le maximum du second membre a lieu pour $\alpha = 0$ et le minimum pour $\alpha = \frac{\varpi}{2}$.

§ 5.

FORCE TANGENTIELLE MAXIMA. — THÉORÈME. — *En chaque point, il existe deux éléments rectangulaires inclinés à 45° sur les éléments isostatiques, supportant des forces tangentielles égales en valeur absolue et dont la valeur commune, égale à la demi-différence des forces principales, est maxima, c'est-à-dire supérieure à la force tangentielle que supporte tout autre élément passant par le point considéré.*

En effet, prenons toujours les axes parallèles aux éléments isostatiques pour axes de coordonnées, de façon que

$$t = 0, \quad n = A, \quad n_1 = B;$$

la seconde des équations (4) devient

$$\mathfrak{T} = -\frac{A - B}{2} \sin 2\alpha,$$

qui a son minimum positif et égal à $\frac{A - B}{2}$ pour $2\alpha = \frac{3\varpi}{2}$ et son maximum négatif égal à $-\frac{A - B}{2}$ pour $2\alpha = \frac{\varpi}{2}$.

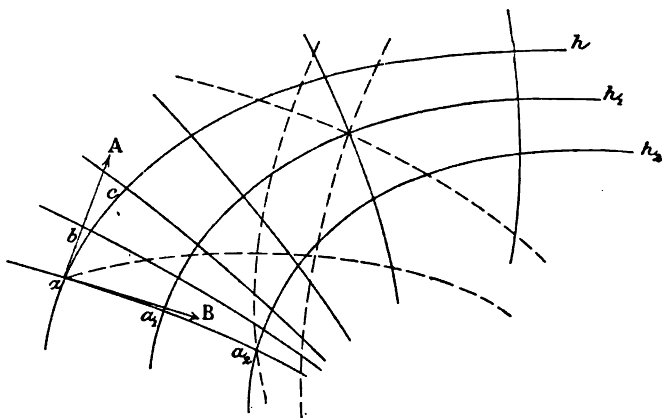
Donc, les valeurs correspondantes de α sont $\frac{\varpi}{4}$ et $\frac{3\varpi}{4}$, c'est-à-dire

que les éléments qui supportent les forces tangentielles maxima sont ceux qui font des angles de 45° avec les axes de coordonnées ou avec les éléments isostatiques. On voit de plus que les forces tangentielles qu'elles supportent sont égales, au signe près, à la demi-différence des forces principales.

§ 6.

LIGNES ISOSTATIQUES ET LIGNES D'EFFORTS TANGENTIELS MAXIMA. — Partant d'un point a, traçons l'un des deux éléments isostatiques ab (*fig.* 72) qui y passe; par son extrémité b, traçons de même l'élément bc infiniment voisin; en continuant ainsi de proche en proche, on obtiendra une courbe $abcd$.

Fig. 72.



En partant d'autres points a_1, a_2, ..., on aurait ainsi une série de courbes telles que *chacune d'elles* ne supporte, sur toute son étendue, que des actions normales.

Si, en partant des points a, b, c, on avait construit de même les éléments isostatiques respectivement perpendiculaires aux précédents, on aurait obtenu une seconde série de courbes coupant partout les premières à angle droit et jouissant aussi de la propriété de ne subir que des actions normales. Nous les tracerons en gros traits ou traits fins suivant qu'elles sont comprimées ou tendues. Elles doivent, d'après un théorème plus général de Lamé,

se nommer *lignes isostatiques*. C'est suivant elles que *s'exercent les pressions ou tensions maxima.*

Concevons, à présent, que l'on construise les deux systèmes de lignes coupant toutes les précédentes à 45°.

C'est (§ 5) suivant ces nouvelles lignes que *s'exercent les actions tangentielles les plus grandes.*

Ainsi, dès qu'on connaît l'un des systèmes de lignes isostatiques, non seulement on peut trouver l'autre, mais on peut trouver aussi les deux systèmes de lignes qui supportent les actions tangentielles les plus grandes.

§ 7.

VALEURS DES FORCES NORMALES ET TANGENTIELLES MAXIMA EN CHAQUE POINT. — Pour simplifier les démonstrations, nous avons dans ce qui précède, supposé qu'on prenait pour axes de coordonnées les directions des forces principales. Revenons à des axes fixes quelconques.

La direction des éléments isostatiques est donnée par $\mathfrak{T} = 0$ ou par la seconde des équations (4),

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2t}{n - n_1}.$$

En portant les deux valeurs qui en résultent pour l'angle α, dans la première des équations (4),

$$\mathfrak{N} = t \sin 2\alpha + \frac{n - n_1}{2} \cos 2\alpha + \frac{n + n_1}{2},$$

on aura les valeurs des forces principales A et B. Or,

$$\sin 2\alpha = \frac{2t}{\pm\sqrt{(n - n_1)^2 + 4t^2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{n - n_1}{\pm\sqrt{(n - n_1)^2 + 4t^2}};$$

d'où, pour ces valeurs,

$$\text{(6)} \qquad \mathfrak{N} = \frac{n + n_1}{2} \pm \sqrt{t^2 + \frac{(n - n_1)^2}{4}};$$

l'une des forces cherchées répond au signe + du radical, l'autre au signe —.

On peut, de même, déterminer la valeur maxima de $\mathfrak{T}$. Elle

répond à

$$\frac{d\mathfrak{G}}{d\alpha} = 0$$

ou

$$-t \sin 2\alpha + \frac{n_1 - n}{2} \cos 2\alpha = 0$$

ou

(7) $$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{n_1 - n}{2t}.$$

En appelant α' l'un des angles fournis par cette équation et comparant à (5), on voit que

$$\operatorname{tang} 2\alpha \operatorname{tang} 2\alpha' = +1,$$

c'est-à-dire que les directions définies par les angles 2α et $2\alpha'$ seraient rectangulaires, et par suite, celles définies par α et α' sont à 45°, comme nous le savions.

On tire de (7)

$$\sin 2\alpha = \frac{n_1 - n}{\pm\sqrt{(n_1 - n)^2 + 4t^2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{2t}{\pm\sqrt{(n_1 - n)^2 + 4t^2}},$$

d'où

(8) $$\mathfrak{G} = \pm\sqrt{t^2 + (n_1 - n)^2},$$

ce qui montre encore qu'en appelant A et B les forces principales, c'est-à-dire les deux racines de (6), on a bien, comme nous l'avons trouvé,

$$\mathfrak{G} = \pm\frac{A - B}{2}.$$

§ 8.

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE M. D'OCAGNE DES PRESSIONS EN UN POINT. — Dans la troisième édition de son remarquable *Traité de Résistance des Matériaux* (p. 237), M. Ed. Collignon indique une construction due à M. Maurice d'Ocagne, Ingénieur des Ponts et Chaussées, qui permet de trouver très simplement les forces élastiques exercées sur les divers éléments passant en un point donné dans le cas particulier où la force normale n_1 sur les éléments parallèles à une direction fixe (prise pour axe des x) est nulle.

La construction s'étend immédiatement au cas général et peut alors s'effectuer ainsi :

THÉORÈME. — *Connaissant les composantes normale et tangentielle, n, n_1 et t des forces élastiques exercées sur les deux éléments parallèles aux axes de coordonnées passant en un point quelconque du plan de symétrie, pour trouver les composantes normale et tangentielle* $\mathfrak{N}$ *et* $\mathfrak{T}$ *de la force élastique exercée sur un élément passant par ce même point et formant un angle quelconque* α *avec la verticale, construisez en un point arbitrairement choisi* O *du plan* (*fig.* 73, p. 540) *deux axes rectangulaires* C$\mathfrak{N}$, C$\mathfrak{T}$. *Sur le premier, portez une longueur* CO *égale à la valeur absolue de* $\frac{1}{2}(n - n_1)$, *du côté positif* C$\mathfrak{N}$ *ou du côté opposé suivant que* $\frac{1}{2}(n - n_1)$ *est positif ou négatif; de même, portez* OO′ *égal à la valeur absolue de* $-\frac{1}{2}(n + n_1)$ *du côté* O$\mathfrak{N}$ *ou du côté opposé suivant que* $-\frac{1}{2}(n + n_1)$ *est positif ou négatif.*

Sur l'axe C$\mathfrak{T}$, *portez une longueur* CA *égale à la valeur absolue de* t *du côté fixé par son signe.*

Ceci fait, du point O *comme centre avec* OA *pour rayon, décrivez une circonférence et menez le diamètre* AOA′.

Enfin, faites l'angle A′OM $= 2\alpha$ *et menez l'ordonnée* MP *du point* M *ainsi déterminé sur la circonférence.*

Je dis que l'ordonnée MP représente $-\mathfrak{T}$ et l'abscisse O′P représente $\mathfrak{N}$. En effet, soit ω l'angle AOC. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{MP} &= \mathrm{MO}\sin(\varpi - 2\alpha + \omega) = \mathrm{MO}\sin(2\alpha - \omega), \\ \mathrm{MP} &= \mathrm{MO}\sin 2\alpha\cos\omega - \mathrm{MO}\sin\omega\cos 2\alpha \\ &= \mathrm{OC}\sin 2\alpha - \mathrm{AC}\cos 2\alpha = -t\cos 2\alpha + \tfrac{1}{2}(n - n_1)\sin 2\alpha, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $-\mathfrak{T}$, en vertu de la seconde des équations (4).

De même,

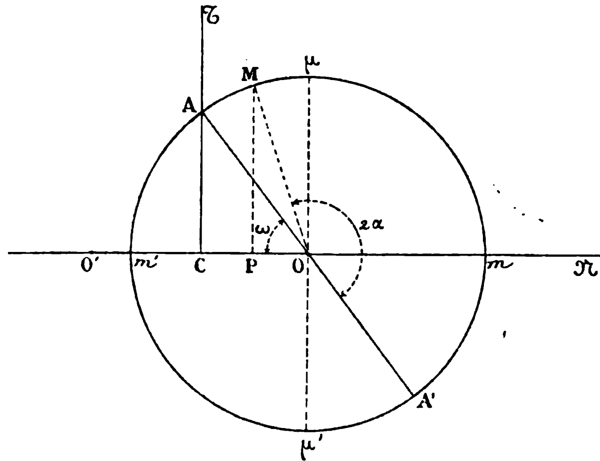
$$\begin{aligned} \mathrm{O'P} &= \mathrm{OO'} - \mathrm{OP} = \frac{n + n_1}{2} - \mathrm{OM}\cos(\varpi - 2\alpha + \omega), \\ \mathrm{O'P} &= \frac{n + n_1}{2} + \mathrm{OA}\cos(2\alpha - \omega) \\ &= \frac{n + n_1}{2} + \mathrm{OA}\cos\omega\cos 2\alpha + \mathrm{OA}\sin\omega\sin 2\alpha \\ &= \frac{n + n_1}{2} + \tfrac{1}{2}(n - n_1)\cos 2\alpha + t\sin 2\alpha, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathfrak{N}$, en vertu de la première des équations (4).

De cette construction, on tire aisément les propriétés des forces élastiques autour d'un point, que nous avons déduites des formules (4).

Les valeurs extrêmes de la pression normale O'P se produisent quand le point M est sur l'axe C$\mathfrak{N}$ en m ou en m'.

Fig. 73.



Les valeurs correspondantes A'Om et A'Om' de l'angle 2α diffèrent entre elles de ϖ et, par suite, les inclinaisons α des éléments correspondants diffèrent de $\frac{\varpi}{2}$. Ces éléments sont donc rectangulaires.

Les valeurs correspondantes de $\mathfrak{T} = $ MP sont nulles. Ce sont donc les éléments isostatiques.

Les valeurs extrêmes de la force tangentielle $-\mathfrak{T}$ ou MP sont Oμ et Oμ', égales au rayon de la circonférence, soit à $\sqrt{t^2 + \frac{n^2}{4}}$, et répondent au diamètre $\mu\mu'$ parallèle à CA. Les valeurs A'Oμ et A'Oμ' correspondantes de l'angle 2α sont les précédentes augmentées de $\frac{\varpi}{2}$; donc les inclinaisons α correspondant aux valeurs extrêmes de $\mathfrak{T}$ diffèrent de $\frac{\varpi}{4}$ ou de 45° de celles qui répondent aux valeurs extrêmes de $\mathfrak{N}$, c'est-à-dire que les lignes de plus grand effort tangentiel sont inclinées à 45° sur les lignes isostatiques. C'est ce que nous avions déjà trouvé.

§ 9.

DISTRIBUTION DES FORCES ÉLASTIQUES n, n_1, t AGISSANT SUR DES ÉLÉMENTS PARALLÈLES AUX AXES. — APPLICATION AUX POUTRES DROITES DE SECTION CONSTANTE. — Prenons pour axe des x l'axe horizontal de la poutre, dirigé de gauche à droite, et pour axe des y une verticale descendante.

Soient M et T le moment de flexion et l'effort tranchant dans une section verticale. Nous avons vu (§ 203) que la pression normale n sur un élément de cette section placé à une distance u de la fibre moyenne est

$$n = -\frac{Mu}{I},$$

I étant le moment d'inertie de la section que nous regardons ici comme constante.

La lettre u représente l'ordonnée y du point où agit n, donc

$$n = -\frac{M}{I}y, \tag{9}$$

où M est une fonction de la seule variable x.

Les équations (2) donnent, en négligeant le poids de la poutre, c'est-à-dire en faisant $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$,

$$\frac{\partial t\varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial n\varepsilon}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n_1\varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial t\varepsilon}{\partial x} = 0.$$

En général, ε est une fonction donnée de x et y. Ici la poutre est cylindrique, c'est-à-dire que ε est une fonction de la seule variable y. Donc

$$\frac{\partial t\varepsilon}{\partial y} - \frac{\varepsilon}{I}y\frac{\partial M}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial n_1\varepsilon}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial t}{\partial x} = 0. \tag{10}$$

En intégrant, il vient

$$t\varepsilon = \frac{1}{I}\frac{\partial M}{\partial x}\int_{u_0}^{y}\varepsilon y\,dy, \tag{11}$$

en désignant par u_0 l'ordonnée de l'une des deux fibres les plus éloignées de la fibre moyenne.

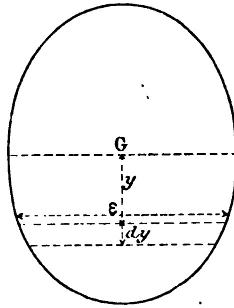
La composante tangentielle sur un élément horizontal tangent

à cette fibre est évidemment nulle, puisque cet élément est à la surface de la poutre. Il en résulte qu'il n'y a pas de constante d'intégration à ajouter.

Si u_1 est la seconde fibre la plus éloignée, on doit aussi avoir pour cette fibre $t = 0$. Cette condition est remplie d'elle-même.

En effet, représentons (*fig.* 74) la section de la poutre. Soit G l'horizontale passant par le centre de gravité.

Fig. 74.



Si $\varepsilon dy = dS$ est l'élément de surface compris entre les horizontales d'ordonnées y et $y + dy$, on a

$$\int_{u_0}^{u_1} \varepsilon y\, dy = \int y\, dS,$$

l'intégrale étendue à toute la surface. Cette intégrale est nulle en vertu d'une propriété connue du centre de gravité.

Il est bon de vérifier que la résultante des actions tangentielles t donne bien l'effort tranchant T. On a, en effet (§192),

$$T = -\frac{dM}{dx},$$

donc

$$t\varepsilon = -\frac{T}{I}\int_{u_0}^{y} \varepsilon y\, dy;$$

d'où

$$\int_{u_0}^{u_1} t\varepsilon\, dy = -\frac{T}{I}\int_{u_0}^{u_1} dy \int_{u_0}^{y} \varepsilon y\, dy$$

ou, en intégrant par parties,

$$\int dy \int_{u_0}^{y} \varepsilon y\, dy = y\int_{u_0}^{y} \varepsilon y\, dy - \int_{u_0}^{y} \varepsilon y^2\, dy.$$

Le premier terme s'annule pour $y = u_0$ et pour $y = u_1$, comme il vient d'être rappelé.

Donc

$$\int_{u_0}^{u_1} dy \int_{u_0}^{y} \varepsilon y\, dy = -\int_{u_0}^{u_1} \varepsilon y^2\, dy = -\mathrm{I},$$

par suite

$$\int_{u_0}^{u_1} t\varepsilon\, dy = \mathrm{T}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On tire de (10), à cause de $\mathrm{T} = -\dfrac{d\mathrm{M}}{dx}$.

$$(12) \qquad t\varepsilon = -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{I}} \int_{u_0}^{y} \varepsilon y\, dy;$$

d'où

$$\frac{\partial t\varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{\mathrm{I}} \frac{d\mathrm{T}}{dx} \int_{u_0}^{y} \varepsilon y\, dy,$$

et, par suite, la seconde des équations (9) donne

$$(13) \qquad \frac{\partial n_1 \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{I}} \frac{d\mathrm{T}}{dx} \int_{u_0}^{y} \varepsilon y\, dy, \quad n_1 \varepsilon = \frac{1}{\mathrm{I}} \frac{d\mathrm{T}}{dx} \int_{u_0}^{y} dy \int_{u_0}^{y} \varepsilon y\, dy.$$

Il n'y a pas de constante à ajouter, la pression à la surface de la poutre étant supposée nulle sur la fibre extrême caractérisée par u_0, que nous regardons comme la fibre inférieure, si les charges sont posées à la partie supérieure, et *vice versa*.

Soit $\bar{\varepsilon}$ une valeur convenable comprise entre toutes celles que prend ε depuis $y = u_0$ jusqu'à $y = u_1$. On aura

$$\int_{u_0}^{y} \varepsilon y\, dy = \bar{\varepsilon} \int_{u_0}^{y} y\, dy = \bar{\varepsilon}\, \frac{y^2 - u_0^2}{2}.$$

Si δ est une longueur de l'ordre de grandeur des dimensions de la section de la poutre, dimensions supposées très petites, on voit:

1° Par l'équation (9), en observant que le moment d'inertie I est de l'ordre de grandeur de δ^4 et $\dfrac{\mathrm{I}}{u}$ de l'ordre de δ^3, que n est de l'ordre de $\dfrac{1}{\delta^3}$;

2° Par l'équation (12), que t est de l'ordre de $\dfrac{1}{\delta^2} = \delta \times \dfrac{1}{\delta^3}$ ou de l'ordre de δn, soit incomparablement plus petit que n;

3° Par l'équation (13) en raisonnant sur la double intégrale comme nous l'avons fait sur celle $\int \varepsilon y\,dy$, que n_1 est de l'ordre de $\delta^3 \times \frac{1}{\delta^4}$ ou de $\delta^3 n$, c'est-à-dire encore beaucoup plus petit que t.

Nous admettrons donc qu'on néglige cette pression normale n_1 exercée sur les éléments horizontaux de la poutre.

Nous aurons ainsi, en résumé, pour les forces élastiques n, n_1, t en un point $a(x, y)$,

$$(14)\quad n = -\frac{M}{I}y,\quad t = \frac{1}{I\varepsilon}\frac{dM}{dx}\int_{u_0}^{y} \varepsilon y\,dy = -\frac{T}{I\varepsilon}\int_{u_0}^{y} \varepsilon y\,dy,\quad n_1 = 0,$$

où I, moment d'inertie de la section de la poutre, est une constante; M, moment de flexion relatif à la section d'abscisse x est une fonction de cette seule variable; ε, épaisseur de la poutre perpendiculairement à son plan de symétrie au point considéré a, est une fonction de la seule variable y.

On voit bien que l'hypothèse (§ 219) consistant à supposer les forces tangentielles t uniformément réparties dans chaque section est inexacte; leur répartition dépend de ε ou de la forme de la section.

Dans une poutre à section rectangulaire, ε est constant et

$$t = -\frac{T}{I}\int_{u_0}^{y} y\,dy = \frac{T}{2I}(u_0^2 - y^2).$$

Soit h la hauteur de la poutre ; ε étant son épaisseur, on a $u_0 = \frac{h}{2}$

$$I = \varepsilon \int_{-u_0}^{+u_0} y^2\,dy = \frac{2\varepsilon u_0^3}{3} = \frac{\varepsilon h^3}{12},\quad t = \frac{6T}{\varepsilon h^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

et comme, pour une section donnée, l'effort tranchant T a une valeur donnée, on voit que t varie avec y, suivant une fonction parabolique.

§ 10.

LIGNES ISOSTATIQUES ET LIGNES DE PLUS GRAND EFFORT TANGENTIEL DANS UNE POUTRE DROITE. — Si l'on fait $n_1 = 0$ dans les formules (4), elles

deviennent

$$\mathcal{N} = t \sin 2\alpha + \frac{n}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\mathcal{T} = t \cos 2\alpha - \frac{n}{2} \sin 2\alpha.$$

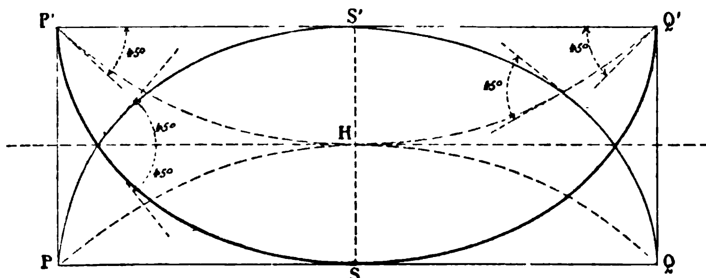
On a de plus

$$n = -\frac{M}{I} y.$$

Considérons (*fig.* 75) une portion de poutre PQP′Q′ dans laquelle le moment de flexion M soit, pour fixer les idées, positif.

Du côté de la fibre extrême supérieure P′Q′ où y est négatif, n est positif. L'action tangentielle t sur un élément horizontal tangent à cette fibre est évidemment nulle. Donc $\mathcal{N}$ se réduit à son

Fig. 75.



second terme dont le coefficient est positif. Le maximum a lieu pour $\cos 2\alpha = 1$. Donc, le long de PQ, tous les éléments verticaux subissent des compressions maxima et font ainsi partie du système des lignes isostatiques comprimées.

Sur la fibre moyenne, soit pour $y = 0$, on a $n = 0$, d'où

$$\mathcal{N} = t \sin 2\alpha.$$

Le maximum de $\mathcal{N}$ a lieu pour $\sin 2\alpha = \pm 1$, ce qui indique que les lignes isostatiques coupent toutes la fibre moyenne sous un angle de 45°.

Le long de la génératrice extrême inférieure PQ, on a encore $t = 0$; mais n et, par suite, $\mathcal{N}$ sont négatifs, c'est-à-dire que tous les éléments sont tendus, sauf celui tangent à PQ (pour lequel $\alpha = \frac{\varpi}{2}$ et $\cos 2\alpha = -1$, qui n'est ni tendu, ni comprimé; $\mathcal{N} = 0$ est donc

en ce point la compression maxima et elle a lieu pour l'élément horizontal).

Donc, les lignes isostatiques *comprimées* sont normales à P′Q′, tangentes à PQ, coupant sous un angle de 45° la fibre moyenne; elles ont la forme de la ligne tracée en gros trait.

Les lignes isostatiques supportant des tensions sont orthogonales aux précédentes. Elles sont donc tangentes à P′Q′, normales à PQ et coupent aussi la fibre moyenne à 45°.

Elles ont la forme de la ligne tracée en trait fin.

Les lignes de plus grand glissement coupent, comme nous savons, les lignes isostatiques sous des angles de 45°; elles sont donc tangentes à la fibre moyenne et coupent les génératrices extrêmes PQ, P′Q′ sous l'angle de 45°.

Des considérations analogues sont applicables aux arcs; si l'on néglige, comme on le fait, n_1, ainsi que la compression de la fibre moyenne, les courbes jouissent des mêmes propriétés que pour les poutres droites.

Les figures *a* et *b* (*Pl. XXIV*) donnent, l'une les lignes isostatiques, l'autre (en pointillé) les lignes de plus grand effort tangentiel dans une poutre posée sur deux appuis et chargée symétriquement.

Aux deux appuis, $M = 0$; donc $n = 0$ et, par suite,

$$\mathfrak{N} = t \sin 2\alpha, \quad \mathfrak{T} = t \cos 2\alpha,$$

qui montrent que les valeurs extrêmes de $\mathfrak{N}$ ont lieu pour $\alpha = \pm 45°$. Ainsi, les lignes isostatiques doivent couper les sections des appuis sous un angle de 45° (*fig. a*). Au contraire (*fig. b*), les lignes de plus grand glissement doivent leur être tangentes.

Pour la section du milieu, M est maximum, sa dérivée et, par suite, $T = 0$. Donc aussi $t = 0$ et

$$\mathfrak{N} = \frac{n}{2}(1 + \cos 2\alpha) = -\frac{My}{I}(1 + \cos 2\alpha),$$

$$\mathfrak{T} = -\frac{n}{2}\sin 2\alpha.$$

La valeur maxima de $\mathfrak{N}$, dans cette section, a lieu pour $\cos 2\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$, c'est-à-dire que la moitié supérieure de cette section est une ligne isostatique comprimée; de même, on verrait que la moitié inférieure est une ligne isostatique tendue.

Les lignes comprimées sont marquées en gros traits; les lignes tendues tracées en traits plus fins sont symétriques des précédentes par rapport à la fibre moyenne si la section de la poutre est ellemême symétrique par rapport au plan horizontal contenant le centre de gravité.

Pour la section du milieu, $\mathfrak{T}$ atteint ses valeurs extrêmes pour $\sin 2\alpha = \pm 1$, $\alpha = \pm 45°$. Au point où cette section coupe la fibre moyenne, on a $n = 0$ et, par suite, $\mathfrak{T} = 0$, quel que soit α. En ce point, comme $n = t = 0$, les éléments ne supportent aucune pression, quel que soit α.

NOTE V.

SUR UNE MANIÈRE DE DÉDUIRE LES FIGURES RÉCIPROQUES DE LA STATIQUE GRAPHIQUE, DE LA TRANSFORMATION PARABOLIQUE DE CHASLES.

Étant donnés un polyèdre (P) et une surface du second degré, il ressort de la théorie des figures polaires réciproques qu'il existe un second polyèdre (P′) réciproque du premier, c'est-à-dire tel que les sommets de l'un de ces polyèdres sont les pôles, relativement à la surface donnée, des faces de l'autre, et que les arêtes des deux polyèdres sont des droites conjuguées.

Aux arêtes émanant d'un sommet de l'un des polyèdres correspond, dans l'autre, un polygone plan fermé.

Donc, si l'on projette les deux polyèdres sur un plan quelconque, on aura, en projection, deux figures planes telles, que chaque ligne de l'une ait une correspondante dans l'autre et une seule, et qu'à un système de lignes concourantes de chacune d'elles réponde un polygone fermé de l'autre. Ces deux figures seraient donc réciproques dans le sens que nous avons attaché à ce mot au § 92, si leurs lignes correspondantes étaient deux à deux parallèles, ou, plus généralement, si elles faisaient un angle constant; car alors il suffirait de faire tourner l'une des deux figures de cet angle, pour que deux lignes correspondantes devinssent parallèles et pour que les figures fussent réciproques.

Cette propriété de faire entre elles un angle constant n'appartient pas aux lignes correspondantes de nos figures, si la surface du second degré, par rapport à laquelle les polyèdres (P) et (P′) sont réciproques, a été prise au hasard, et si le plan sur lequel on les a projetés est lui-même quelconque; mais je dis qu'elle se trouve acquise si la surface, par rapport à laquelle on a fait la transformation polaire, est un paraboloïde de révolution, et si, de plus, le plan de projection est perpendiculaire à l'axe de ce paraboloïde.

En effet, M. Chasles a démontré en 1839 (*Bulletin de Férussac*) cette propriété très simple et facile à vérifier : que la projection,

sur un plan perpendiculaire à l'axe d'un paraboloïde de révolution, de la courbe de contact de ce paraboloïde avec un cône est un cercle ayant pour centre la projection du sommet du cône.

D'après cela, soient (d) et (δ) deux droites réciproques, relativement à un paraboloïde de révolution.

Supposons, pour fixer les idées, que la droite (d) soit extérieure au paraboloïde, en sorte que (δ) est la ligne de contact des deux plans tangents au paraboloïde menés par (d). Circonscrivons au paraboloïde un cône ayant son sommet en un point quelconque s de la droite (d) et soit t la trace de cette droite sur le plan de contact. Si nous projetons, sur un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, la courbe de contact et les deux lignes (δ) et (d), la projection de la courbe sera un cercle ayant la projection du point s pour centre, en sorte que la projection de (d) sera un diamètre (d') de ce cercle. Soit t' la projection du point t.

Si, par le point t', on mène des tangentes au cercle, la corde de contact de ces tangentes sera la projection (δ') de (δ); donc les droites (d') et (δ') sont perpendiculaires entre elles, puisque l'une est un diamètre d'un cercle et l'autre la corde de contact de deux tangentes issues d'un point de ce diamètre.

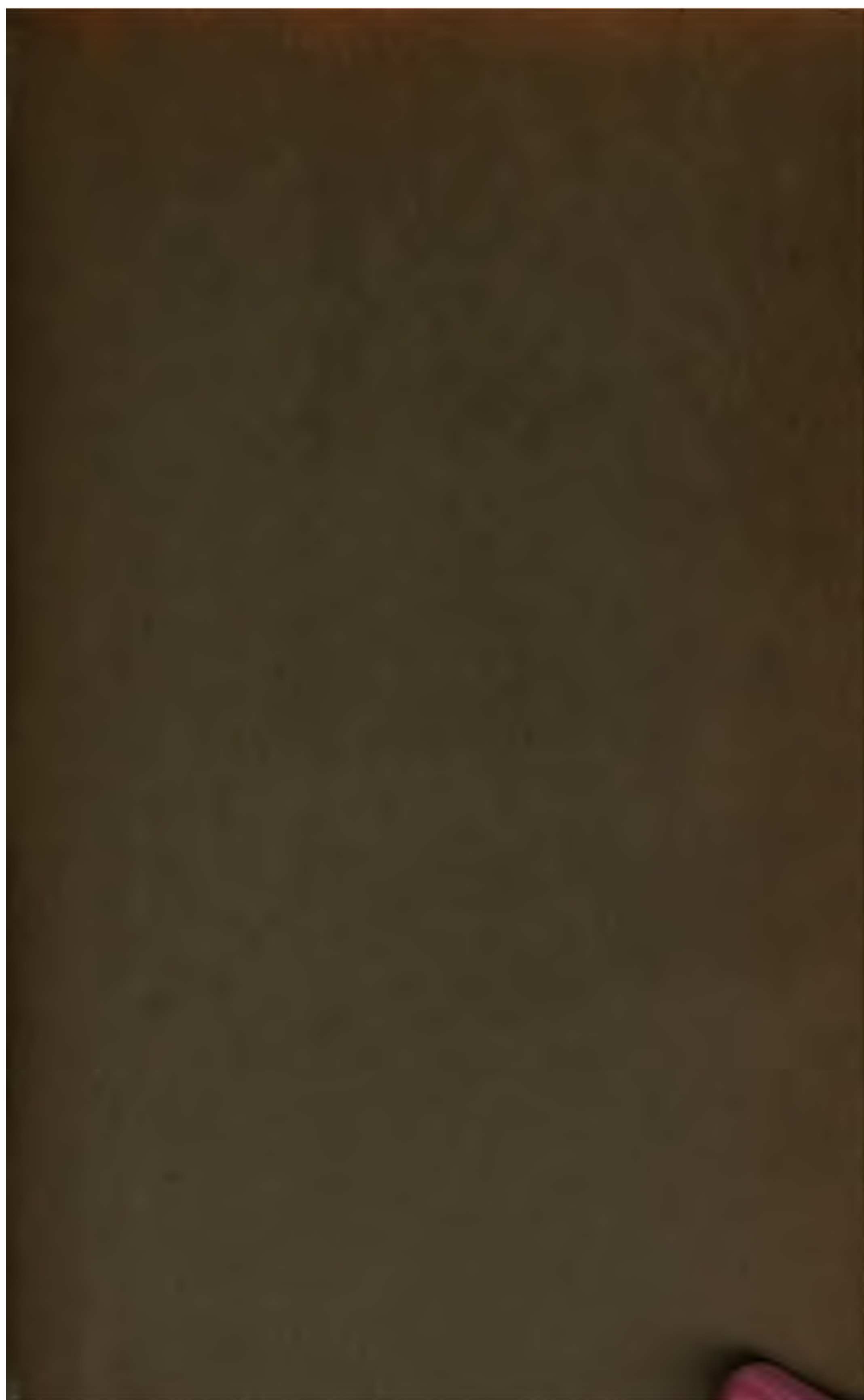
Ainsi, dans la transformation relativement à un paraboloïde de révolution, deux droites réciproques se projettent à angle droit sur un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde.

Par suite, les projections de deux polyèdres réciproques sont des figures telles, qu'à chaque ligne de l'une d'elles correspond une ligne perpendiculaire de l'autre et qu'à chaque système de lignes concourantes de l'une répond, dans l'autre, un polygone fermé. Il suffit donc de faire tourner l'une des figures d'un angle droit pour que les deux figures soient des figures réciproques de la Statique graphique. Une fois cette proposition établie, on en déduirait facilement les principales propriétés des polygones funiculaires et des figures réciproques. Toutefois, cette marche, quoique n'exigeant que des connaissances de Géométrie très élémentaire, est moins immédiate que celle que nous avons suivie.

FIN DU TOME PREMIER.

11150 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins 55.






89080442031
b89080442031a